



Title	インボリュート歯車の歯の負荷及び應力の變動に就て
Author(s)	土肥, 修; Doi, Osamu
Citation	北海道大學工學部彙報, 1, 35-70
Issue Date	1948-12-20
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40443
Type	departmental bulletin paper
File Information	1_35-70.pdf



インボリュート歯車の歯の負荷 及び應力の變動に就て

土 肥 修

On the Load and Stress Cycles in the Involute Gear Teeth

Osamu Doi

目 次

概 要 (欧文)	35
第 I 章 序 論	37
第 II 章 歯 の 變 形	38
§ 1. P による曲げの撓み δ_1 , 及び撓曲線の傾斜 ϕ_1	39
§ 2. P による剪断の撓み δ_2	40
§ 3. Q なる壓縮力による縦の縮み ϵ	40
§ 4. Q によつて生ずる曲げによる横の撓み δ_3 , 及び その撓曲線の傾斜 ϕ_3	41
§ 5. 表面の凹み變形	41
第 III 章 嚙合率と嚙合角及び接點の位置の關係	45
§ 1. 嚙 合 率	46
§ 2. 接點の位置と齒の位置, 嚙合角	48
§ 3. 接觸點の半径 ρ 及び高さ ϵ の計算	51
第 IV 章 齒の變形による嚙合状態の變化	52
§ 1. 齒の變形と嚙合角の變化	52
§ 2. 齒形の旋廻の變位と曲率中心の移動	54
§ 3. 曲率圓の移動と接觸のための變位	57
§ 4. 齒の變形と齒の接觸	59
第 V 章 齒の剛性と Load Cycle	62
第 VI 章 Stress Cycle	64
第 VII 章 計算例及び結言	65
引用文献及び脚註	70

Abstract

Formerly a few researchers have touched the problems concerning the load cycle and the stress cycle in gear teeth. In the case of multiple-contact gear teeth, the load is divided unequally among teeth contacting at the same time. In spite of no spacing error, the proportion of load division

for each tooth changes during contacting interval, so that the change of it draws a cycle.

Furthermore, the stress on the root of the tooth is greater than that of any other part and also changes during contact. This change can also be calculated on the assumption that there is no effect of the stress concentration in the fillet points.

Mr. Baud and Peterson have introduced the methods for analysing the load and stress cycles in gear teeth and have made tests photo-elastically. As we detected some doubtful points in their theories, we made research upon the problems from our own standpoint, and completed more accurate methods for analysing these cycles and improved theirs. Then we took a few examples, comparing our results to theirs.

Now we will enumerate a few important differences.

1. To calculate the deformation of teeth, they considered only circumferential component of the load, neglecting radial one. As we take the latter into consideration, we are convinced of an irrationality of neglecting it.

2. Their considerations are restricted within following 3 kinds of deformations; bending deflection, shearing deflection and deformation due to depression. The former 2 of them are the circumferential ones and the latter is measured in the direction of the line of action.

But when we take the differences of the states of deformation between bending and shearing into consideration, that is to say, while in the shearing deformation, the lines that have cut the neutral axis at right angles should keep their directions nearly constant and remain parallel to each other after deformation, on the other hand, in the bending deformation, these right angles should remain unchanged (so that these lines become unparallel to each other), we find that in bending it is not sufficient to calculate the circumferential deformation only but that we can not neglect the effects of changing the directions of the lines that have been at right angles to the neutral axis and parallel to each other.

This fact has effects in the first order upon the change of contacting state of gear teeth, so that we calculate these effects and add them upon the above-mentioned 3 factors.

3. If we assume that the curvature of profiles of teeth near the contact points remain constant after deformation, we can compare the state of transformation of teeth to the problems of osculation of circles whose radius is equal to that of curvature of each tooth. Then we calculate the angles of advance of driver's teeth and putting them equal, we could gain equations to determine the state of load division.

4. Concerning the depression of tooth surface by the load, they used the equation given by Timoshenko and Baud, applying Hertz's theory. But that equation is not linear to the pressure as they say. We attained to another formula that is perfectly proportional to the pressure. It makes our later analysis very easy to adopt this linear equation. Furthermore, their equation seems to overestimate the value of depression in the case of gear teeth.

5. To determine stress cycles at points on the roots of teeth, the radial component is also taken into consideration. The results obtained can explain the different stresses between 2 points, compression side and tension side. This difference has been recognized under photoelastic experi-

ments done by Baud and Peterson. The results of our research are shown in from Fig. 8 to Fig. 10.

These examples are as following:

No.	Number of Teeth	Type	Pressure Angle	Contact Ratio
1.	35-35	Proportional Center Distance	14.5°	2.004
2.	35-35	„	20	1.687
3.	35-35	Full Mark Gear	14.5	1.898
4.	100-100	Proportional Center Distance	14.5	2.324

In the load cycle, our results do not differ so largely from these of Baud and Peterson. It is due to the fact that, though the new factors we have taken reach considerably large amount in absolute value, they cancel algebraically each other for the most part, and can hardly make any large alteration in the load cycle. But in the stress cycle, the difference of the stress between tension and compression side are found evidently with our method. It is because that we took the compressive stress in the root of the tooth into consideration, and we can explain the results obtained experimentally by Baud and Peterson.

第I章 序 論

歯車の歯の負荷變動及び應力變動に關する問題は、二、三の人がとりあげてゐる^{1),2)}。齒が2枚又は3枚と云ふ様に、多數齒の同時嚙合の狀態に於て動力を傳へる場合には、廻轉力は、嚙合つてゐる各々の齒に平等には分擔せしめられない。即ち接觸してゐる齒の力の作用點は夫々の齒によつて異り、又力の作用線の方向は、常に各々の齒面に垂直なので、齒の中立線となす角は皆異つて居るため、夫々の齒の彈性變形は異つた狀態にある。従つて、齒形がたとへ完全なものであつても、同時に嚙合ふ齒に對して各々の齒の負ふ荷の割合は一樣ではなくなる。云ひかへれば、齒の嚙合つてゐる位置によつて、荷の割合がちがふのである。

齒車の設計に際して、嚙合率を如何にとるかが重要な問題となる理由はここにあり、Baud及びPeterson氏はこの問題について論じ、齒が接觸をつづける間に、荷の割合 (Load division factor) が變化する有様、即ち Load cycle を描く方法を簡單にのべてゐる^{1),2)}。著者は、齒車の嚙合に關する問題を、別箇の立場から考察するつもりで研究をはじめ、Load cycle を計算する方法を求めたのであるが、前記の論文を知るに及び、先人の方法に二、三疑問があり、且又嚴密性を缺いてゐる事に氣づいたので、ここに著者の行つた解析法を第一報として發表する。

この論文で、Baud及びPeterson氏の方法と異なる所は主として次の諸點である。

- 1) 齒の變形の計算にあつては、多くの要素を綜合的に考慮した。
- 2) 齒の表面の凹みの計算には新な式を導入した³⁾。
- 3) 齒の變形から、齒の接觸の理論への展開において、齒の梁としての撓みの外に、曲り即ち齒形の旋廻による變形を考へ、嚴密な考慮にもとづいて Load division を決定した。

詳細は本文と引用の文献との比較によつて明かである。かくして求めた結果は、Baud 及び Peterson 氏のもの、大差のない事がわかつた。その理由としては、1) に考慮した多くの變形の要素が、3) の嚴密な考察によつて、結果に於て互に相殺的な効果を及ぼした事が考へられる。

次に Stress cycle は齒本の縁における應力集中の度を考慮せず、垂直應力のみについて計算した。此の計算に於ては、齒壓の、齒の中立線方向の成分をも考へた爲に、壓縮側の應力が、引張側の應力よりも高くあらはれたが、之は Baud 及び Peterson 氏が行つた光弾性による實驗結果¹⁾ と同じ傾向である。兩氏の解析には、中立軸方向の成分を考へてないため、此の説明はつかぬが¹⁾、著者の方法によれば、容易に豫想される所である。

第II章 齒の變形

インポリュート齒形の齒について、そのまま變形を計算する事は解析的に複雑である。故に、齒の變形を考へる場合に、先づ、Timoshenko⁴⁾ の例にならひ、梯形の齒と近似して行ふ。

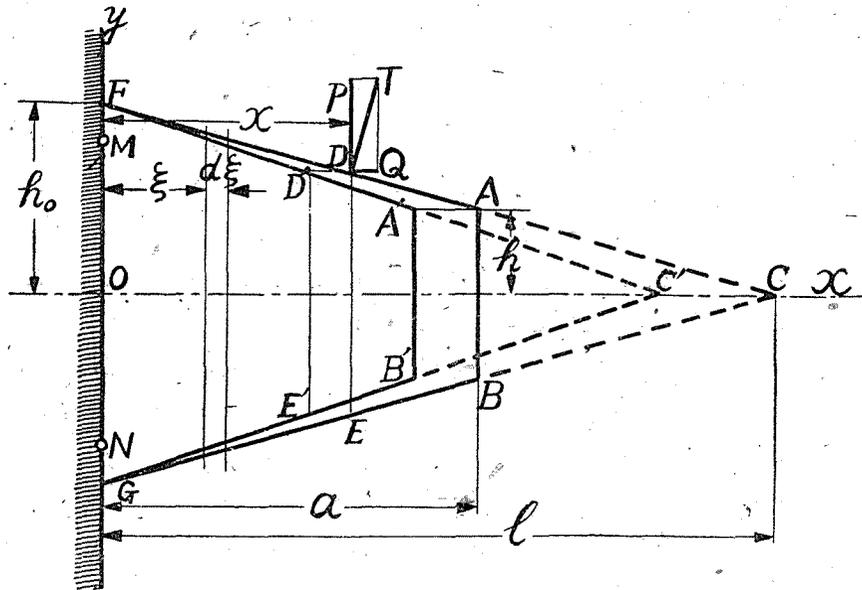


Fig. 1.

Fig. 1. は等脚梯形齒形の縦断面 $ABGF$ を示す。齒は單位巾について考へ、之を單位巾の梁として取扱ふ。 T なる單位巾あたりの荷重が、齒の中立軸に直角な方向に對し φ なる角をなす方向に作用したとして、之を、中立線方向(縦方向)成分 Q と中立線に直角な方向(横方向)成分 P に分つ。故に次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} P &= T \cos \varphi \\ Q &= T \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

§ 1. P による曲げの撓み $\delta_{1\xi}$, 及び撓曲線の傾斜 $\phi_{1\xi}$

Fig. 1. に於て

$2h = \overline{AB}$ = 齒先の齒厚

$2h_0 = \overline{FG}$ = 齒本の齒厚

a = 齒の高さ

$l = \overline{OC}$ = 側線の交點迄の高さ

ξ = 齒本より, 軸心上の考へる點をとほる横断面までの距離

x = 荷重の作用點迄の距離

E = 齒の材料のヤング係數

I = ξ 断面における断面二次モーメント

2η = ξ 断面における厚さ

$2y$ = x 断面における厚さ

M = ξ における曲げモーメント

とすれば, 原点 O を齒本にとると, 側線の方程式は, AF に対して

$$\eta = h_0 \left(1 - \frac{\xi}{l} \right)$$

$\delta_{1\xi}$ = ξ 断面上の點の P による曲げの横方向の撓み

$\phi_{1\xi}$ = ξ に於ける P による曲げの撓曲線の傾斜

とすれば

$$\frac{d^2 \delta_{1\xi}}{d\xi^2} = \frac{M}{EI}$$

且, $M = P(x - \xi)$

$$I = \frac{(2\eta)^3}{12} = \frac{2}{3} h_0^3 \left(1 - \frac{\xi}{l} \right)^3 = \frac{2h_0^3}{3l^3} (l - \xi)^3$$

であるから, $\delta_{1\xi}$ の満足する方程式は

$$\frac{d^2 \delta_{1\xi}}{d\xi^2} = \frac{3Pl^3}{2Eh_0^3} \frac{x - \xi}{(l - \xi)^3}$$

齒本に於て rigid といふ條件によつて之を解くならば, ξ 點における彈性線の撓み及び傾斜は次の式で與へられる.

$$\phi_{1\xi} = \frac{3Pl^3}{2Eh_0^3} \left[\frac{1}{2} (x - \xi) (l - \xi)^{-2} + \frac{1}{2} (l - \xi)^{-1} - \frac{1}{2l} - \frac{1}{2l} \left(\frac{x}{l} \right) \right]$$

$$\delta_{1\xi} = \frac{3Pl^3}{2Eh_0^3} \left[\frac{1}{2} (x - \xi) (l - \xi)^{-1} - \log \left(1 - \frac{\xi}{l} \right) - \frac{x}{l} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right]$$

$\xi = x$ において作用点における撓み δ_1 及び撓曲線の傾斜 ϕ_1 を求めると

$$\phi_1 = \frac{3Pl^2}{4Eh_0^3} \left[(1-\zeta)^{-1} - 1 - \zeta \right] \dots\dots\dots (2)$$

$$\delta_1 = \frac{3Pl^3}{2Eh_0^3} \left[-\log(1-\zeta) - \zeta - \frac{1}{2}\zeta^2 \right] \dots\dots\dots (3)$$

但し

$$\zeta = \frac{x}{l}$$

とする。

§ 2. P による剪断の撓み δ_2

x 断面に P なる横荷重即ち剪断力がある時の、その点の撓みの、剪断力によつて生ずる項を求める。

G = 材料の剛性率

m = ポアソン数

とおくと、計算によつて

$$\delta_2 = \frac{3P}{5G} \int_0^x \eta^{-1} d\xi = \frac{3P}{5Gh_0} \int_0^x \left(1 - \frac{\xi}{l}\right)^{-1} d\xi$$

を得るから

$$\delta_2 = -\frac{3Pl}{5Gh_0} \log\left(1 - \frac{x}{l}\right) = -\frac{3Pl}{5Gh_0} \log(1-\zeta) \dots\dots\dots (4)$$

$$G = \frac{mE}{2(m+1)}$$

を代入すれば

$$\delta_2 = -\frac{6Pl}{5Eh_0} \frac{m+1}{m} \log(1-\zeta) \dots\dots\dots (5)$$

§ 3. Q なる圧縮力による縦の縮み ϵ

Q なる圧縮力によつて、単位巾の梁の縮む量 ϵ は次の様にして求まる。

A_ξ = ξ 断面における梁の断面積

q_ξ = ξ 断面における圧縮応力

とすれば

$$q_\xi = \frac{Q}{A_\xi} = \frac{Q}{2h_0 \left(1 - \frac{\xi}{l}\right)}$$

$d\xi$ なる厚さの部分は Q によつて

$$\frac{q\xi}{E} d\xi = \frac{Qd\xi}{2Eh_0 \left(1 - \frac{\xi}{l}\right)}$$

だけ縮む。故に、 Q によつて x 断面の移動する距離は

$$\epsilon = \int_0^x \frac{q\xi}{E} d\xi = \frac{Q}{2Eh_0} \int_0^x \frac{d\xi}{\left(1 - \frac{\xi}{l}\right)} = -\frac{Ql}{2Eh_0} \left| \log \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) \right|_0^x$$

故に

$$\epsilon = -\frac{Ql}{2Eh_0} \log \left(1 - \frac{x}{l}\right) = -\frac{Ql}{2Eh_0} \log (1 - \zeta) \dots\dots\dots (6)$$

§ 4. Q によつて生ずる曲げによる横の撓み δ_3 , 及びその撓曲線の傾斜 ϕ_3

再び Fig. 1 に於て、 Q は偏心荷重なる故に、 T の横成分 P による曲げの外に、縦の成分 Q によつて曲げモーメントが生ずる。 OC 上、 ξ なる点における曲げモーメントは

$$M = -Q \cdot y$$

ξ なる点における δ_3 , ϕ_3 の値を夫々 $\delta_{3\xi}$, $\phi_{3\xi}$ とすれば

$$\frac{d^2 \delta_{3\xi}}{d\xi^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{3Q \cdot y}{2Eh_0^3} \left(1 - \frac{\xi}{l}\right)^{-3} = -\frac{3Qyl^3}{2Eh_0^3} \left(l - \xi\right)^{-3}$$

前と同様、歯本にて固定されてゐると考へるならば、之をといて、

$$\begin{aligned} \phi_{3\xi} &= \frac{3Qyl}{4Eh_0^3} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\xi}{l}\right)^{-2} \right\} \\ \delta_{3\xi} &= -\frac{3Qyl}{4Eh_0^3} \left\{ (l - \xi)^{-1} - l^{-2} \cdot \xi - l^{-1} \right\} \\ y &= h_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right) \end{aligned}$$

を入れ、且 $\xi = x$ における値を計算すると

$$\phi_3 = -\frac{3Ql}{4Eh_0^2} \left\{ \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{-1} - 1 + \frac{x}{l} \right\} = -\frac{3Ql}{4Eh_0^2} \left\{ (1 - \zeta)^{-1} - 1 + \zeta \right\} \dots (7)$$

$$\delta_3 = -\frac{3Ql^2}{4Eh_0^2} \left(\frac{x}{l}\right)^2 = -\frac{3Ql^2}{4Eh_0^2} \cdot \zeta^2 \dots\dots\dots (8)$$

§ 5. 歯面の凹み變形

相噛合ふ2つの歯形が互ひに接し、單位巾の歯面に直角にはたらく歯面壓力 T をうける場合の、歯形の凹みによる變形を計算する。インボリュート歯形ならば、 T の方向は兩歯面に垂直であり、

作用線の方角と一致し、且つ、齒面の曲率中心は、2つの齒車の基圓への共通切線の接點、即ち干涉點に合致する。

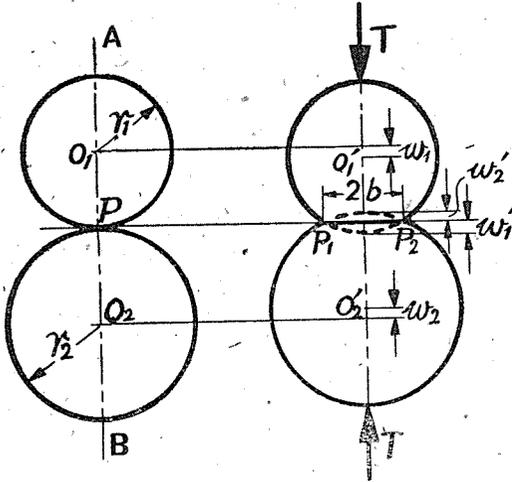


Fig. 2a

Fig. 2b

従つて、インボリュート齒形を有する齒の T による凹みを考へるには、その接觸點における2の齒形曲線の曲率半徑に等しい半徑をもつ2つの圓筒 O_1, O_2 を、その母線を平行に接觸せしめ、その中心線を含む平面内に於て母線(又は中心線)に垂直に壓縮する場合の、接觸母線の附近の兩圓筒の凹み變形を考へればよい。

Fig. 2a の如く、 O_1, O_2 を中心とする2つの圓筒を、 P 點をとほる母線にて接せしめ、 O_1, O_2 平面上の點 A, B に T なる荷重をかける。

但 $T =$ 圓筒の長さ方向に一様に分布する、單位長さあたりの荷重

荷重の結果、圓筒は歪んで、Fig. 2b の如くなつたとする。ここに、

$b =$ 2つの圓筒の變形せる接觸平面の中の $1/2$

$r_1, r_2 =$ 接觸せる2圓筒の半徑

$m_1, m_2 =$ 兩圓筒の材料のポアソン數

$E_1, E_2 =$ 兩圓筒の材料のヤング係數

今、凹みの量を求めるのに、次の2つの考へ方に分けて行ふ。

1°. 齒形の凹みを與へる Timoshenko の式^{1),2),4),6),7)}

Fig. 3a の如く、圓筒 O を平面(剛體)間にはさみ、 T (單位長さあたりの壓縮力)なる力でおした場合、中心 O と平面との距離 OA 、即ち圓筒半徑は歪んで OA' となつたとする。

この場合、荷重前(即ち歪む前)は、圓筒と平面とは1點 A (即ち A をとほる母線)にて接してゐたものが、荷重により、巾 $2b$ の面接觸となる。Hertz の式を用ひ、中心と接觸點との距離の T による變形の量を計算した Föppl に従へば、 r/b の大なる値に對して、

$$w = 2 \frac{m^2 - 1}{m^2 E} \frac{T}{\pi} \left(\frac{1}{3} + \log \frac{2r}{b} \right)^{6/5}$$

但し $w =$ 中心と接觸點との距離の短縮の量

とする。

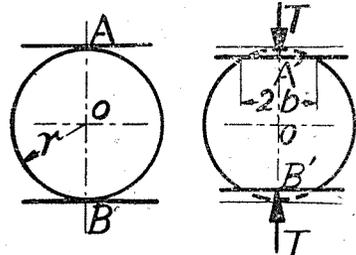


Fig. 3a

Fig. 3b

この式を利用して、2つの圓筒をおしつけた場合の、兩圓筒の中心距離の短縮は、圓筒 O_1, O_2

の各々について上式が成立すると考へると、次の様に表はされる。

$w_1, w_2 =$ 兩圓筒の半徑 O_1P, O_2P の變形の量

とすれば、

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= 2 \frac{m_1^2 - 1}{m_1^2 E_1} \frac{T}{\pi} \left(\frac{1}{3} + \log \frac{2r_1}{b} \right) \\ w_2 &= 2 \frac{m_2^2 - 1}{m_2^2 E_2} \frac{T}{\pi} \left(\frac{1}{3} + \log \frac{2r_2}{b} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

故に、兩圓筒の中心の近づき w は

$$w = w_1 + w_2$$

然るに、接觸面の中 $2b$ の b の値は

$$b^2 = \frac{4T}{\pi} \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2} \left(\frac{m_1^2 - 1}{m_1^2 E_1} + \frac{m_2^2 - 1}{m_2^2 E_2} \right)^{8)}$$

故に

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= 2 \frac{m_1^2 - 1}{m_1^2 E_1} \cdot \frac{T}{\pi} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \log \left\{ \pi r_1 \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right) \right\} - \frac{1}{2} \log T \cdot \left(\frac{m_1^2 - 1}{m_1^2 E_1} + \frac{m_2^2 - 1}{m_2^2 E_2} \right) \right] \\ w_2 &= 2 \frac{m_2^2 - 1}{m_2^2 E_2} \cdot \frac{T}{\pi} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \log \left\{ \pi r_2 \left(1 + \frac{r_2}{r_1} \right) \right\} - \frac{1}{2} \log T \cdot \left(\frac{m_1^2 - 1}{m_1^2 E_1} + \frac{m_2^2 - 1}{m_2^2 E_2} \right) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots (9a)$$

で表される。

今、2つの圓筒が同じ材料から成ると考へるならば、

$$m_1 = m_2 = m \quad , \quad E_1 = E_2 = E$$

として

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= 2 \frac{m^2 - 1}{m^2 E} \frac{T}{\pi} \left(\frac{1}{3} + \log \frac{2r_1}{b} \right) \\ w_2 &= 2 \frac{m^2 - 1}{m^2 E} \frac{T}{\pi} \left(\frac{1}{3} + \log \frac{2r_2}{b} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

故に

$$\begin{aligned} w &= 2 \frac{m^2 - 1}{m^2 E} \frac{T}{\pi} \left(\frac{2}{3} + \log \frac{2r_1}{b} + \log \frac{2r_2}{b} \right) \\ &= 2 \frac{m^2 - 1}{m^2 E} \frac{T}{\pi} \left(\frac{2}{3} + \log \frac{4r_1 r_2}{b^2} \right)^{1), 2), 4)} \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

然るに、

$$\frac{4r_1 r_2}{b^2} = \frac{E \pi m^2}{2T(m^2 - 1)} (r_1 + r_2)$$

故に

$$w = 2 \frac{m^2 - 1}{m^2 E} \frac{T}{\pi} \left[\frac{2}{3} + \log \left\{ \frac{E \pi m^2}{2(m^2 - 1)} (r_1 + r_2) \right\} - \log T \right] \dots\dots\dots (11a)$$

即ち、Timoshenko 及び Baud の導いた式を得る。然るにこの式をみると次の如き事が云へるのである。

1) 2つの齒形の齒面壓力による表面の凹みを上式 (11), (11a) で與へることは、夫々の齒形がそれらの曲率中心、即ち、干涉點迄實質部より成るとみなして、その曲率中心間の距離、云ひかへれば、作用線全長にわたり、變形の量を求めてゐるものである。所が、實際の場合は、齒形の實質部は、作用線上の一部分でしかない。

2) 式 (11) は、Baud 及び Peterson の云ふ如く^{1), 2)}、壓縮力 T に 1 次的比例の關係にはない。後述する如く、荷重 T による變形の量が T に 1 次的比例の關係にないと、理論の發展が複雑となる。

かかる觀點から、著者は、凹みの量を與へる式として、Timoshenko の例に代らず、次にのべる如き考へから、別の式を誘導した。

2° 齒形の表面凹みを與へる式

先づ次の様な假定をおく。即ち變形の量の計算にあつては、1° の如く、兩圓筒の中心距離の近づきを求めるのではなくて、荷重 T による變形は、局部的に接觸面より先の部分のみに限られ、それより中心の側は、圓筒の原形を保つて變形しないとする。

故に、かくして求める凹み變形の量は、Fig. 2b において、 w_1, w_2 ではなくて、 w_1', w_2' である。従つて次の式が成り立つ³⁾。

$$\begin{aligned} b^2 &= w_1' (2r_1 - w_1') \\ &= w_2' (2r_2 - w_2') \end{aligned}$$

然るに w_1', w_2' は r_1, r_2 に比べて微小であると考へられるから、

$$2r_1 - w_1' \approx 2r_1$$

$$2r_2 - w_2' \approx 2r_2$$

故に

$$b^2 = 2r_1 \cdot w_1' = 2r_2 \cdot w_2'$$

故に

$$w_1' = \frac{b^2}{2r_1}$$

$$w_2' = \frac{b^2}{2r_2}$$

然るに

$$b^2 = \frac{4T}{\pi} \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \left(\frac{m_1^2 - 1}{m_1^2 E_1} + \frac{m_2^2 - 1}{m_2^2 E_2} \right)^2$$

なる式を考慮する時は、

$$\left. \begin{aligned} w_1' &= \frac{2T}{\pi} \frac{r_2}{r_1 + r_2} \left(\frac{m_1^2 - 1}{m_1^2 E_1} + \frac{m_2^2 - 1}{m_2^2 E_2} \right) \\ w_2' &= \frac{2T}{\pi} \frac{r_1}{r_1 + r_2} \left(\frac{m_1^2 - 1}{m_1^2 E_1} + \frac{m_2^2 - 1}{m_2^2 E_2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

$$\begin{aligned} w' &= w_1' + w_2' \\ &= \frac{2T}{\pi} \left(\frac{m_1^2 - 1}{m_1^2 E_1} + \frac{m_2^2 - 1}{m_2^2 E_2} \right) \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

特に $m_1 = m_2 = m$, $E_1 = E_2 = E$

とすれば

$$w' = \frac{4T}{E\pi} \frac{m^2 - 1}{m^2} \dots\dots\dots (13a)$$

この式で表される w' を見ると、次の事が云はれる。即ち凹みの量を與へる w' は、荷重 T にリネアルである。

實際に起る齒車の齒の荷重の状態においては、齒の中立軸の變形を正確に計算しなければならぬ。Timoshenko の與へた式 (11) は、 1° にのべた様な理由で、齒の凹みによる變形の計算としては過大な結果を與へる事は明かだが、式 (11) よりは少なる値を與へる著者の求めた式 (13) 又は (13a) とでも、正鵠を得てゐると思はれない。しかし今考へる様な齒の荷重と變形の状態において、齒の中立軸の變形を十分正確に求める事は困難で、他に更に正確な結果を與へる計算式が、簡單な形で求められぬかどうかの問題は、今後の研究にみるつもりである。ここではとにかく、第 V 章において、各々の齒の變形が、齒車の嚙合状態の變化 (即ち嚙合角の變化) に及ぼす量を計算する場合、齒の變形が荷重に一次的に比例する事が、理論の誘導に便利なので、主としてこの理由で凹み變形の計算式として (13) 又は (13a) を採用する事とする。

第 III 章 嚙合率と嚙合角及び接點の位置の關係

以下に採用する符號を、Fig. 4 及び Fig. 5 に示す。

- O = ビツチ點
- O_1, O_2 = 兩齒車の中心
- P = 任意の位置における接觸點
- P_1, P_2 = 接觸の始點及び終點
- A = 齒底圓半徑

- B = 齒先圓半徑
- C = 齒厚が0となる點の半徑
- D = 兩齒車中心距離
- E = 基圓半徑
- R = ピッチ圓半徑
- ρ = 任意の嚙合點の半徑
- x = 齒底より、任意の嚙合點迄の高さ
- Z = 齒 數
- n = 嚙合率
- L = 作用線の長さ
- P_n = 法線刻み
- T_1, T_2 = 干涉點
- α = 嚙合壓力角
- β = 齒先におけるインボリュート切線角
- γ = 齒厚0となる點におけるインボリュート切線角
- ω = 任意の嚙合點 (接觸點) におけるインボリュート切線角
- φ = 任意の接觸點に對應する嚙合角 (齒の中立線が, O_1T_1 又は O_2T_2 となす角)
- ϕ = 接觸始めの嚙合角
- ψ = 接觸終りの嚙合角
- Ω = ピッチ點で嚙合つて居る時の嚙合角
- Suffix 1, 2 は夫々驅動車及び從動車を表す

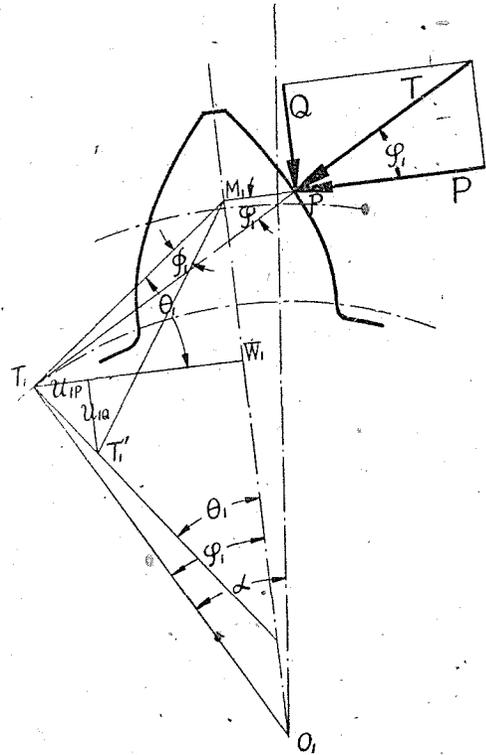


Fig. 4

故に

$$\phi_1 \leq \varphi_1 \leq \psi_1 \quad , \quad \phi_2 \geq \varphi_2 \geq \psi_2$$

の關係がある。

§ 1. 嚙 合 率

切下げのない齒車では、作用線は、接觸始めの點 P_1 から、接觸終りの點 P_2 迄、即ち $\overline{P_1P_2}$ となる。Fig. 5 の幾何學的考察から、

$$\overline{OP_1} = \sqrt{B_2^2 - E_2^2} - R_2 \cdot \sin \alpha (= L_1)$$

$$\overline{OP_2} = \sqrt{B_1^2 - E_1^2} - R_1 \cdot \sin \alpha (= L_2)$$

$$L = L_1 + L_2 = \overline{OP_1} + \overline{OP_2}$$

$$= \sqrt{B_1^2 - E_1^2} + \sqrt{B_2^2 - E_2^2} - D \cdot \sin \alpha$$

$$P_n = \frac{2\pi E_1}{Z_1} = \frac{2\pi E_2}{Z_2}$$

であるから、

$$n_g = \frac{\sqrt{B_1^2 - E_1^2} + \sqrt{B_2^2 - E_2^2} - D \cdot \sin \alpha}{P_n} = \frac{L}{P_n} \dots \dots \dots (14)$$

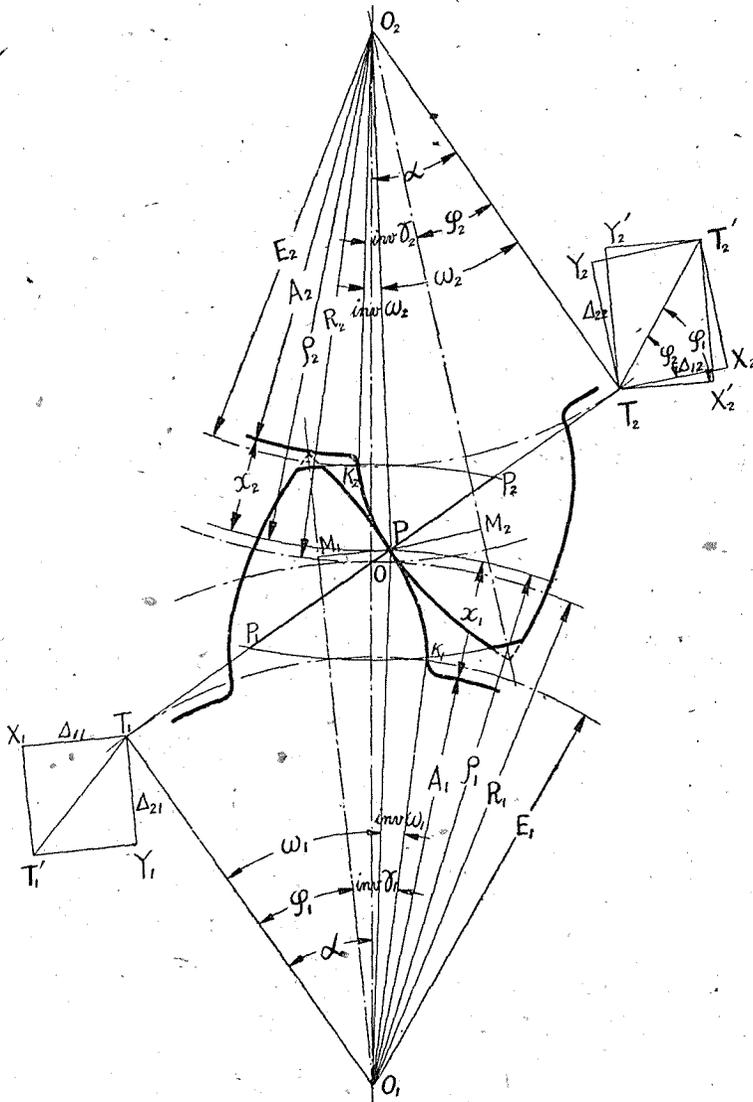


Fig. 5

今, $n = n_1 + n_2$ として

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \frac{L_1}{P_n} = \frac{\sqrt{B_2^2 - E_2^2} - R_2 \cdot \sin \alpha}{P_n} \\ n_2 &= \frac{L_2}{P_n} = \frac{\sqrt{B_1^2 - E_1^2} - R_1 \cdot \sin \alpha}{P_n} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

嚙合率 n は上式で與へられる.

この式を少しく變形するために,

$$m = \text{モジュール}$$

として

$$K \cdot m = \text{齒末の丈}$$

とする時は,

$$B_1 = R_1 + K \cdot m = \left(\frac{Z_1}{2} + K \right) \cdot m$$

$$B_2 = R_2 + K \cdot m = \left(\frac{Z_2}{2} + K \right) \cdot m$$

等の關係を用ひて, n を求めると²⁾

$$n = \frac{\sqrt{Z_1^2 \sin^2 \alpha + 4K(Z_1 + K)} + \sqrt{Z_2^2 \sin^2 \alpha + 4K(Z_2 + K)} - (Z_1 + Z_2) \sin \alpha}{2\pi \cos \alpha} \dots (14a)$$

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \frac{\sqrt{Z_2^2 \sin^2 \alpha + 4K(Z_2 + K)} - Z_2 \cdot \sin \alpha}{2\pi \cos \alpha} \\ n_2 &= \frac{\sqrt{Z_1^2 \sin^2 \alpha + 4K(Z_1 + K)} - Z_1 \cdot \sin \alpha}{2\pi \cos \alpha} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15a)$$

となる.

§ 2. 接點の位置と齒の位置、嚙合角

齒車の嚙合の状態を, 作用線上の接點の位置の函數として定めるため, 第一に互ひに嚙合ふ 2 枚の齒の位置を, 作用線 P_1P_2 上の點に對應せしめなければならぬ. 齒の位置を定めるには, 夫々の齒の中立軸が, O_1T_1, O_2T_2 (Fig. 5 参照) となす角 (嚙合角) φ_1, φ_2 を採用して, 此の角が, P_1P_2 上の點に對應する關係を知ればよい.

Fig. 5 に於て, 接點 P が, 作用線 P_1P_2 上を $P_1 \rightarrow P_2$ に移動する時, φ_1, φ_2 を P 點の位置の函數として表す.

P が P_1P_2 上を, 單位法線刻み P_n だけ動けば, 兩齒車の齒は, ピッチ圓上にて, 單位の刻みだけ移動する. 即ち, 夫々 $\frac{2\pi}{Z_1}, \frac{2\pi}{Z_2}$ なる角度だけ回轉する.

$$\overline{OP}_1 = n_1 P_n$$

$$\overline{OP}_2 = n_2 P_n$$

であるから、ピッチ点 O で嚙合つて居る時の φ の値、即ち、 Ω_1, Ω_2 をとり、夫々の齒に對して、嚙合始點、及び終點の φ の値を Φ, Ψ で表せば、

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \Omega_1 - \frac{2\pi}{Z_1} \cdot n_1 \\ \Phi_2 &= \Omega_2 + \frac{2\pi}{Z_2} \cdot n_1 \\ \Psi_1 &= \Omega_1 + \frac{2\pi}{Z_1} \cdot n_2 \\ \Psi_2 &= \Omega_2 - \frac{2\pi}{Z_2} \cdot n_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

なる關係がある。

然るに、 P が O に來た時は、

$$2t_p, 2t_{p2} = \text{ピッチ圓上における齒厚}$$

として、

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= a - t_{p1}/R_1 \\ \Omega_2 &= a - t_{p2}/R_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

となり、齒形が正規のもの（轉位されてない）ならば、

$$t_{p1}/R_1 = \pi/2Z_1 \quad , \quad t_{p2}/R_2 = \pi/2Z_2$$

だから、

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= a - \frac{\pi}{2Z_1} \\ \Omega_2 &= a - \frac{\pi}{2Z_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17a)$$

従つて、 Φ, Ψ の値も計算される。故に φ の値は次の様な範圍にある。

$$\Phi_1 \leq \varphi_1 \leq \Psi_1 \quad , \quad \Phi_2 \geq \varphi_2 \geq \Psi_2$$

嚙合率 n に對して、次式を満足する如き正の整數 m をとる事が出来る。

$$m \leq n < m+1$$

即ち、等號は、 $n = \text{整數}$ の時に成立する。その場合には、常に $n = m$ 枚の齒が同時に嚙合つて居るのであつて、然らざる時は、同時に嚙合ふ齒數は、 P 點が P_1P_2 上を移動する間、 $m+1$ 枚から m 枚に變化し、これを何回かくりかへすわけである。

今、同時に m 枚が嚙合つてゐるとし、夫々の齒に對して、

$$\varphi_1', \varphi_2'; \varphi_1'', \varphi_2''; \varphi_1''', \varphi_2'''; \dots \varphi_1^{(m)}, \varphi_2^{(m)}$$

なる嚙合角の對應にあり、'の数は接觸の新しい側から數へた齒の番號であるとすれば、次の關係がある。即ち、齒本は、全然剛體であると見れば、

$$\begin{aligned} \varphi_1'' - \varphi_1' &= \varphi_1''' - \varphi_1'' = \dots = \varphi_1^{(m)} - \varphi_1^{(m-1)} = -\frac{2\pi}{Z_1} \\ \varphi_2' - \varphi_2'' &= \varphi_2'' - \varphi_2''' = \dots = \varphi_2^{(m-1)} - \varphi_2^{(m)} = -\frac{2\pi}{Z_2} \end{aligned}$$

φ の値を指定するために、パラメーター λ を導入し、

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1' &= \varphi_1 + \frac{2\pi}{Z_1} \cdot \lambda \\ \varphi_2' &= \varphi_2 - \frac{2\pi}{Z_2} \cdot \lambda \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

とおく。但し $0 \leq \lambda \leq 1$ とする。然る時は、 λ が0から1迄變化する間に、 P 點は、 P_1 から單位法線刻み P_n だけ動き、齒車は單位のピッチ回轉して、再びもとの状態に復する。そして、 φ_1' は φ_1'' の、 φ_1'' は φ_1''' の、等の過程をたどる。それに対して、 φ_1', φ_2' に對應する $P', \varphi_1'', \varphi_2''$ に對應する P'', \dots も夫々1つ先の齒の接點の辿つた過程をくりかへすのである。故に、同時に m 枚或ひは $m+1$ 枚の齒について、

$$0 \leq \lambda \leq 1$$

にとるならば、 $P', P'', \dots, P^{(m)}, P^{(m+1)}$ の點を以て $P_1 P_2$ を連續的にうづめる事が出來、従つて、その λ に對する $\varphi_1', \varphi_1'', \dots, \varphi_1^{(m)}, \varphi_1^{(m+1)}; \varphi_2', \varphi_2'', \dots, \varphi_2^{(m)}, \varphi_2^{(m+1)}$ は、嚙合角 φ_1, φ_2 を連續的に與へる事となる。

而して、 $0 \leq \lambda \leq n-m$ の間は同時に $m+1$ 枚の齒が嚙合ひ、 $n-m \leq \lambda \leq 1$ の間は、 m 枚の齒が嚙合つてゐる。故に、 φ_1, φ_2 の値としては、

$0 \leq \lambda \leq n-m$ の間は、

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1' &= \varphi_1 + \frac{2\pi}{Z_1} \cdot \lambda & , & & \varphi_2' &= \varphi_2 - \frac{2\pi}{Z_2} \cdot \lambda \\ \varphi_1'' &= \varphi_1 + \frac{2\pi}{Z_1} (\lambda+1) & , & & \varphi_2'' &= \varphi_2 - \frac{2\pi}{Z_2} (\lambda+1) \\ \dots & & & & & \\ \varphi_1^{(m)} &= \varphi_1 + \frac{2\pi}{Z_1} (\lambda+m-1) & , & & \varphi_2^{(m)} &= \varphi_2 - \frac{2\pi}{Z_2} (\lambda+m-1) \\ \varphi_1^{(m+1)} &= \varphi_1 + \frac{2\pi}{Z_1} (\lambda+m) & , & & \varphi_2^{(m+1)} &= \varphi_2 - \frac{2\pi}{Z_2} (\lambda+m) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18a)$$

$n-m \leq \lambda \leq 1$ の間は、

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1' &= \vartheta_1 + \frac{2\pi}{Z_1} \lambda & , & & \varphi_2' &= \vartheta_2 - \frac{2\pi}{Z_2} \lambda \\ \varphi_1'' &= \vartheta_1 + \frac{2\pi}{Z_1} (\lambda+1) & , & & \varphi_2'' &= \vartheta_2 - \frac{2\pi}{Z_2} (\lambda-1) \\ & \dots\dots\dots & & & & \\ \varphi_1^{(m)} &= \vartheta_1 + \frac{2\pi}{Z_1} (\lambda+m-1) & , & & \varphi_2^{(m)} &= \vartheta_2 - \frac{2\pi}{Z_2} (\lambda+m-1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18b)$$

の如く與へられる。

$n = m$ (整数) ならば、

$$0 \leq \lambda \leq 1$$

のあらゆる λ の値に對して、 $\varphi_1', \varphi_1'', \dots, \varphi_1^{(m)}$; $\varphi_2', \varphi_2'', \dots, \varphi_2^{(m)}$ の値を上と同様の方法でとる事が出来る。

§ 3. 接觸點の半徑 ρ 及び高さ α の計算

Fig. 5 に於て、

K, K_2 = 齒形のインボリュートの基點 (基圓上の點)

とすると、任意の接觸點 P の半徑は、

$$\rho_1 = \overline{OP} \quad , \quad \rho_2 = \overline{O_2P}$$

であり、

$$\overline{O_1P} = \overline{O_1T_1} \sec \omega_1 \quad \overline{O_2P} = \overline{O_2T_2} \cdot \sec \omega_2$$

而して、

$$\overline{O_1T_1} = E_1 \quad \overline{O_2T_2} = E_2$$

$$\angle T_1O_1O_2 = \angle T_2O_2O_1 = \alpha$$

$$\angle T_1O_1M_1 = \varphi_1 \quad \angle T_2O_2M_2 = \varphi_2$$

$$\angle T_1O_1P = \omega_1 \quad \angle T_2O_2P = \omega_2$$

$$\angle K_1O_1M_1 = \text{inv } \gamma_1 \quad \angle K_2O_2M_2 = \text{inv } \gamma_2$$

$$\angle K_1O_1P = \text{inv } \omega_1 \quad \angle K_2O_2P = \text{inv } \omega_2$$

であり、

$$\angle PO_1M_1 = \omega_1 - \varphi_1 = \text{inv } \gamma_1 - \text{inv } \omega_1$$

$$\angle PO_2M_2 = \omega_2 - \varphi_2 = \text{inv } \gamma_2 - \text{inv } \omega_2$$

故に、

$$\text{tg } \omega_1 = \varphi_1 + \text{inv } \gamma_1 \quad \text{tg } \omega_2 = \varphi_2 + \text{inv } \gamma_2$$

なる関係から、嚙合角 φ の値を知れば、嚙合點に於けるインボリュート切線角は決定出来るし、又

$$\sec \omega_1 = \sqrt{1 + \tan^2 \omega_1} = \sqrt{1 + (\varphi_1 + \text{inv } \gamma_1)^2}$$

等から、

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= E_1 \cdot \sec \omega_1 = E_1 \sqrt{1 + (\varphi_1 + \text{inv } \gamma_1)^2} \\ \rho_2 &= E_2 \cdot \sec \omega_2 = E_2 \sqrt{1 + (\varphi_2 + \text{inv } \gamma_2)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

なる関係が、同時に嚙合ふ齒のすべてについて云へるから、

$$\left. \begin{aligned} \rho_1' &= E_1 \sqrt{1 + (\varphi_1' + \text{inv } \gamma_1)^2} \\ \rho_2' &= E_2 \sqrt{1 + (\varphi_2' + \text{inv } \gamma_2)^2} \\ \rho_1'' &= E_1 \sqrt{1 + (\varphi_1'' + \text{inv } \gamma_1)^2} \\ \rho_2'' &= E_2 \sqrt{1 + (\varphi_2'' + \text{inv } \gamma_2)^2} \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19a)$$

等、すべての接點の半徑が定まる。

ρ が定まれば、齒底から、接點迄の高さ x の値は、

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= \rho_1' - A_1 = E_1 \sqrt{1 + (\varphi_1' + \text{inv } \gamma_1)^2} - A_1 \\ x_2' &= \rho_2' - A_2 = E_2 \sqrt{1 + (\varphi_2' + \text{inv } \gamma_2)^2} - A_2 \\ x_1'' &= \rho_1'' - A_1 = E_1 \sqrt{1 + (\varphi_1'' + \text{inv } \gamma_1)^2} - A_1 \\ x_2'' &= \rho_2'' - A_2 = E_2 \sqrt{1 + (\varphi_2'' + \text{inv } \gamma_2)^2} - A_2 \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

等の如く決定される。

多少、嚴密性は缺くが、梁として齒の變形を考へる時には、 x に上の値を採用する。

第 IV 章 齒の變形による嚙合状態の變化

§ 1. 齒の變形と嚙合角の變化

Fig. 6 に、驅動車と從動車の、相嚙合ふ 1 組の齒を示す。もし齒にかかる荷がない時は、 $T = 0$ であり、齒は實線に示す位置で嚙合つてゐる。即ち、齒は全然變形を起さず、且、兩齒は 1 點 P に於て點接觸をなす。この場合の嚙合角を φ, φ_0 とする。

齒車が荷を負つて運轉してゐる状態では、 T なる齒面の壓力のため、齒が變形し、その嚙合ひの状態は、點線に示す形となる。

從動車の齒の變形による、從動車の嚙合角の變化(偏倚)を全部驅動車の嚙合角の偏倚に換算し

て考へると、駆動車の歯は、双方の歯が變形して分離した距離を補償するだけ、移動しなければならず、嚙合角は φ_1 から φ_1 へ増加する、即ち、

$$\varphi_1, \varphi_2 = \text{負荷時の嚙合角}$$

とすれば、

$$T > 0$$

なる時には

$$\varphi_1 = \varphi_1 + \Delta\varphi_1, \quad (\Delta\varphi_1 > 0)$$

$$\varphi_2 = \varphi_2$$

但し、 $\Delta\varphi_1 =$ 齒の變形にもとづく駆動車の嚙合偏角

今、この嚙合角の變化の過程を分析してみる。荷重 T によつて、双方の齒は變形するが、その變形の量の計算には、第 II 章の方法が用ひられる。最初實線の位置にあつた齒が、駆動車の齒は、 T によつて鎖線の位置へ變位し、従動車の齒は點線の位置迄變位する。そして、駆動車の齒が點線の位置に来て再び双方の齒が接觸する迄、駆動車の嚙合角は進まなければならない。

議論を進めるに先立つて、齒の變形にあづかる要素をまとめてみると、

1° 横分力 P による曲げの作用

1a P の曲げによる撓 δ_1 に相當する齒の横方向平行變位

1b P の曲げによる撓曲線の傾斜 ϕ_1 に相當する齒の旋廻變位

2° 横分力 P による剪斷の作用

剪斷力 P による撓 δ_2 に相當する齒の横方向平行變位

3° 縦分力 Q による壓縮の作用

Q による縦方向の縮み ϵ に相當する齒の縦方向平行變位

4° 縦分力 Q による曲げの作用

4a Q の曲げによる撓 δ_3 に相當する齒の横方向平行變位

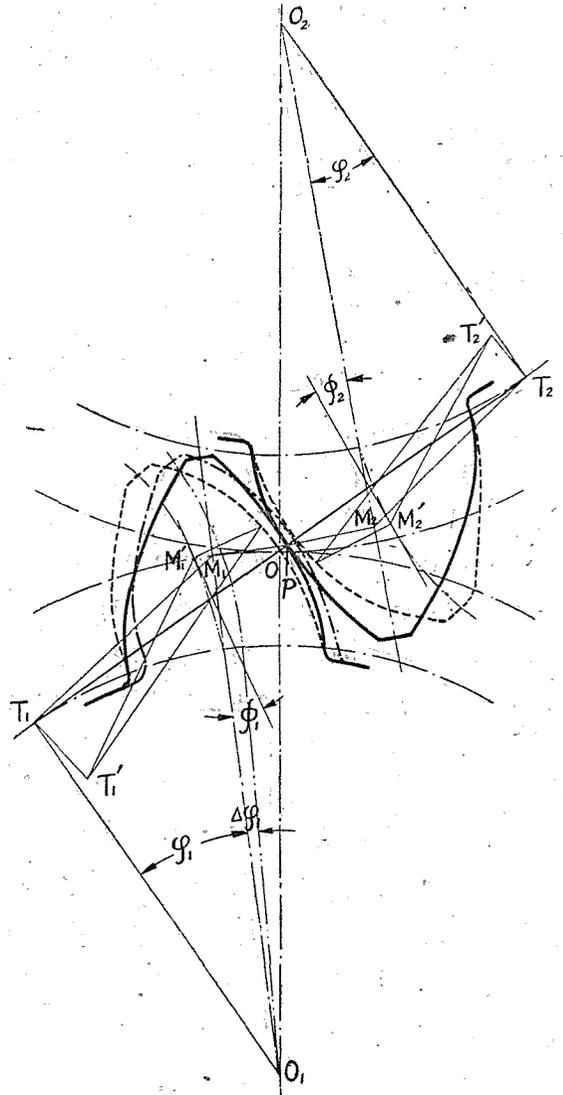


Fig. 6

4b Q の曲げによる撓曲線の傾斜 ϕ_0 に相當する齒の旋廻變位

5° T なる齒面壓力による表面の凹みに相當する作用線方向の平行變位

の5項に歸するが、之をまとめて大別すると

A. 齒形の平行移動 ($M_1 \rightarrow M_1'$ 迄の平行移動)

B. 齒形の旋廻變位 (M_1' 點を中心とし、 M_1' 點における撓曲線の傾斜角に等しい角の廻轉變位)

の2つになる。

之を Fig. 6 についてみれば、齒の中立線へ接觸點から下した垂線の足を M_1, M_2 として、次の2つの變形の合成とみてよい。

A. $M_1 \rightarrow M_1'$ 迄の平行移動

B. M_1 を中心とし、 M_1' 點における撓曲線の傾斜角に等しい角度の旋廻變位

今、接觸點の附近では、齒形の曲率は一定と假定する。即ち、無負荷時における接觸點と、負荷時の接觸點は一般には一致せず、齒が實線の位置から、點線の位置迄變形し、移動すれば、接觸點は齒形上の別の點にうつる。しかし、この接觸點の、齒形上の移動はごく小なりと考へられるから、接觸點の移動のために齒形の曲率半徑は變化しないものと見る事が出来る。従つて、上の如き假定の許容される様な、ごくわづかの接觸點の移動範囲においては、齒形曲線の接觸の議論は、その接觸點における曲線の曲率中心を中心とし、その曲率半徑を半徑としてもつ2つの圓の接觸の議論に歸する事が出来る。そして、2圓の接觸を論ずるには、その相對的な位置の變化を考へればよいのであるから、その2圓の中心の位置の相對的變化を考へる事となる。

従つて、2つの齒の嚙合状態の變化を考へるには、あらゆる變形によつて生ずる兩齒形曲線の、曲率中心の變位を、その曲率中心がその齒形曲線に固定されたものと考へて計算し、それら中心の移動距離だけはなれた2つの圓を、再び接觸させるために、驅動車の齒を、その廻轉の方向にどれだけ移動させればよいかを考察すればよい。

故に、上にのべた齒の變形にもとづく接觸點の平行變位は、そのまま曲率中心の平行變位とし、變形によつて生ずる齒の旋廻變位は、その旋廻によつて、夫々の圓が M_1 及び M_2 を中心とし、且つその點における撓曲線の傾斜角だけ回轉したために、それらの齒に固定された曲率中心が移動する距離を考へればよい。

§ 2. 齒形の旋廻の變位と曲率中心の移動

Fig. 4 に於て、1, 2 の齒が夫々 M_1, M_2 を中心として、 P 點に力がかかつた時に變形する方向に旋廻し、曲率中心 T_1, T_2 は夫々 T_1', T_2' に移つたとする。(從動車の方は、容易に類推する事が出来るから圖には示さない。)

$\phi_1, \phi_2 = M_1, M_2$ を中心とする各々の齒の旋廻の角

とすれば、

$$\phi_1 = \angle T_1 M_1 T_1' \quad \phi_2 = \angle T_2 M_2 T_2'$$

今、 ϕ_1, ϕ_2 が微小であるとすれば、

$$\overline{T_1 T_1'} \perp \overline{T_1 M_1} \quad , \quad \overline{T_2 T_2'} \perp \overline{T_2 M_2}$$

即ち、 T_1, T_2 が廻轉半径 $\overline{M_1 T_1}, \overline{M_2 T_2}$ に直角な方向に移動したと見られるから、

$$\overline{T_1 T_1'} = \overline{M_1 T_1} \cdot \text{tg } \phi_1 \quad \overline{T_2 T_2'} = \overline{M_2 T_2} \cdot \text{tg } \phi_2$$

であり、1, 2 の歯の嚙合角を φ_1, φ_2 とするから

$$\angle M_1 P T_1 = \angle M_1 O_1 T_1 = \varphi_1 \quad , \quad \angle M_2 P T_2 = \angle M_2 O_2 T_2 = \varphi_2$$

又、 P 点における夫々の歯の曲率半径を r_1, r_2 とすれば、

$$\overline{T_1 P} = r_1 \quad , \quad \overline{T_2 P} = r_2$$

であり、 P 点における各々の歯の歯厚を $2t_1, 2t_2$ とすると、近似的に

$$\overline{P M_1} = t_1 \quad , \quad \overline{P M_2} = t_2$$

$$\text{今、} \quad s_1 = \overline{T_1 M_1} \quad , \quad s_2 = \overline{T_2 M_2}$$

とおくと、 $\triangle P M_1 T_1, \triangle P M_2 T_2$ に於て

$$s_1 = \sqrt{r_1^2 + t_1^2 - 2r_1 \cdot t_1 \cdot \cos \varphi_1}$$

$$s_2 = \sqrt{r_2^2 + t_2^2 - 2r_2 \cdot t_2 \cdot \cos \varphi_2}$$

であり、

$$\overline{T_1 T_1'} = s_1 \phi_1 \quad , \quad \overline{T_2 T_2'} = s_2 \phi_2$$

$$u_1 = \overline{T_1 T_1'} = s_1 \phi_1 \quad , \quad u_2 = \overline{T_2 T_2'} = s_2 \phi_2$$

とする。そしてこの u_1, u_2 を夫々の歯について、横と縦の成分に分ち、

$$u_{1p} = u_1 \text{ の第 1 の歯についての横 } (\overline{P M_1} \text{ 方向) 成分}$$

$$u_{1q} = u_1 \text{ の第 1 の歯についての縦 } (\overline{M_1 O_1} \text{ 方向) 成分}$$

$$u_{2p} = u_2 \text{ の第 2 の歯についての横 } (\overline{P M_2} \text{ 方向) 成分}$$

$$u_{2q} = u_2 \text{ の第 2 の歯についての縦 } (\overline{M_2 O_2} \text{ 方向) 成分}$$

とし、

$$\angle M_1 T_1 W_1 = \theta_1 \quad , \quad \angle M_2 T_2 W_2 = \theta_2$$

とする。但、 W_1, W_2 は T_1, T_2 より各々の歯の中立線に下せる垂線の足である。

而る時は、

$$u_{1p} = u_1 \sin \theta_1 \quad u_{1q} = u_1 \cos \theta_1$$

$$u_{2p} = u_2 \cdot \sin \theta_2 \quad u_{2q} = u_2 \cdot \cos \theta_2$$

然るに、

$$\overline{M_1W_1} = \overline{T_1P} \sin \varphi_1 = r_1 \cdot \sin \varphi_1$$

$$\overline{T_1W_1} + \overline{M_1P} = \overline{T_1P} \cos \varphi_1 = r_1 \cdot \cos \varphi_1$$

$$\overline{T_1W_1} = r_1 \cos \varphi_1 - t_1$$

なる故、

$$\sin \theta_1 = \frac{\overline{M_1W_1}}{\overline{T_1M_1}} = \frac{r_1 \sin \varphi_1}{s_1}$$

$$\cos \theta_1 = \frac{\overline{T_1W_1}}{\overline{T_1M_1}} = \frac{r_1 \cos \varphi_1 - t_1}{s_1}$$

従つて、

$$u_{1p} = u_1 \sin \theta_1 = \phi_1 r_1 \sin \varphi_1$$

$$u_{1q} = u_1 \cos \theta_1 = \phi_1 (r_1 \cos \varphi_1 - t_1)$$

同様にして、

$$u_{2p} = \phi_2 r_2 \sin \varphi_2$$

$$u_{2q} = \phi_2 (r_2 \cos \varphi_2 - t_2)$$

但し、 u_{1p} , u_{1q} , u_{2p} , u_{2q} に符號をつけ、Fig. 5 に示す方向、即ち曲率中心 T_1 , T_2 が互ひに遠ざかる方向を以て正と考へれば

$$\left. \begin{aligned} u_{1p} &= -\phi_1 \cdot r_1 \sin \varphi_1 \\ u_{1q} &= \phi_1 (r_1 \cos \varphi_1 - t_1) \\ u_{2p} &= -\phi_2 \cdot r_2 \sin \varphi_2 \\ u_{2q} &= \phi_2 (r_2 \cos \varphi_2 - t_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

を得る。

かくしてあらゆる變形にもとづく各々の齒の曲率中心の移動を次の4成分に分ける。

A_{11} = 第1齒形の曲率中心 T_1 の横の移動

A_{12} = ” ” 縦の移動

A_{21} = 第2齒形の曲率中心 T_2 の横の移動

A_{22} = ” ” 縦の移動

而して、 A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} の符號は、Fig. 5 に示す方向、即ち中心が互ひに遠ざかる方向を正の方向とする。

$$\begin{aligned} A_{11} &= \overline{T_1 X_1} & A_{21} &= \overline{T_1 Y_1} \\ A_{12} &= \overline{T_2 X_2} & A_{22} &= \overline{T_2 Y_2} \end{aligned}$$

であるが、第2齒形についての移動の成分 A_{12} , A_{22} を更に第1齒形に換算して、その横と縦の成分に分つ。

$$T_1 X_2' = T_2 T_2' \text{ の } A_{11} (T_1 X_1) \text{ 方向成分}$$

$$\overline{T_2 Y_2'} = T_2 T_2' \text{ の } A_{21} (T_1 Y_1) \text{ 方向成分}$$

とすると、

$$\overline{T_2 X_2'} = \overline{T_2 X_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \overline{T_2 Y_2} \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$= A_{12} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + A_{22} \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\overline{T_2 Y_2'} = \overline{T_2 Y_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \overline{T_2 X_2} \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$= A_{22} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - A_{12} \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$$

よつて、

Σ_p = 兩齒形の相對的變位の、第1齒形に換算した横成分の合計

Σ_Q = 兩齒形の相對的變位の、第1齒形に換算した縦成分の合計

とすると、 Σ_p , Σ_Q は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_p &= A_{11} + A_{12} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + A_{22} \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \Sigma_Q &= A_{21} - A_{12} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + A_{22} \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

かくして、2つの曲率圓が、夫々 A_{11} , A_{21} ; A_{12} , A_{22} なる移動をする事は、第2の圓 (即ち第2齒形) が固定され、第1の圓 (即ち第1齒形) が横と縦の方向に、 Σ_p , Σ_Q だけ移動する事と、相對的な關係は同一である。

§ 3. 曲率圓の移動と接觸のための變位

次に、Fig. 7 に於て見る様に、第1の圓を $T_1 X_1$ 方向に Σ_p , $T_1 Y_1$ 方向に Σ_Q だけ移動させて、第2の圓から離れた場合、第1の圓を $\overline{X_1 T_1}$ の方向にどれだけもどしたら、再び第2の圓と接觸するかを考へやう。

T_1 の圓を、 $\overline{T_1 X_1}$ 方向に Σ_p 移動させれば、移動させた距離 Σ_p だけ

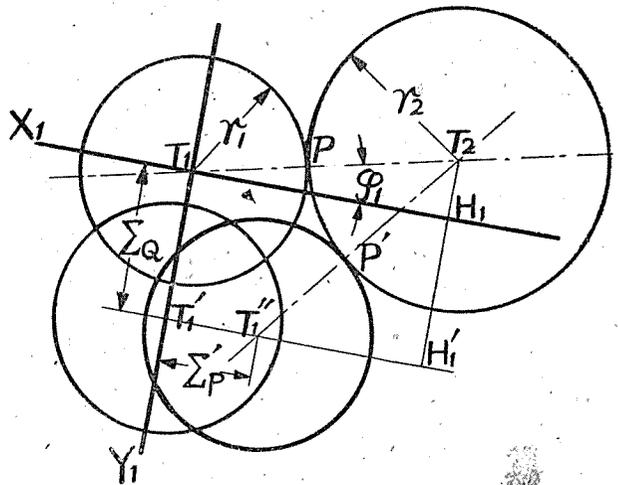


Fig. 7

逆に動かして T_2 なる圓に再び接觸させる事が出来る。 $\overline{T_1Y_1}$ 方向に Σ_Q だけ移動させ T_1 を T_1' にもつて來るときは、再び T_2 なる圓に接せしめるには、 $T_1' \rightarrow T_1''$ 迄 X_1T_1 の方向に移動させなければならぬ。

Fig. 7 に於て、

$$\angle T_2T_1H_1 = \varphi_1$$

$$T_1T_1' = \Sigma_Q$$

$$\text{但, } \overline{T_1H_1} \perp \overline{T_2H_1}, \quad \overline{T_1'H_1'} \perp \overline{T_2H_1'}$$

$T_1 = T_2$ に接してゐた初めの位置

$T_1' = \overline{T_1Y_1}$ 方向に Σ_Q だけ移動して占める位置

$T_1'' = \overline{T_1Y_1}$ に直角に圓 T_1' を動かして、 P' にて再び T_2 と接した時の中心の位置

とすると、求めんとする距離は、

$$\Sigma_p = \overline{T_1T_1''}$$

2圓の半徑 r_1, r_2 とすると、

$$\overline{T_1T_2} = r_1 + r_2$$

$$\overline{T_1H_1'} = \overline{T_1H_1} = (r_1 + r_2) \cos \varphi_1$$

$$\therefore \overline{T_1''H_1'} = \overline{T_1H_1'} - \overline{T_1T_1''} = (r_1 + r_2) \cos \varphi_1 - \Sigma_p$$

又

$$\overline{T_2H_1} = (r_1 + r_2) \sin \varphi_1$$

$$\overline{H_1H_1'} = T_1T_1' = \Sigma_Q$$

$$\therefore \overline{T_2H_1'} = (r_1 + r_2) \sin \varphi_1 + \Sigma_Q$$

而して

$$\overline{T_1''T_2}^2 = \overline{T_1''H_1'}^2 + \overline{T_2H_1'}^2$$

$$\therefore (r_1 + r_2)^2 = \{(r_1 + r_2) \cos \varphi_1 - \Sigma_p\}^2 + \{(r_1 + r_2) \sin \varphi_1 + \Sigma_Q\}^2$$

$$\Sigma_p^2 - 2(r_1 + r_2) \cos \varphi_1 \cdot \Sigma_p + 2(r_1 + r_2) \sin \varphi_1 \cdot \Sigma_Q + \Sigma_Q^2 = 0$$

之をといて、

$$\begin{aligned} \Sigma_p &= (r_1 + r_2) \cos \varphi_1 \pm \sqrt{(r_1 + r_2)^2 \cos^2 \varphi_1 - 2(r_1 + r_2) \sin \varphi_1 \cdot \Sigma_Q - \Sigma_Q^2} \\ &= (r_1 + r_2) \cos \varphi_1 \pm (r_1 + r_2) \cdot \cos \varphi_1 \left\{ 1 - \frac{2 \sin \varphi_1 \cdot \Sigma_Q}{(r_1 + r_2) \cos^2 \varphi_1} - \left(\frac{\Sigma_Q}{(r_1 + r_2) \cos \varphi_1} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Σ_Q は $(r_1 + r_2)$ に比して微小なる故括弧内の第3項を無視すれば、

$$\Sigma'_p = (r_1 + r_2) \cos \varphi_1 \left[1 \pm \left\{ 1 - \frac{2 \sin \varphi_1 \cdot \Sigma'_Q}{(r_1 + r_2) \cos^2 \varphi_1} \right\}^{\frac{1}{2}} \right]$$

ここで正號をすて、且つ

$$\left\{ 1 - \frac{2 \sin \varphi_1 \cdot \Sigma'_Q}{(r_1 + r_2) \cos^2 \varphi_1} \right\}^{\frac{1}{2}} \doteq 1 - \frac{\sin \varphi_1 \cdot \Sigma'_Q}{(r_1 + r_2) \cdot \cos^2 \varphi_1}$$

なる近似計算を行ふと、

$$\Sigma'_p = (r_1 + r_2) \cos \varphi_1 \cdot \frac{\sin \varphi_1 \cdot \Sigma'_Q}{(r_1 + r_2) \cdot \cos^2 \varphi_1} = \Sigma'_Q \cdot t_g \varphi_1^{(9)} \dots\dots\dots (23)$$

故に、 Σ_p , Σ_Q を同時に考へる時、

$\Sigma =$ 第1の圓 (従つて第1の齒形) を再び第2の圓 (従つて第2の齒形) に
接せしめるために動かすべき横方向の距離

とすれば、

$$\Sigma = \Sigma_p + \Sigma'_Q \cdot t_g \varphi_1 \dots\dots\dots (24)$$

然るに Σ_p , Σ_Q は前述の如く與へられるから、

$$\begin{aligned} \Sigma &= A_{11} + A_{12} \cos (\varphi_2 - \varphi_1) + A_{22} \cdot \sin (\varphi_2 - \varphi_1) \\ &+ \{ A_{21} - A_{12} \sin (\varphi_2 - \varphi_1) + A_{22} \cdot \cos (\varphi_2 - \varphi_1) \} \cdot t_g \varphi_1 \end{aligned}$$

之を整理して次式を得る。

$$\Sigma = \frac{1}{\cos \varphi_1} \left\{ A_{11} \cos \varphi_1 + A_{21} \cdot \sin \varphi_1 + A_{12} \cos \varphi_2 + A_{22} \cdot \sin \varphi_2 \right\} \dots\dots\dots (24a)$$

§ 4. 齒の變形と齒の接觸

さて、前に述べた齒形の平行變位及び廻轉變位をあわせて考へると、

$$1^\circ \quad P_1 = T \cos \varphi_1 \quad , \quad P_2 = T \cos \varphi_2$$

にもとづく曲げによる曲率中心の移動

1a. P_1, P_2 なる分力によつて夫々の齒が横方向に曲げによる撓み δ_{11}, δ_{12} だけ移動する。

1b. 更に、曲げモーメントによつて夫々の齒が M_1, M_2 を中心として、それらの點における撓曲線の傾斜角に等しい角 ϕ_{11}, ϕ_{12} だけ旋廻する。この廻轉によつて、夫々の曲率中心は

- 第1の齒の横方向に $-\phi_{11} \cdot r_1 \sin \varphi_1$
- „ 縦方向に $\phi_{11} \cdot (r_1 \cdot \cos \varphi_1 - t_1)$
- 第2の齒の横方向に $-\phi_{12} \cdot r_2 \sin \varphi_2$
- „ 縦方向に $\phi_{12} \cdot (r_2 \cdot \cos \varphi_2 - t_2)$

2° P_1, P_2 にもとづく剪斷の作用による曲率中心の移動

剪斷の作用によつて生ずる撓みに相當して

第1 齒形の横方向に δ_{21}

第2 ,, δ_{22}

なる移動をする。

3° $Q_1 = T \cdot \sin \varphi_1$, $Q_2 = T \sin \varphi_2$ なる壓縮によつて生ずる曲率中心の移動は

第1 齒形の縦方向に ε_1

第2 ,, ε_2

4° Q_1, Q_2 が偏心なる爲に生ずる曲げの作用によつて

4a 曲げの撓みに相當して動く曲率中心の移動は

第1 齒形の横方向に δ_{31}

第2 ,, δ_{32}

4b 曲げによる撓曲線の傾斜角 ϕ_{31}, ϕ_{32} から生ずる曲率中心の移動は

第1 齒形の横方向に $-\phi_{31} r_1 \sin \varphi_1$

,, 縦方向に $\phi_{31} (r_1 \cos \varphi_1 - t_1)$

第2 齒形の横方向に $-\phi_{32} r_2 \cdot \sin \varphi_2$

,, 縦方向に $\phi_{32} (r_2 \cos \varphi_2 - t_2)$

5° 齒の表面の凹み w' に相當する曲率中心の移動は、

第1 齒形の横方向に $w' \cdot \cos \varphi_1$

,, 縦方向に $w' \cdot \sin \varphi_1$

之等を合計して、第1, 第2の齒について横及び縦の成分をまとめると、

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{11} &= \delta_{11} + \delta_{21} + \delta_{31} - (\phi_{11} + \phi_{31}) \cdot r_1 \sin \varphi_1 + w' \cdot \cos \varphi_1 \\ \Delta_{21} &= (\phi_{11} + \phi_{31}) \cdot (r_1 \cos \varphi_1 - t_1) + \varepsilon_1 + w' \sin \varphi_1 \\ \Delta_{12} &= \delta_{12} + \delta_{22} + \delta_{32} - (\phi_{12} + \phi_{32}) \cdot r_2 \sin \varphi_2 \\ \Delta_{22} &= (\phi_{12} + \phi_{32}) (r_2 \cos \varphi_2 - t_2) + \varepsilon_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

従つて、之を Σ の式に代入すると、

$$\Sigma = \frac{1}{\cos \varphi_1} \left[(\delta_{11} + \delta_{21} + \delta_{31}) \cos \varphi_1 + (\delta_{12} + \delta_{22} + \delta_{32}) \cos \varphi_2 - (\phi_{11} + \phi_{31}) \cdot t_1 \cdot \sin \varphi_1 - (\phi_{12} + \phi_{32}) \cdot t_2 \cdot \sin \varphi_2 + \varepsilon_1 \sin \varphi_1 + \varepsilon_2 \sin \varphi_2 + w' \right] \dots\dots\dots (26)$$

ここにおいて、第II章に求めた式を用ひる。即ち、

$$\delta_{11} = \frac{3T \cos \varphi_1 l_1^3}{2E_1 h_01^3} \left\{ -\log(1 - \zeta_1) - \zeta_1 - \frac{1}{2} \zeta_1^2 \right\}$$

$$\delta_{12} = \frac{3T \cos \varphi_2 \cdot l_2^3}{2E_2 h_02^3} \left\{ -\log(1 - \zeta_2) - \zeta_2 - \frac{1}{2} \zeta_2^2 \right\}$$

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= \frac{3T \cos \varphi_1 \cdot l_1^2}{4E_1 h_{01}^3} \left\{ (1 - \zeta_1)^{-1} - 1 - \zeta_1 \right\} \\ \phi_{12} &= \frac{3T \cos \varphi_2 \cdot l_2^2}{4E_2 \cdot h_{02}^3} \left\{ (1 - \zeta_2)^{-1} - 1 - \zeta_2 \right\} \\ \delta_{21} &= - \frac{6T \cos \varphi_1 \cdot l_1}{5E_1 h_{01}} \frac{m_1 + 1}{m_1} \log (1 - \zeta_1) \\ \delta_{22} &= - \frac{6T \cos \varphi_2 \cdot l_2}{5E_2 \cdot h_{02}} \frac{m_2 + 1}{m_2} \log (1 - \zeta_2) \\ \delta_{31} &= - \frac{3T \sin \varphi_1 \cdot l_1^2}{4E_1 h_{01}^2} \cdot \zeta_1^2 \\ \delta_{32} &= - \frac{3T \sin \varphi_2 \cdot l_2^2}{4E_2 h_{02}^2} \cdot \zeta_2^2 \\ \phi_{31} &= - \frac{3T \sin \varphi_1 \cdot l_1}{4E_1 \cdot h_{01}^2} \left\{ (1 - \zeta_1)^{-1} - 1 + \zeta_1 \right\} \\ \phi_{32} &= - \frac{3T \sin \varphi_2 \cdot l_2}{4E_2 \cdot h_{02}^2} \left\{ (1 - \zeta_2)^{-1} - 1 + \zeta_2 \right\} \\ \varepsilon_1 &= - \frac{T \sin \varphi_1 l_1}{2E_1 h_{01}} \log (1 - \zeta_1) \\ \varepsilon_2 &= - \frac{T \sin \varphi_2 l_2}{2E_2 h_{02}} \log (1 - \zeta_2) \\ w' &= \frac{2T}{\pi} \left\{ \frac{m_1^2 - 1}{m_1^2 E_1} + \frac{m_2^2 - 1}{m_2^2 E_2} \right\} \end{aligned}$$

之等を Σ の式に入れると、

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{T}{\cos \varphi_1} \left[\frac{3 \cos^2 \varphi_1 \cdot l_1^3}{2E_1 h_{01}^3} \left\{ -\log(1 - \zeta_1) - \zeta_1 - \frac{1}{2} \zeta_1^2 \right\} + \frac{3 \cdot \cos^2 \varphi_2 \cdot l_2^3}{2E_2 h_{02}^3} \left\{ -\log(1 - \zeta_2) - \zeta_2 - \frac{1}{2} \zeta_2^2 \right\} \right. \\ &\quad - \frac{6 \cos^2 \varphi_1 \cdot l_1}{5E_1 h_{01}} \frac{m_1 + 1}{m_1} \log(1 - \zeta_1) - \frac{6 \cos^2 \varphi_2 \cdot l_2}{5E_2 h_{02}} \frac{m_2 + 1}{m_2} \log(1 - \zeta_2) \\ &\quad - \frac{3 \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_1 \cdot l_1^2}{4E_1 h_{01}^2} \cdot \zeta_1^2 - \frac{3 \cos \varphi_2 \cdot \sin \varphi_2 \cdot l_2^2}{4E_2 \cdot h_{02}^2} \cdot \zeta_2^2 \\ &\quad - \frac{3 \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_1 \cdot l_1^2 \cdot t_1}{4E_1 h_{01}^3} \left\{ (1 - \zeta_1)^{-1} - 1 - \zeta_1 \right\} - \frac{3 \cos \varphi_2 \cdot \sin \varphi_2 \cdot l_2^2 \cdot t_2}{4E_2 h_{02}^3} \left\{ (1 - \zeta_2)^{-1} - 1 - \zeta_2 \right\} \\ &\quad + \frac{3 \sin^2 \varphi_1 \cdot l_1 \cdot t_1}{4E_1 h_{01}^2} \left\{ (1 - \zeta_1)^{-1} - 1 + \zeta_1 \right\} + \frac{3 \sin^2 \varphi_2 \cdot l_2 \cdot t_2}{4E_2 \cdot h_{02}^2} \left\{ (1 - \zeta_2)^{-1} - 1 + \zeta_2 \right\} \\ &\quad - \frac{\sin^2 \varphi_1 \cdot l_1}{2E_1 \cdot h_{01}} \log(1 - \zeta_1) - \frac{\sin^2 \varphi_2 \cdot l_2}{2E_2 h_{02}} \log(1 - \zeta_2) \\ &\quad \left. + \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{m_1^2 - 1}{m_1^2 E_1} + \frac{m_2^2 - 1}{m_2^2 E_2} \right\} \right] \dots\dots\dots (26a) \end{aligned}$$

第 V 章 齒の剛性と Load Cycle

前節に求めた Σ は、嚙合ふ双方の齒の變形を補償するために、第 1 の齒が進むべき距離であるから、接點迄の半径が ρ である事を考へると、驅動車が、齒の變形を補償するために廻轉すべき角、即ち嚙合偏角 $\Delta\varphi_1$ は

$$\Delta\varphi_1 = \frac{\Sigma}{\rho_1} \dots\dots\dots (27)$$

同時に m 枚の齒が嚙合つて荷を分擔する場合には、夫々の齒の組合せに對して Σ の値は計算で求められるから、

$\Sigma', \Sigma'', \dots \Sigma^{(m)}$ = 驅動車の第 1, 第 2, \dots 第 m 枚目の齒が、變形を補償するために進むべき、接點をとほる圓上の距離

$T', T'', \dots T^{(m)}$ = 嚙合ふ各々の齒が分擔する荷重 (單位巾あたりの齒壓)

$\Delta\varphi_1', \Delta\varphi_1'', \dots \Delta\varphi_1^{(m)}$ = 驅動車の各々の齒が、變形を補償するために進むべき嚙合角の偏倚

$\rho_1', \rho_1'', \dots \rho_1^{(m)}$ = 嚙合ふ驅動車の齒の、接點迄の半径

とすると、

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi_1' &= \frac{\Sigma'}{\rho_1'} = \frac{T'}{\rho_1' \cos \varphi_1'} \left[\dots \right] \\ \Delta\varphi_1'' &= \frac{\Sigma''}{\rho_1''} = \frac{T''}{\rho_1'' \cos \varphi_1''} \left[\dots \right] \\ \dots\dots\dots \\ \Delta\varphi_1^{(m)} &= \frac{\Sigma^{(m)}}{\rho_1^{(m)}} = \frac{T^{(m)}}{\rho_1^{(m)} \cos \varphi_1^{(m)}} \left[\dots \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27 a)$$

但、式 (27. a) 中の [] は、式 (26. a) の [] の項に相當する。

然るに齒環が全然剛性であると假定すると、次式が成立する。

$$\Delta\varphi_1' = \Delta\varphi_1'' = \dots\dots\dots = \Delta\varphi_1^{(m)}$$

今、簡單のために、

$$\begin{aligned} T' = \rho_1' \cdot \cos \varphi_1' &+ \left[\frac{3 \cos^2 \varphi_1' \cdot l_1^3}{2E_1 h_{01}^3} \left\{ -\log(1-\zeta_1') - \zeta_1' - \frac{1}{2} \zeta_1'^2 \right\} + \frac{3 \cos^2 \varphi_2' \cdot l_2^3}{2E_2 h_{02}^3} \left\{ -\log(1-\zeta_2') - \zeta_2' - \frac{1}{2} \zeta_2'^2 \right\} \right. \\ &- \frac{6 \cos^2 \varphi_1' \cdot l_1}{5E_1 h_{01}} \cdot \frac{m_1+1}{m_1} \log(1-\zeta_1') - \frac{6 \cos^2 \varphi_2' \cdot l_2}{5E_2 h_{02}} \cdot \frac{m_2+1}{m_2} \log(1-\zeta_2') \\ &- \frac{3 \cos \varphi_1' \cdot \sin \varphi_1' \cdot l_1^2}{4E_1 h_{01}^2} \cdot \zeta_1'^2 - \frac{3 \cos \varphi_2' \cdot \sin \varphi_2' \cdot l_2^2}{4E_2 h_{02}^2} \cdot \zeta_2'^2 \\ &\left. - \frac{3 \cos \varphi_1' \cdot \sin \varphi_1' \cdot l_1^2 \cdot l_1'}{4E_1 h_{01}^3} \left\{ (1-\zeta_1')^{-1} - 1 - \zeta_1' \right\} - \frac{3 \cos \varphi_2' \cdot \sin \varphi_2' \cdot l_2^2 \cdot l_2'}{4E_2 h_{02}^3} \left\{ (1-\zeta_2')^{-1} - 1 - \zeta_2' \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3 \sin^2 \varphi_1' \cdot l_1 \cdot t_1'}{4E_1 h_{01}^2} \left\{ (1-\zeta_1')^{-1} - 1 + \zeta_1' \right\} + \frac{3 \sin^2 \varphi_2' \cdot l_2 \cdot t_2'}{4E_2 h_{02}^2} \left\{ (1-\zeta_2')^{-1} - 1 + \zeta_2' \right\} \\
 & - \frac{\sin^2 \varphi_1' \cdot l_1}{2E_1 h_{01}} \log (1-\zeta_1') - \frac{\sin^2 \varphi_2' \cdot l_2}{2E_2 h_{02}} \log (1-\zeta_2') \\
 & + \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{m_1^2 - 1}{m_1^2 E_1} + \frac{m_2^2 - 1}{m_2^2 E_2} \right\} \dots\dots\dots (28)
 \end{aligned}$$

等とおくならば、

$$\Delta\varphi_1' = \frac{T'}{\Gamma'}, \quad \Delta\varphi_1'' = \frac{T''}{\Gamma''}, \quad \dots\dots \quad \Delta\varphi_1^{(m)} = \frac{T^{(m)}}{\Gamma^{(m)}}$$

故に

$$\frac{T'}{\Gamma'} = \frac{T''}{\Gamma''} = \dots\dots = \frac{T^{(m)}}{\Gamma^{(m)}} = \frac{T' + T'' + \dots\dots + T^{(m)}}{\Gamma' + \Gamma'' + \dots\dots + \Gamma^{(m)}} = \frac{T}{\Gamma} = \Delta\varphi_1 \quad \dots\dots (29)$$

但、 $\Gamma = \Gamma' + \Gamma'' + \dots\dots + \Gamma^{(m)}$

であるから、

$f, f', \dots\dots f^{(m)}$ = 各々の歯の分擔する荷重の割合 (Load Division Factor)

とすれば、

$$\left. \begin{aligned}
 f &= T'/T = \Gamma'/\Gamma \\
 f' &= T''/T = \Gamma''/\Gamma \\
 &\dots\dots\dots \\
 f^{(m)} &= T^{(m)}/T = \Gamma^{(m)}/\Gamma
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

但、 $f + f' + \dots\dots + f^{(m)} = 1$.

かくして、作用線上の接點の位置を指定すれば、同時に嚙合ふ齒數は別に求まるから、その位置における齒の荷重の割合は上述の方法をたどる事によつて決定せられる。従つて、任意の齒が嚙合を始めてから終る迄の間に負ふ荷重の變化の狀況が判明し、Load Division Cycle は決定出来る。

こゝに、 $\Gamma', \Gamma'', \dots\dots$ 及び Γ は齒の剛さをあらはすものであるから、

$\Gamma', \Gamma'', \dots\dots$ = Single Contact の場合の齒の剛性係數

Γ = Multiple Contact の場合の齒の剛性係數、即ち、齒車の剛性係數

とよび、又偏角 $\Delta\varphi_1$ は

$$\Delta\varphi_1 = T/\Gamma$$

の如く、 $1/\Gamma$ に比例するから、

$1/\Gamma$ = Multiple Contact の場合の齒の撓性係數、即ち齒車の撓性係數

とよぶ。

Γ', Γ の値も、接點の作用線上の位置の函數として求められる。

第VI章 Stress Cycle

齒の應力は、やはり接觸點の位置によつて變化するはずである。最大應力は、壓縮側の齒本の縁に生ずる。實際の應力は、應力集中を考へなければならず、光弾性を應用した實驗に訴へて決定さるべきであるが、ここには一般的傾向をみる目的で、垂直應力の變化の状態をしらべる。

T なる齒面壓力を、 P と Q の2成分に分つ事は、以前の考察と同様で、齒本の中立線上の點 O から η はなれた點 M 、 N 點の應力を、 P と Q によつて生ずる曲げの應力と、 Q にもとづく壓縮の應力に分けて考へると、

$$\sigma_M = M \text{ 點における應力 (引張)}$$

$$\sigma_N = N \text{ 點における應力 (壓縮)}$$

として

$$\sigma_M = \frac{Px - Qy}{I/\eta} - \frac{Q}{2h_0}$$

$$\sigma_N = \frac{-Px + Qy}{I/\eta} - \frac{Q}{2h_0}$$

ここに

$$I = \frac{2}{3} h_0^3, \quad P = T \cos \varphi, \quad Q = T \sin \varphi$$

であるから、

$$\sigma_M = \frac{T}{2h_0} \left\{ 3 \frac{x}{h_0} \cdot \frac{\eta}{h_0} \cos \varphi - \left(3 \frac{y}{h_0} \cdot \frac{\eta}{h_0} + 1 \right) \sin \varphi \right\}$$

$$\sigma_N = -\frac{T}{2h_0} \left\{ 3 \frac{x}{h_0} \cdot \frac{\eta}{h_0} \cos \varphi - \left(3 \frac{y}{h_0} \cdot \frac{\eta}{h_0} - 1 \right) \sin \varphi \right\}$$

μ = 引張側の應力係數

ν = 壓縮側の應力係數

とおくと、

$$\left. \begin{aligned} \mu &= 3 \frac{x}{h_0} \cdot \frac{\eta}{h_0} \cos \varphi - \left(3 \frac{y}{h_0} \cdot \frac{\eta}{h_0} + 1 \right) \sin \varphi \\ \nu &= 3 \frac{x}{h_0} \cdot \frac{\eta}{h_0} \cos \varphi - \left(3 \frac{y}{h_0} \cdot \frac{\eta}{h_0} - 1 \right) \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

齒の縁においては、 $\eta = h_0$ において

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 &= 3 \frac{x}{h_0} \cos \varphi - \left(3 \frac{y}{h_0} + 1 \right) \sin \varphi \\ \nu_0 &= 3 \frac{x}{h_0} \cos \varphi - \left(3 \frac{y}{h_0} - 1 \right) \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31a)$$

但し、上の μ, ν, μ_0, ν_0 は、Single Contact の場合の應力係数である。

Multiple Contact の場合の應力係数は、第 1 番目の組の歯について、

$$\sigma_M = \frac{T'}{2h_0} \left\{ 3 \frac{x'}{h_0} \cdot \frac{\eta}{h_0} \cos \phi' - \left(3 \frac{y'}{h_0} \cdot \frac{\eta}{h_0} + 1 \right) \sin \phi' \right\}$$

$$\sigma_N = - \frac{T'}{2h_0} \left\{ 3 \frac{x'}{h_0} \cdot \frac{\eta}{h_0} \cos \phi' - \left(3 \frac{y'}{h_0} \cdot \frac{\eta}{h_0} - 1 \right) \sin \phi' \right\}$$

において、

$$T' = f T^*$$

を用ひて、

$$\sigma_M = \frac{T}{2h_0} f \left\{ 3 \frac{x'}{h_0} \cdot \frac{\eta}{h_0} \cos \phi' - \left(3 \frac{y'}{h_0} \cdot \frac{\eta}{h_0} + 1 \right) \sin \phi' \right\}$$

$$\sigma_N = - \frac{T}{2h_0} f \left\{ 3 \frac{x'}{h_0} \cdot \frac{\eta}{h_0} \cos \phi' - \left(3 \frac{y'}{h_0} \cdot \frac{\eta}{h_0} - 1 \right) \sin \phi' \right\}$$

故に、

$$\left. \begin{aligned} \mu' &= f \cdot \left\{ 3 \frac{x'}{h_0} \cdot \frac{\eta}{h_0} \cos \phi' - \left(3 \frac{y'}{h_0} \cdot \frac{\eta}{h_0} + 1 \right) \sin \phi' \right\} \\ \nu' &= f \cdot \left\{ 3 \frac{x'}{h_0} \cdot \frac{\eta}{h_0} \cos \phi' - \left(3 \frac{y'}{h_0} \cdot \frac{\eta}{h_0} - 1 \right) \sin \phi' \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (32)$$

最大應力係数は、 $\eta = h_0$ とおいて、

$$\left. \begin{aligned} \mu'_0 &= f \cdot \left\{ 3 \frac{x'}{h_0} \cos \phi' - \left(3 \frac{y'}{h_0} + 1 \right) \sin \phi' \right\} \\ \nu'_0 &= f \cdot \left\{ 3 \frac{x'}{h_0} \cos \phi' - \left(3 \frac{y'}{h_0} - 1 \right) \sin \phi' \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (32a)$$

かくして、Load factor f の値が、作用線上の點の函数として Cycle を描く時、 μ', ν' の値も決定出来るから、夫々驅動車及び従動車の歯に對して Stress Cycle を描く事も可能である。

但し、計算にあつては、 $y = t$ (齒厚の $1/2$) として行つて大差はない。

第 VII 章 計算例及び結言

以上の方法によつて、モジュール 2.5、齒數比は全部 1:1 とし、次の様な 4 例について計算した。モジュール 2.5、齒數 35 にえらんだのは、Baud 及び Peterson の與へた結果^{1),2)} と比較してみたかつたからであり、壓力角 20° 及びフルマーク齒車の例は、壓力角のちがひと、正規齒車でない場合の結果をみたかつたからである。

例	齒數	壓力角	種 類	啮合率
1	35	14.5°	正規齒車	2.004
2	35	20°	同上	1.687
3	35	$14.5'$	標準フルマーク齒車	1.898
4	100	14.5°	正規齒車	2.324

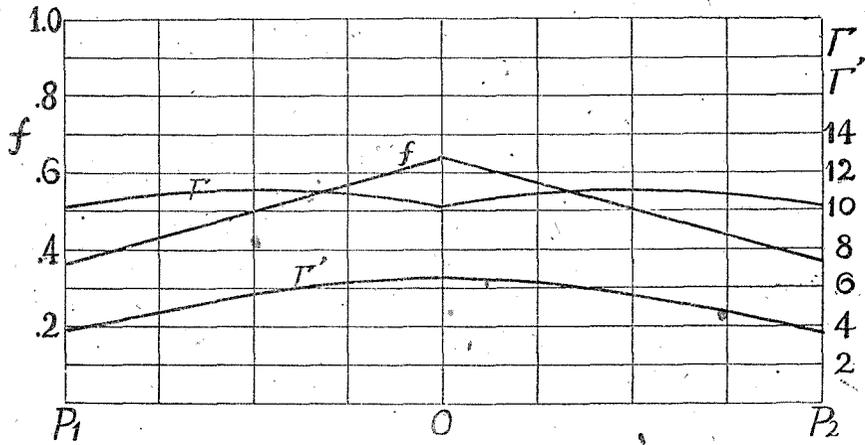


Fig. 8a

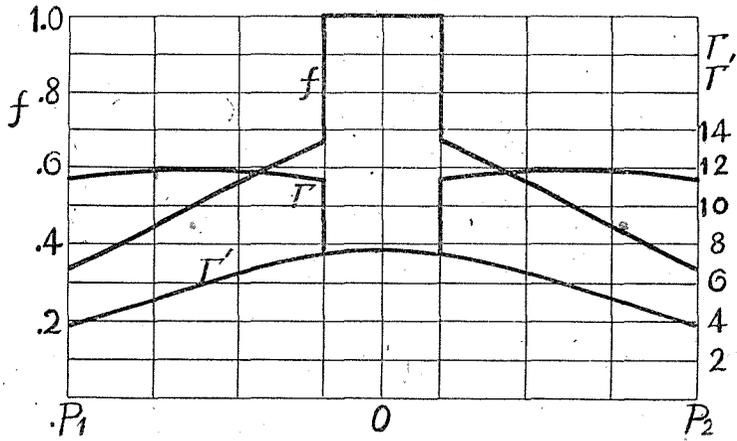


Fig. 8b

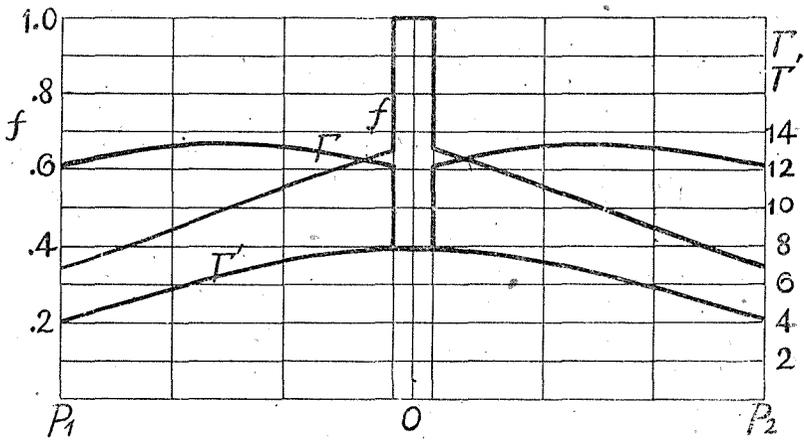


Fig. 8c

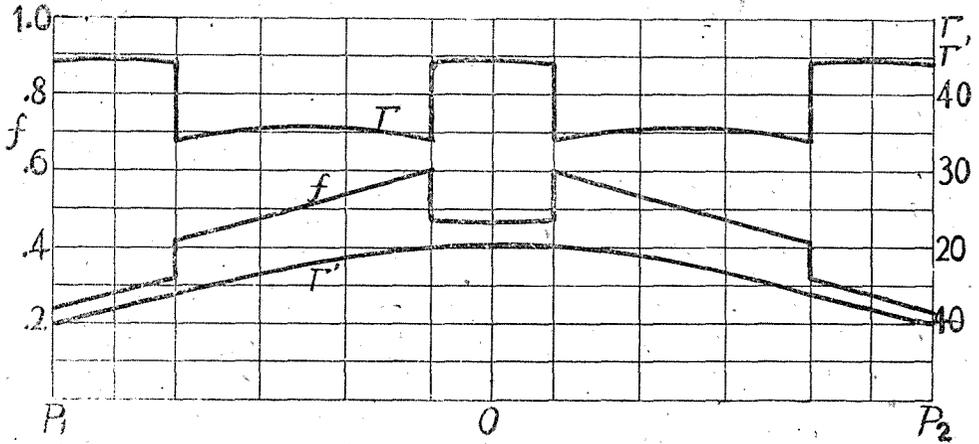


Fig. 8 d

Load Cycle は Fig. 8 に示す. 之でみると, Load Cycle の形は, 嚙合率 n のちがひによつてこそ大きな差異は現れるが, 大體において, Baud 及び Peterson 氏の得た結果とは大差なく, 壓力角や, 轉位のあるなしによつては, ただそれによつて嚙合率に變化がある爲の差異の外は大きな影響はない.

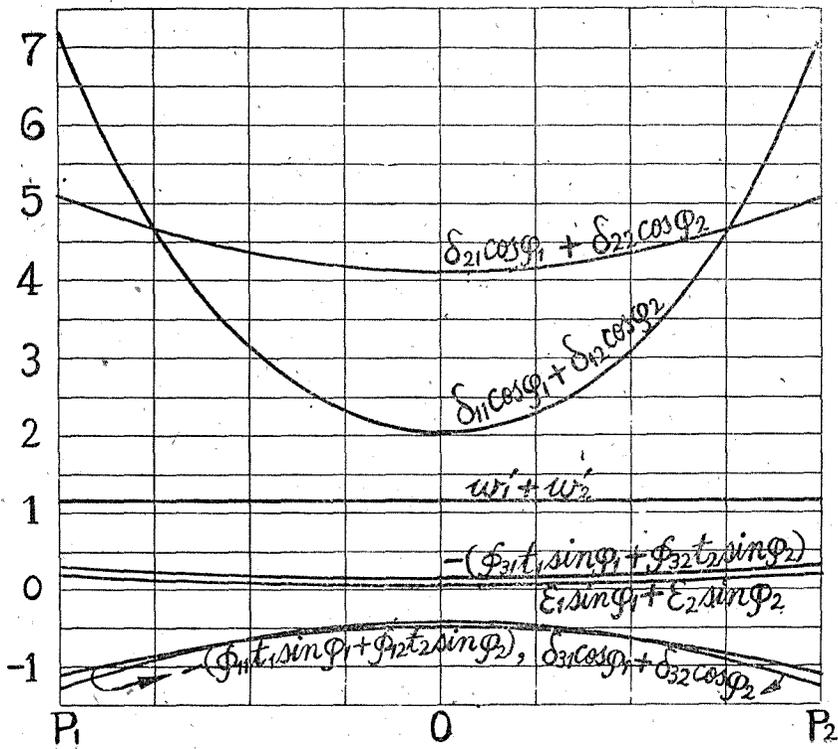


Fig. 9

新しく考慮に入れた変形の要素がどの程度効いて来るかをみたのが Fig. 9 で、第IV章式 (26a) の括弧内の項を、第1の例について圖示した。他の例でもその傾向は同じである。但し、ヤング係数 E を乗じた値で示してある。これで見ると、兩者の考へなかつた新しい要素が相當の割合を示す事を知る。しかし結果においては、互に相殺するものもあるので、Load Cycle の形にまでは大きな變化を來さないですむ。

次に、齒の變形に対する抵抗、即ち齒の剛性がどう變るかを見るために、 Γ' 及び Γ の値を Fig. 8 に示した。ここに Γ' は Single Contact の場合の1組の齒の総合的剛度が、作用線上に移動する接觸點の位置によつて變化する有様を示し、 Γ は、嚙合率を考慮に入れた場合の Multiple Contact の齒の総合的剛度で、嚙合率 $n > 1$ であれば、同時に2枚以上の齒が嚙合ふ範圍では、齒の剛度が著しく増す事がわかる。但し、齒車の材料が同じとして、 Γ' 、 Γ は E で割つた値を示してゐる。

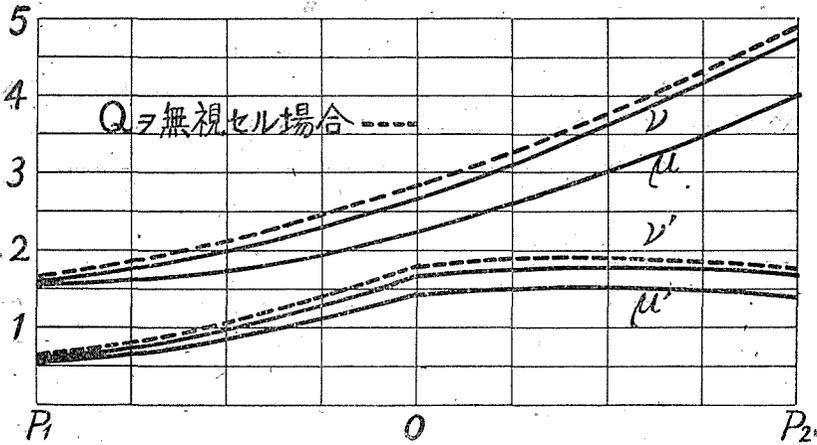


Fig. 10 a

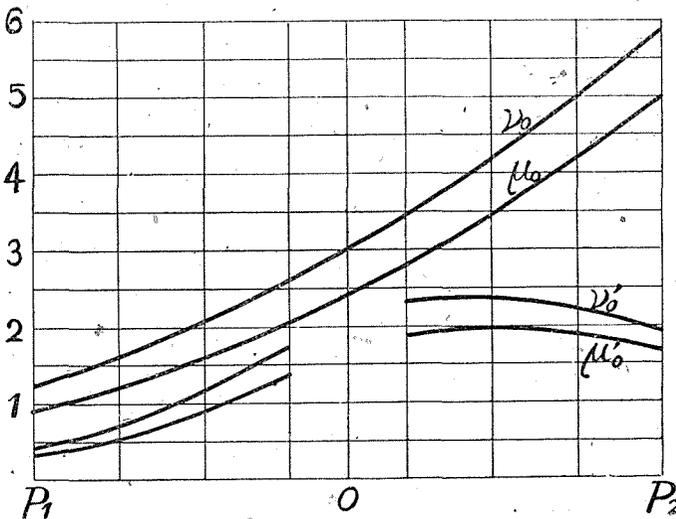


Fig. 10 b

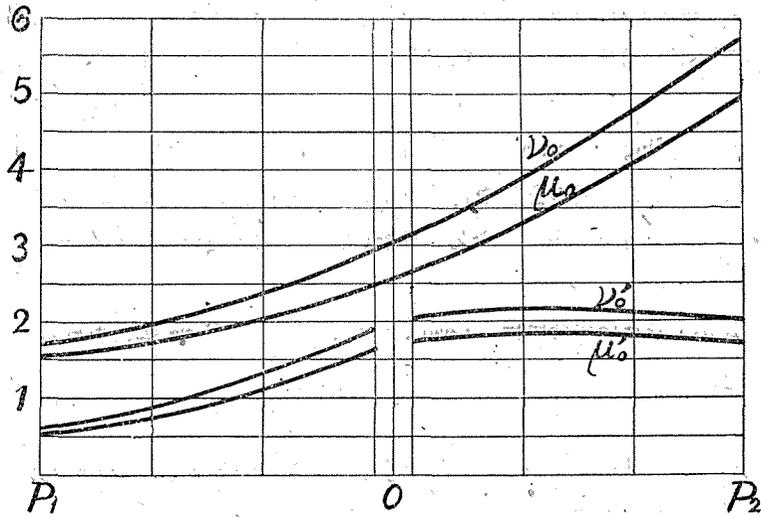


Fig. 10 c

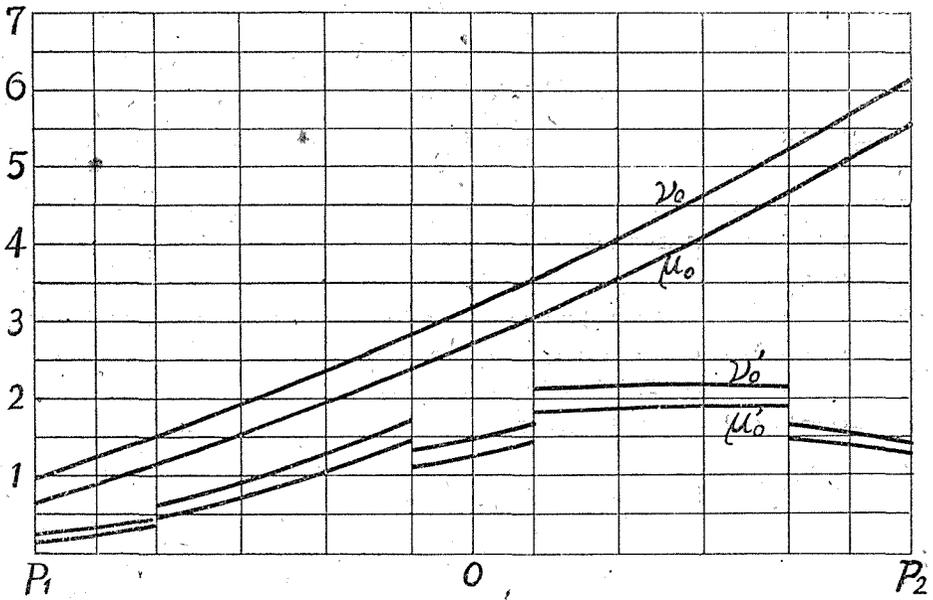


Fig. 10 d

歯車の振りに對する剛度は、單位ピッチを週期として變化するが、齒の負荷及び齒本の應力は、嚙合の全區間にわたつて變動する。

更に、嚙合率 n が整数でない場合には、同時に嚙合ふ齒の枚數が變化するため、剛度においては、1 ピッチの中で更に階段的に 2 つに分れ、Load factor の變化は、階段的に幾度かその有様が變る。

Stress Cycle は Fig. 10 に示すが、之によると、壓縮側の應力が常に引張側の應力よりも高く現れており、Baud 及び Peterson 氏の實驗¹⁾ の傾向と一致する。但し、應力集中の度合を考慮してゐ

ない。Baud 氏等の解析では、 P の項だけを採用してゐるから、このちがひは説明出来ない。但し、Fig. 10 で、 a は歯本の軸心より $0.8m$ の點における應力係数を示し、他は縁における最大應力係数を示してゐる。

全般的に云つて、Single Contact の齒車は不利であり、嚙合率は 2 未滿に設計するよりも、2 より多少でも大きくとるのが、齒の強度や磨耗の點から見てはるかに有効である事がわかる。そして實用になる齒車では、 n が 3 より大となる事はないと云つてよいから、上の例ですべての場合は類推される。

但し、速度比が 1 でない場合には、Load Cycle や Rigidity Cycle 等における左右對稱性は失はれるであらう。

此の論文は、一貫して久野教授の御指導によるものであり、著者の犯した幾多の誤謬に對して、嚴正な御批判と、懇切丁寧な御教導とを戴いた。ここに、先生に對し、深甚の謝意を述べる次第である。

引用文献及脚註

- 1) R. V. Baud and R. E. Peterson: "Load and Stress Cycles in Gear Teeth". Mech. Eng. Vol. 51 (1929), No. 9, p. 653.
- 2) R. E. Peterson: "Load and Deflection Cycles in Teeth". Proceedings of the 3rd International Congress for Applied Mechanics. Vol. II (1930), p. 382.
- 3) 本文第 II 章, § 5, 2° 参照.
- 4) S. Timoshenko and R. V. Baud: "The Strength of Gear Teeth" Mech. Eng. Vol. 48 (1926), No. 11, p. 1105.
- 5) "機械工學便覽" 材料力學の項, その他材料力學の Text Book.
- 6) A. Föppl: "Vorlesungen über Technische Mechanik" Bd. V.
- 7) Timoshenko and Lessels: "Applied Elasticity".
- 8) 小野鑑正: "材料力學".
- 9) 式 (23) は、齒の接觸點附近の曲率が零として求めた結果と一致する。