力學問題に於けるEnergy法とGalerkin法に就いて

酒井忠明*

On the Relation between Energy and Galerkin's Methods for problems of mechanics

Dr. of Eng., Prof. Tadaaki Sakai

Synopsis.

In recent years Ritz's method combined with energy method has been widely applied to the calculations of deflection, critical load and number of free vibration of members with variable section or to other problems of mechnics by Timoshenko.

Moreover, Galerkin's method has been recognized its superiority for the same problems. In this paper author shows that the above both methods give the same results when a deflection curve is assumed to trigonometrical series.

目　次

第1節　緒　言

變斷面部材の挫屈荷重や固有振動數等の固有値や各種の問題の撓みを求むる場合，これ等に關する基礎微分方程式を作り，直接この方程式を滿足せしむる解を組合せ，境界條件を滿足するやうに積分常數を決定する方法は一般に難解である．

近年 Ritz 法を取り入れた Energy 法が Timoshenko 等により廣く各種の問題に適用せられて問題が簡易化され，更に又 Galerkin 法なるものがその優秀さを認められてきた．この兩者の方法は

* 北海道大學工學部教授，工學博士．

いづれも境界條件を滿足するやうな函數列を考へて問題を解決するものである．變斷面部材の固有値や撓みを求むる場合，その撓み曲線を三角級數の形で表はすこと多く，この場合上記の兩方法は全く同一結果を與へるのみならず，途中からの計算過程も全く一致するもので，次に各種の問題に對してこのことを例證する．これ等の方法は近似解法ではあるが，Ritz 法をとり入れた Energy 法によつても知られるごとく，正解に極めて近きものである．

第2節　變斷面壓縮部材の挫屈荷重

1. Energy 法

兩端鉸にして長さ l なる部材を考へ坐標原點はその一端にとり部材方向に x 軸をとる．Energy 法による挫屈荷重は

$$P = E\frac{\int_0^l I(x)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx}{\int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

である．ここに

E = 弾性係數，　$I(x)$ = 斷面の慣性モーメント

これに對し撓み曲線を

$$y = a_1 \sin\frac{\pi x}{l} + a_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + \cdots a_n \sin\frac{n\pi x}{l} + \cdots a_m \sin\frac{m\pi x}{l} + \cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

とする．この級數は，

$$x = 0 \text{ 及び } x = l \text{ にて共に } y = 0 \;,\quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

即ち部材の兩端に於いて撓み及び曲げモーメントは零となり材端の條件を滿足する．a は挫屈荷重を最小ならしむるごときものをえらぶ．即ち

$$\frac{\partial P}{\partial a_n} = 0$$

(1) 式の右邊の分母を D，分子を N にて表はせば

$$\frac{\partial}{\partial a_n}\left(\frac{N}{D}\right) = \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial a_n}(N) - \frac{N}{D^2}\frac{\partial}{\partial a_n}(D) = 0$$

然るに

$$P = E\frac{N}{D} \qquad \text{又は} \qquad \frac{N}{D} = \frac{P}{E}$$

従つて

$$\frac{\partial}{\partial a_n}(N) - \frac{P}{E}\frac{\partial}{\partial a_n}(D) = 0$$

又は

$$\frac{\partial}{\partial a_n}\left(N - \frac{P}{E}D\right) = 0$$

故に

$$\frac{\partial}{\partial a_n}\left\{\int_0^l I(x)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx - \frac{P}{E}\int_0^l\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx\right\} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$(n = 1, 2, 3 \cdots\cdots\cdots)$$

これが Ritz の方程式である. (2) の撓み曲線より

$$\frac{dy}{dx} = \cdots + a_n\frac{n\pi}{l}\cos\frac{n\pi x}{l} + \cdots + a_m\frac{m\pi}{l}\cos\frac{m\pi x}{l} + \cdots, \quad \cdots\cdots (4)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \cdots - a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\sin\frac{n\pi x}{l} - \cdots - a_m\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\sin\frac{m\pi x}{l} - \cdots, \quad \cdots\cdots (5)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \sum a_n^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\cos^2\frac{n\pi x}{l} + 2\sum a_n a_m nm\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}, \quad (6)$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \sum a_n^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4\sin^2\frac{n\pi x}{l} + 2\sum a_n a_m n^2m^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l} \quad (7)$$

これ等を (3) に代入し

$$\int_0^l I(x)\left\{2a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4\sin^2\frac{n\pi x}{l} + 2\sum a_m n^2m^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\right\}dx$$
$$- \frac{P}{E}\int_0^l 2a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\cos^2\frac{n\pi x}{l} + 2\sum a_m nm\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\Bigg\}dx = 0$$

然るに

$$\int_0^l \cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}dx = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

なる故

$$\int_0^l I(x)\left\{a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\sin^2\frac{n\pi x}{l} + \sum a_m\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\right\}dx$$
$$- \frac{P}{E}\int_0^l a_n\cos^2\frac{n\pi x}{l}dx = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

かかる式が n 個即ち a の數だけ得られ, 之を

$$\left.\begin{array}{l} r_{11}a_1 + r_{12}a_2 + r_{13}a_3 + \cdots\cdots = 0 \\ r_{21}a_1 + r_{22}a_2 + r_{23}a_3 + \cdots\cdots = 0 \\ r_{31}a_1 + r_{32}a_2 + r_{33}a_3 + \cdots\cdots = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (10$$

aが零ならざるため，即ち挫屈ををこすためには

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots\cdots \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \cdots\cdots \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (11)$$

之より挫屈荷重Pを決定する.

2. Galerkin法

壓縮部材の撓み曲線の微分方程式は

$$E\,I(x)\,\frac{d^2y}{dx^2} + Py = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (12)$$

これに對し撓み曲線yは前と同じく境界條件を滿足する(2)の三角級數をとる. (2)と(5)をこの微分方程式の左邊に代入し誤差函數$\varepsilon(x)$を作る. 即ち

$$\varepsilon(x) = I(x)\left\{\cdots + a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin\frac{n\pi x}{l} + \cdots + a_m\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \sin\frac{m\pi x}{l} + \cdots\right\}$$

$$+ \frac{P}{E}\left\{\cdots + a_n \sin\frac{n\pi x}{l} + \cdots + a_m \sin\frac{m\pi x}{l} + \cdots\right\} \quad \cdots\cdots \quad (13)$$

然る時

$$\int_0^l \varepsilon(x)\,Y_n(x)\,dx = 0 \qquad (n = 1, 2, 3 \cdots\cdots) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (14)$$

なる關係がある. ここに$Y_n(x)$は，齊次な境界條件を滿足する一つの函數でここでは

$$Y_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}$$

この聯立一次方程式からa_nを定めるのがGalerkin法である. (14)に(13)を代入しこれに(8)の關係を用ひると

$$\int_0^l I(x)\left\{a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin^2\frac{n\pi x}{l} + \sum a_m\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}dx$$

$$- \frac{P}{E}\int_0^l a_n \sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (15)$$

しかして

$$\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l}\,dx = \int_0^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{l}{2}$$

にして (19) と (15) は全く同一となる.

變斷面壓縮部材の挫屈問題に於いては，この (9) 又は (15) を得るに Galerkin 法は極めて直接的である.

3. 計 算 例 題

任意斷面の慣性モーメントが

$$I(x) = I_c\left(\frac{\lambda + x}{\lambda + \dfrac{l}{2}}\right)^2$$

なる場合を例題にとる. I_c は部材中央の慣性モーメント，λ は常數である. 兩端鉸端とする. (15) 式より

$$\int_0^l (\lambda + x)^2\left\{a_1\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sin^2\frac{\pi x}{l} + a_2\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{2\pi x}{l}\right\}dx - k\int_0^l a_1 \sin^2\frac{\pi x}{l}\,dx = 0$$

及び

$$\int_0^l (\lambda + x)^2\left\{a_2\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \sin^2\frac{2\pi x}{l} + a_1\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{2\pi x}{l}\right\}dx - k\int_0^l a_2 \sin^2\frac{\pi x}{l}\,dx = 0$$

ここに

$$k = \frac{P\left(\lambda + \dfrac{l}{2}\right)^2}{E\,I_c}$$

ただしこの兩式は y の級數を第 2 項迄とりてえたるものなり. ここに

$$\int_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{l}{2}\ ,\qquad \int_0^l x\sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{l^2}{4}$$

$$\int_0^l x^2\sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{l^3}{6} - \frac{l^3}{4n^2\pi^2}\ ,\qquad \int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx = 0$$

$$\int_0^l x\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{2\pi x}{l}\,dx = -\frac{8l^2}{9\pi^2}\ ,\qquad \int_0^l x^2\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{2\pi x}{l}\,dx = -\frac{8l^2}{9\pi^2}$$

なる故上式は

$$a_1\left\{k - \pi^2\left(\frac{\lambda^2}{l^2} + \frac{\lambda}{l} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\right\} + a_2\left(\frac{128}{9}\,\frac{\lambda}{l} + \frac{64}{9}\right\} = 0$$

$$a_1\left\{\frac{32}{9}\,\frac{\lambda}{l} + \frac{16}{9}\right\} + a_2\left\{k - 4\pi^2\left(\frac{\lambda^2}{l^2} + \frac{\lambda}{l} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\right\} = 0$$

今

$$\pi^2\left(\frac{\lambda^2}{l^2}+\frac{\lambda}{l}+\frac{1}{3}\right)=\beta \quad , \qquad 16\left(1+2\frac{\lambda}{l}\right)=\gamma$$

とをけば

$$9\,(2\beta-2k-1)\,a_1-8\gamma a_2=0$$

$$2\gamma a_2-9\,(8\beta-2k-1)\,a_2=0$$

之より

$$\begin{vmatrix} 9\,(2\beta-2k-1) & -8\gamma \\ 2\gamma & -9\,(8\beta-2k-1) \end{vmatrix}=0$$

即ち

$$81\,(2\beta-2k-1)\,(8\beta-2k-1)-16\,\gamma^2=0$$

之を解いて k, 従つて挫屈荷重 P をうる.

$I_{x=0}=0.3\,I_c$ の場合を計算すれば $\dfrac{\lambda}{l}=0.606$ で, 上式は

$$k^2-63.476\,k+571.313=0$$

$$k=10.86$$

故に

$$P=8.9\,\frac{EI_c}{l_c} \qquad \text{又は} \qquad 0.90\,\frac{\pi^2 EI_c}{l^2}$$

こころみに y を第3項迄とる時は

$$P=0.88\,\frac{\pi^2 EI_c}{l^2}$$

第3節 變斷面桁の固有振動數

1. Energy 法

變斷面桁が横振動をなす場合の固有振動數 n_0 は Energy 法によると

$$n_0^2=\frac{gE}{4\pi^2}\,\frac{\displaystyle\int_0^l I\,(x)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx}{\displaystyle\int_0^l q\,y^2\,dx} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\;$$

である. ここに

$q=$ 單位長當りの桁の死荷重

$g=$ 重力加速度

y は振動してゐる時の最大撓みの曲線で，兩端鉸の桁の場合を考へ，この境界條件を滿足する (2) なる三角級數をとるものとする．a は振動數を最小ならしむるごとくえらぶもので，挫屈荷重の時と同樣にしてこの場合の Ritz の方程式は

$$\frac{\partial}{\partial a_n}\left\{\int_0^l I(x)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx-\frac{4n_0^2\pi^2}{Eg}\int_0^l q\,y^2\,dx\right\}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

$$(n=1,\ 2,\ 3\ \cdots\cdots\cdots\cdots)$$

q は一般に x の函數であるがここでは計算の便宜上常數とする．(17) 式に (2) を代入する．この場合

$$y^2=\sum a_n^2\sin^2\frac{n\pi x}{l}+2\sum a_n a_m \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$ は (7) である．尙 (8) の關係をも用ふる時は

$$\frac{\partial}{\partial a_n}\int_0^l I(x)\left\{\sum a_n^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4\sin^2\frac{n\pi x}{l}+2\sum a_n a_m n^2m^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\right\}dx$$
$$-k\frac{\partial}{\partial a_n}\int_0^l\sum a_n^2\sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx=0$$

ここに

$$k=\frac{4n_0^2\pi^2 q}{Eg}$$

從つて

$$\int_0^l I(x)\left\{a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4\sin^2\frac{n\pi x}{l}+\sum a_m n^2m^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\right\}dx$$
$$-k\int_0^l a_n\sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

このやうな式が a の數だけえられ，a が同時に零ならざる條件より振動數 n_0 をきめるので，(11) 式と同樣である．

2. Galerkin 法

桁の橫振動の最大撓み曲線の微分方程式は

$$\frac{d^2}{dx^2}\left\{I(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right\}-ky=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

$$k=\frac{4n_0^2\pi^2 q}{Eg}$$

である．(20) 式は又

$$I(x)\frac{d^4y}{dx^4}+2\frac{d\,I(x)}{dx}\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2 I(x)}{dx^2}\frac{d^2y}{dx^2}-dy=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (21)$$

この左邊に (2), (5) 及び

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\cdots-a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^3\cos\frac{n\pi x}{l}-\cdots-a_m\left(\frac{m\pi}{l}\right)^3\cos\frac{m\pi x}{l}-\quad\cdots\cdots (22)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\cdots+a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4\sin\frac{n\pi x}{l}+\cdots+a_m\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4\sin\frac{m\pi x}{l}+\quad\cdots\cdots (23)$$

を代入し誤差函數 $\varepsilon(x)$ を作り

$$\int_0^l \varepsilon(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=0$$

なる Galerkin 式を求むれば

$$\begin{aligned}&\int_0^l I(x)\left\{a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4\sin^2\frac{n\pi x}{l}+\sum a_m\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}dx\\&-\int_0^l 2\frac{d\,I(x)}{dx}\left\{a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^3\cos\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}+\sum a_m\left(\frac{m\pi}{l}\right)^3\cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}dx\\&-\int_0^l\frac{d^2I(x)}{dx^2}\left\{a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\sin^2\frac{n\pi x}{l}+\sum a_m\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}dx\\&-k\int_0^l a_n\sin^2\frac{n\pi x}{l}dx=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (24)\end{aligned}$$

この式は挫屈問題の場合とことなり Energy 法により求めた (19) に比し相當複雑な形となつてゐる. 然しながら $I(x)$ の一般形は

$$I(x)=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (25)$$

にて表はすことが出來, この場合には

$$\begin{aligned}&-\int_0^l 2\frac{dI(x)}{dx}a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^3\cos\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx\\&\qquad-\int_0^l\frac{d^2I(x)}{dx^2}a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\sin^2\frac{n\pi x}{l}dx=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots (26)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^l I(x)\sum a_m\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx-\int_0^l 2\frac{dI(x)}{dx}\sum a_m\left(\frac{m\pi}{l}\right)^3\cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx\\&\quad-\int_0^l\frac{dI(x)}{dx^2}\sum a_m\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx\\&\qquad=\int_0^l I(x)\sum a_m n^2m^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx\quad\cdots\cdots (27)\end{aligned}$$

なる關係があること次の如くである. 今 $I(x)$ として (25) 式の第四項迄とる時

$$I(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

$$\frac{d\,I(x)}{dx} = b + 2cx + 3dx^2 \quad , \qquad \frac{d^2\,I(x)}{dx^2} = 2c + 6dx$$

$$\int_0^l 2\,\frac{d\,I(x)}{dx}\,a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^3 \cos\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$= \int_0^l 2\left(b + 2cx + 3dx^2\right)a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^3\cos\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = -\,a_n\left(n\pi\right)^2\left(\frac{c}{l} + \frac{3d}{2}\right)$$

但し

$$\int_0^l \cos\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0 \quad , \qquad \int_0^l x\cos\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = -\frac{l^2}{4n\pi}$$

$$\int_0^l x^2\cos\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = -\frac{l^3}{4n\pi}$$

$$\int_0^l \frac{d^2\,I(x)}{dx^2}\,a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx = \int_0^l\left(2c + 6dx\right)a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$= a_n\left(n\pi\right)^2\left(\frac{c}{l} + \frac{3d}{2}\right)$$

但し

$$\int_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{l}{2} \quad , \qquad \int_0^l x\sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{l^2}{4}$$

即ち (26) 式の關係が成立する．次に

$$\int_0^l\left(a + bx + cx^2 + dx^3\right)\sum a_m\,n^2m^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx$$

$$= \sum_{m+n\ \mathrm{even}} a_m\,\frac{\pi^2n^3m^3}{(n^2-m^2)^2}\left(\frac{4c}{l} + 6d\right)$$

$$-\sum_{m+n\ \mathrm{odd}} a_m\,\frac{\pi^2n^3m^3}{(n^2-m^2)^2}\left\{\frac{4b}{l^2} + \frac{4c}{l} + 6d - \frac{48d\,(n^2+m^2)}{\pi^2\,(n^2-m^2)^2}\right\}$$

但し

$$\int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx = 0$$

$$\int_0^l x\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx = 0 \qquad (m+n:\text{偶數})$$

$$= -\frac{l^2}{\pi^2}\,\frac{4mn}{(n^2-m^2)^2} \qquad (m+n:\text{奇數})$$

$$\int_0^l x^2 \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx = (-1)^{m+n}\frac{l^3}{\pi^2}\frac{4mn}{(n^2-m^2)^2}$$

$$\int_0^l x^3 \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx = \frac{l^4}{\pi^2}\frac{6mn}{(n^2-m^2)^2} \qquad (m+n:\text{偶數})$$

$$= -\frac{l^4}{\pi^2}\frac{6mn}{(n^2-m^2)^2} + \frac{l^4}{\pi^4}\frac{48mn(n^2+m^2)}{(n^2-m^2)^4} \qquad (m+n:\text{奇數})$$

又

$$\int_0^l \left(a+bx+cx^2+dx^3\right)\sum a_m\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 \sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$-\int_0^l 2\left(b+2cx+3dx^2\right)\sum a_m\left(\frac{m\pi}{l}\right)^3 \cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$-\int_0^l 2\left(c+3dx\right)\sum a_m\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$=\int_0^l \sum a_m\, b\left\{x\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} - 2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^3\cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}dx$$

$$+\int_0^l \sum a_m\, c\left\{x^2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} - 4x\left(\frac{m\pi}{l}\right)^3\cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right.$$

$$\left.-2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}dx$$

$$+\int_0^l \sum a_m\, d\left\{x^3\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} - 6x^2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^3\cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right.$$

$$\left.-6x\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}dx$$

$$=\sum_{m+n\ \text{even}} a_m\left\{4c\frac{\pi^2}{l}\left[\frac{nm^5}{(n^2-m^2)^2}+\frac{nm^3}{n^2-m^2}\right]+6d\pi^2\left[\frac{nm^5}{(n^2-m^2)^2}+\frac{nm^3}{n^2-m^3}\right]\right\}$$

$$-\sum_{m+n\ \text{odd}} a_m\left\{4b\frac{\pi^2}{l^2}\left[\frac{nm^5}{(n^2-m^2)^2}+\frac{nm^3}{n^2-m^3}\right]+4c\frac{\pi^2}{l}\left[\frac{nm^5}{(n^2-m^2)^2}+\frac{nm^3}{n^2-m^2}\right]\right.$$

$$\left.+6d\left[\frac{\pi^2 nm^5}{(n^2-m^2)^2}-\frac{8nm^5(n^2+m^2)}{(n^2-m^2)^4}+\frac{\pi^2 nm^3}{n^2-m^2}-\frac{4nm^3(n^2+3m^2)}{(n^2-m)^3}-\frac{4nm^3}{(n^2-m^2)^2}\right]\right\}$$

$$=\sum_{m+n\ \text{even}} a_m\frac{\pi^2 n^3 m^3}{(n^2-m^2)^2}\left(\frac{4c}{l}+6d\right)-\sum_{m+n\ \text{odd}} a_m\frac{\pi^2 n^3 m^3}{(n^2-m^2)^2}\left\{\frac{4b}{l^2}+\frac{4c}{l}+6d-\frac{48d(n^2+m^2)}{\pi^2(n^2-m^2)^2}\right\}$$

但し

$$\int_0^l \cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0 \qquad (m+n:\text{偶數})$$

$$= \frac{l}{\pi}\,\frac{2n}{n^2-m^2} \qquad (m+n:\text{奇數})$$

$$\int_0^l x\cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = -(-1)^{m+n}\frac{l^2}{\pi}\,\frac{n}{n^2-m^2}$$

$$\int_0^l x^2\cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = -\frac{l^3}{\pi}\,\frac{n}{n^2-m^2}\ , \qquad (m+n:\text{偶數})$$

$$= \frac{l^3}{\pi}\,\frac{n}{n^2-m^2} - \frac{4l^3 n(n^2+3m^2)}{\pi^3(n^2-m^2)^3}\ , \qquad (m+n:\text{奇數})$$

從つて(27)式の關係が成立することとなり，(24)式は

$$\int_0^l I(x)\left\{a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4\sin^2\frac{n\pi x}{l} + \sum a_m\, n^2m^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\right\}dx$$

$$-k\int_0^l a_n\sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (28)$$

の如く簡單になる．これ Energy 法より求めた(19)式と全く同じである．

$I(x)$ が (25) 式の第5項迄ある場合 (19) 又は (28) 式の積分を計算すれば次の如くなる．

$I(x)$ に x^4 の項迄とればまづ普通の問題にまにあふであらう．

$$a_n\left\{n^4\pi^4\left[\frac{a}{2l^3}+\frac{b}{4l^2}+\frac{c}{2l}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n^2\pi^2}\right)+\frac{d}{8}\left(1-\frac{3}{n^2\pi^2}\right)+\frac{el}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{n^2\pi^2}+\frac{3}{2n^4\pi^4}\right)\right]-\frac{kl}{2}\right\}$$

$$+\sum_{m+n\ \text{even}} a_m\frac{n^3m^3\pi^2}{(n^2-m^2)^2}\left\{\frac{4c}{l}+6d+8el\left[1-\frac{12(n^2+m^2)}{\pi^2(n^2-m^2)^2}\right]\right\}-\sum_{m+n\ \text{odd}} a_m\frac{n^3m^3\pi^2}{(n^2-m^2)^2}\left\{\frac{4b}{l^2}\right.$$

$$\left.+\frac{4c}{l}+6d\left[1-\frac{8(n^2+m^2)}{\pi^2(n^2-m^2)^2}\right]+8el\left[1-\frac{12(n^2+m^2)}{\pi^2(n^2-m^2)^2}\right]\right\}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (29)$$

挫屈荷重に關する (9) 又は (15) 式も $I(x)$ が (25) 式の一般形を有する場合，ここに計算せる結果より (29) 式に相當する式を直ちに求めることが出來る．即ち

$$a_n\left\{n^2\pi^2\left[\frac{a}{2l}+\frac{b}{4}+\frac{cl}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n^2\pi^2}\right)+\frac{dl^2}{8}\left(1-\frac{3}{n^2\pi^2}\right)+\frac{el^3}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{n^2\pi^2}+\frac{3}{2n^4\pi^4}\right)\right]-\frac{lP}{2E}\right\}$$

$$+\sum_{m+n\ \text{even}} a_m\frac{nm^3}{(n^2-m^2)^2}\left\{4cl+6dl^2+8el^3\left[1-\frac{12(n^2+m^2)}{\pi^2(n^2-m^2)^2}\right]\right\}-\sum_{m+n\ \text{odd}} a_m\frac{nm^3}{(n^2-m^2)^2}\left\{4b\right.$$

$$\left.+4cl+6dl^2\left[1-\frac{8(n^2+m^2)}{\pi^2(n^2-m^2)^2}\right]+8el^3\left[1-\frac{12(n^2+m^2)}{\pi^2(n^2-m^2)^2}\right]\right\}=0 \qquad \cdots\cdots (30)$$

先の例題に對しては，

$$a=\alpha\lambda^2\ ,\quad b=2\alpha\lambda\ ,\quad c=\alpha\ ,\quad d=0\ ,\quad \alpha=\frac{I_c}{\left(\lambda+\frac{l}{2}\right)^2}$$

である.

3. 計算例題

断面の慣性モーメントが

$$I(x)=I_0+\frac{2(I_c-I_0)}{l}x=a+bx$$

なる長さ l なる桁を例題にとる. I_0 は $x=0$ に於ける慣性モーメントである. I_c は中央に於けるものとす. (29)式に於て c 及び d を零とをいて

$$a_n\left\{n^4\pi^4\left(\frac{a}{2l^3}+\frac{b}{4l^2}\right)-\frac{kl}{2}\right\}-\sum_{m+n\ \mathrm{odd}}a_m\frac{n^3m^3\pi^2}{(n^2-m^2)^2}\left(\frac{4b}{l}\right)=0$$

又は

$$a_n\left\{\frac{n^4\pi^4}{l^2}\left(\frac{a}{l}+\frac{b}{2}\right)-kl\right\}-\frac{8b\pi^2}{l^2}\sum_{m+n\ \mathrm{odd}}a_m\frac{n^3m^3}{(n^2-m^2)^2}=0$$

元來,

$$a=I_0\quad ,\qquad b=\frac{2(I_c-I_0)}{l}$$

なるをもつて

$$\frac{a}{l}+\frac{b}{2}=\frac{I_c}{l}$$

となり從つて

$$a_n\left(n^4-\frac{l^4}{\pi^4}k\right)-\frac{16}{\pi^2}\left(1-\frac{I_0}{I_c}\right)\sum_{m+n\ \mathrm{odd}}a_m\frac{n^3m^3}{(n^2-m^2)^2}=$$

改めて

$$\frac{l^4}{\pi^4}k=\frac{4l^4}{\pi^2EI_c}\frac{q}{g}n_3^2=s\quad ,\qquad \frac{16}{\pi^2}\left(1-\frac{I_0}{I_c}\right)=u$$

とをけば

$$a_n(n^4-s)-u\sum_{m+n\ \mathrm{odd}}\frac{n^3m^3}{(n^2-m^2)^2}a_m=0$$

y の三角級數を第2迄考へて近似計算をすれば

$n=1,\ m=2$ より

$$a_1(1-s)-u\frac{1\times 8}{(1-4)^2}a_2=0$$

$n=2,\ m=1$ より

$$a_2\,(16-s) - u\,\frac{8\times 1}{(4-1)^2}\,a_1 = 0$$

又は

$$a_1\,(1-s) - \frac{8}{9}\,u\,a_2 = 0$$

及び

$$-\frac{8}{9}\,u\,a_1 + a_2\,(16-s) = 0$$

之より

$$\begin{vmatrix} 1-s & -\dfrac{8}{9}u \\ -\dfrac{8}{9}u & 16-s \end{vmatrix} = 0$$

從つて

$$s^2 - 17s + 16 - \frac{64}{81}u^2 = 0$$

今

$$I_c = 1{,}320{,}000\ \mathrm{cm}^4\ ,\quad I_0 = 745{,}000\ \mathrm{cm}^4\ ,\quad l = 1344\ \mathrm{cm}\ ,$$

$$q = 11.6\ \mathrm{kg/cm}\ ,\quad E = 2.1\times 10^6\ \mathrm{kg/cm^2}$$

とすれば

$$u = 0.705$$

$$s^2 - 17s + 15.607 = 0$$

$$s = 0.975$$

故に

$$n_0 = \sqrt{0.975}\,\frac{\pi}{2l^2}\sqrt{\frac{EI_c g}{q}} = 12.98/\mathrm{sec}$$

こころみに y の三角級數を第3項迄とるも，第4項迄とるも $n_0=12.97$ にして，第2項迄にて充分の精度を有することを知る.

一定斷面の時は，更に $b=0,\ a=I_0$ にして

$$a_n\left\{\frac{an^4\pi^4}{l^3} - kl\right\} = 0$$

$$k = \frac{I_0 n^4 \pi^4}{l^4}$$

$$n_0 = \frac{\pi}{2l^2} \sqrt{\frac{EI_0 g}{q}} \qquad (n = 1)$$

第4節　吊橋の補剛桁の撓み曲線

1. Energy 法

對稱形の吊橋の索條が死荷重 g をすべて負擔し，補剛桁は活荷重 p によりて始めて働き補剛桁も索條も更に下る．この場合補剛桁に働く力は活荷重 p と吊材がこれを引きあぐる力 q である．この q は吊材の變形を無視する時

$$q = \beta g - H_g (1 + \beta) \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \cdots\cdots (31)$$

なることは吊橋の Deflection theory の敎ふるところなり．ここに

$H_g =$ 死荷重 g による索條の水平張力

$\beta = \frac{H}{H_g}$

$H =$ 活荷重 p による索條の水平張力

$y =$ 補剛桁の撓み

y を (2) の三角級數で表はす．この級數は補剛桁の境界條件を滿足せしめる．

a_n の微小變化 δa_n による y の變化は

$$\delta_y = \delta a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

にして，この場合荷重 p 及び q のなす仕事は

$$\delta W = \int_u^v p\, dx\, \delta y - \int_0^l q\, dx\, \delta y$$

$$= \int_u^v p\, \delta a_n \sin \frac{n\pi x}{l} dx - \int_0^l \left\{ \beta g - H_g (1 + \beta) \frac{d^2 y}{dx^2} \right\} \delta a_n \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$= p\, \delta a_n \int_u^v \sin \frac{n\pi x}{l} dx - \beta g\, \delta a_n \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$- H_g (1 + \beta)\, \delta a_n \int_0^l \left\{ a_n \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{l} + \sum a_m \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \right\} dx$$

$$= p\, \delta a_n \int_u^v \sin \frac{n\pi x}{l} dx - \beta g\, \delta a_n \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$- H_g (1 + \beta)\, \delta a_n \int_0^l a_n \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx \quad \cdots\cdots (32)$$

但し活荷重 p は $x=u$ から $x=v$ の範圍にあるものとする．次に y なる撓みによる桁の曲げの内働は

$$V = \frac{EI}{2}\int_0^l\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{EI}{2}\int_0^l\left\{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4\sum a_n^2\sin^2\frac{n\pi x}{l} + 2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\sum a_n a_m n^2m^2\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\right\}dx$$

a_n の微小變化による內働の變化は

$$\delta V = EI\,\delta a_n\int_0^l a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4\sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (33)$$

問題を簡單にするため斷面の慣性モーメントは一定とせり．$\delta W=\delta V$ より

$$EI\int_0^l a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4\sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx + H_g(1+\beta)\int_0^l a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$-\int_u^v p\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx + \beta g\int_0^l\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0 \qquad (34)$$

これより a_n を決定する．

2. Galerkin 法

補剛桁の撓みに關する微分方程式は

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = p - q \qquad (35)$$

從つて

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} - H_g(1+\beta)\frac{d^2y}{dx^2} - p + \beta g = 0 \qquad (36)$$

誤差函數は

$$\varepsilon(x) = EI\left\{\cdots + a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4\sin\frac{n\pi x}{l} + \cdots + a_m\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4\sin\frac{m\pi x}{l} + \cdots\right\}$$

$$+ H_g(1+\beta)\left\{\cdots + a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\sin\frac{n\pi x}{l} + \cdots a_m\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\sin\frac{m\pi x}{l} + \cdots\right\} - p + \beta g$$

從つて

$$\int_0^l\varepsilon(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0$$

より

$$EI\int_0^l a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4\sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx + H_g(1+\beta)\int_0^l a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$-\int_u^v p\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx + \beta g\int_0^l\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0 \qquad (37)$$

これは(34)式であり，Galerkin 法ではかく簡單に求むることが出來た．もつともこれは補剛桁の斷面が一定の場合を取扱つたためである．

尙かかる斷面一定の場合には，誤差函數の自乘も最小ならしむる如く a をえらぶも同結果をうるものである．即ち

$$\frac{\partial}{\partial a_n}\int_0^l \varepsilon(x)^2\,dx = 0$$

又は

$$\int_0^l 2\varepsilon(x)\frac{\partial\,\varepsilon(x)}{\partial a_n}\,dx = 0 \qquad \cdots\cdots (38)$$

ここに

$$\frac{\partial\,\varepsilon(x)}{\partial a_n} = \left\{EI\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 + H_g(1+\beta)\right\}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

從つて(28)は

$$\int_0^l 2\,\varepsilon(x)\left\{EI\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 + H_g(1+\beta)\right\}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0$$

I は常數とせる故

$$\int_0^l \varepsilon(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0$$

となり Galerkin 式と一致する．(37)式は

$$\int_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{l}{2}\quad,\qquad \int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{l}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

$$\int_u^v \sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{l}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi u}{l} - \cos\frac{n\pi v}{l}\right)$$

なる故

$$a_n = \frac{2l^4\left\{p\left(\cos\frac{n\pi u}{l} - \cos\frac{n\pi v}{l}\right) - \beta g\left(1-\cos n\pi\right)\right\}}{EI\pi^5\left\{n^5 + n^3\alpha(1+\beta)\right\}} \qquad \cdots\cdots (39)$$

ここに

$$\alpha = \frac{H_g}{EI\pi^2}$$

上式に於ては p は等布荷重とせり．滿載等布荷重の場合は $u=0,\ v=l$ にして

$$a_n = \frac{4l^4}{EI\pi^5}\,\frac{p-\beta g}{n^5+n^3\alpha(1+\beta)} \qquad (n:\text{奇數})$$

$$= 0 \qquad (n:\text{偶數})$$

從つて

$$y = \frac{4l^4}{EI\pi^5}\sum_{1,3,5\dots}^{\infty}\frac{p-\beta g}{n^5+n^3\alpha(1+\beta)}\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad \cdots\cdots (40)$$

單荷重 P の場合はまづ $\frac{P}{\xi}$ の等布荷重が $x=u\sim u+\xi$ 間に配布されるものとして

$$a_n = \mu\left\{\frac{P}{\xi}\left[\cos\frac{n\pi u}{l}-\cos\frac{n\pi(u+\xi)}{l}\right]-2\beta g(1-\cos n\pi)\right\}$$

ここに

$$\mu = \frac{2l^4}{EI\pi^5\{n^5+n^3\alpha(1+\beta)\}}$$

本式に於いて直ちに $\xi=0$ とする時は P の因子は不定形となる故微係數の比をとり，之に $\xi=0$ とをき

$$a_n = \mu\left\{P\frac{n\pi}{l}\sin\frac{n\pi u}{l}-2\beta g(1-\cos n\pi)\right\} \qquad \cdots\cdots (41)$$

以上に於いて β は未定なる故先づ之を假定して計算し，之に對する p を求め β を補正し，更に計算を繰返すのであるが，之に關してはここには略する．

單純桁の場合は以上の式に於いて α 及び β を零とをいてもとまる．滿載等布荷重の場合は

$$y = \frac{4pl^4}{EI\pi^5}\sum_{1,3,5\dots}^{\infty}\frac{1}{n_5}\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad \cdots\cdots (42)$$

中央の撓みは

$$y_{x=\frac{l}{2}} = \frac{5pl^4}{382,5EI}\left(1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}\cdots\cdots\right)$$

單荷重の場合は

$$y = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\sum_{1,3,5\dots}^{\infty}\frac{1}{n^4}\sin\frac{n\pi u}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad \cdots\cdots (43)$$

中央單荷重による中央の撓みは

$$y_{x=u=\frac{l}{2}} = \frac{Pl^3}{48.70\,EI}\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\cdots\right)$$

第5節　周邊單純支持の矩形版

a 及び b なる幅及び長さを有する四邊單純支持の矩形版が分布荷重 p をになふ場合，撓面の微分方程式は

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)-p=0 \quad\cdots\cdots (44)$$

である．ここに

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$h=$ 版厚　，　$\nu=$ ポアソン比

撓面を次の二重三角級數で表はす．

$$w=\sum\sum a_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \quad\cdots\cdots (45)$$

この級數は $x=0$, $x=a$ 及び $y=0$, $y=b$ に對して零となり境界條件を滿足する．(45) を (44) の左邊に代入し誤差函數をつくれば，

$$\varepsilon(x,y)=D\pi^4\sum\sum a_{mn}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}-p$$

Galerkin 式

$$\int_0^a\int_0^b \varepsilon(x,y)\,Y_{mn}(x,y)\,dx\,dy=0$$

に於いて

$$Y_{mn}(x,y)=\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

なる故

$$a_{mn}D\pi^4\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2\int_0^a\int_0^b\sin^2\frac{m\pi x}{a}\sin^2\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy$$
$$-\int_0^a\int_0^b p\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy=0 \quad\cdots\cdots (46)$$

この式は Energy 法からも得られるが，かくのごとく直接的ではない．

(46) 式中 p を滿載等布荷重とすれば

$$\int_0^a\int_0^b\sin^2\frac{m\pi x}{a}\sin^2\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy=\frac{ab}{4}$$

$$\int_0^a\int_0^b p\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy=p\frac{4ab}{mn\pi^2} \qquad (m, n：奇數)$$

$$=0 \qquad (m, n：偶數)$$

故に

$$a_{mn} = \frac{16\,p}{\pi^6 Dmn\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)} \qquad m, n = 1, 3, 5 \cdots\cdots$$

$$w = \frac{16\,p}{\pi^6 D}\sum_{m=1,3,5\ldots}^{\infty}\sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{1}{mn\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (47)$$

この問題に於ても D が常數なる故，誤差函數 $\varepsilon(x, y)$ の自乘を最小ならしむるごとくするも亦全く Galerkin 法と同一となる．部分等布荷重，單荷重に對しても前節同様に取扱ふことが出來る．

第6節　結　　言

以上各種の應力問題に於ては撓曲線を $\sum \sin\frac{n\pi x}{l}$ にて表はしうる場合をのべたが $\sum \cos\frac{n\pi x}{l}$ の場合も同様であり，又 $\sum\left(1-\cos\frac{n\pi x}{l}\right)$ の如き場合も坐標原點を適當にえらびて $\sum \sin\frac{n\pi x}{l}$ 又は $\sum \cos\frac{n\pi x}{l}$ になほすことが出來る．撓み曲線をかく三角級數に假定する場合，近年力學問題への優先的應用をとなへられるにいたつた Galerkin 法は，全く Ritz 法を取り入れた Energy 法と同結果を與へるものでその計算過程も途中から全く同じになるものである．

Energy 法が撓み曲線の微分方程式に無關係に力學的に解くに比し，Galerkin 法は直接微分方程式から之を數學的に取扱ふことを考へるときこのことは，まことに興味のあることである．

更に誤差函數を自乘して之を最小ならしむる方法も，斷面一定の部材に對しては Galerkin 法と全く一致することも注目すべきである．

尚ここに誘導せる (28) 式の關係は Galerkin 法による固有振動數の計算を一層容易にせしめるもので (24) の式より始める必要はない．更に (29) 及び (30) の兩式は $I(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ なる變斷面部材の固有値を直接計算するの便に資せるものである．

(昭和 23 年 3 月 25 日)