



Title	熱傳導率測定の誤差に関する一計算
Author(s)	小野寺, 眞作; Onodera, Shinsaku
Citation	北海道大學工學部彙報, 4, 69-80
Issue Date	1950-08-01
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40459
Type	departmental bulletin paper
File Information	4_69-80.pdf



熱傳導率測定の誤差に関する一計算

助手 小野寺眞作

(昭和25年2月4日受理)

Some Calculations on the Error Caused in the Process of Measuring Thermal Conductivity

Shinsaku Onodera

Abstract

Among the several methods of measuring thermal conductivity, the so-called "comparison method" is of much facility and reliable in precision for the material where the thermal conductivity takes smaller value.

However, the end effect owing to the finite extent of material being inevitable, difference must be considered between the true-value and the value obtained by this method, the magnitude of which relates mainly to the thickness-span ratio of the measuring apparatus.

This problem was formerly investigated by T. Tanasawa for the plate-shaped material, but the study referred only to some special cases.

In this paper, the author treats the problem for general case by solving a two-body problem, and he verifies the influence of temperature gradient in heating surface upon the increase of the error theoretically. The conclusions derived from the solutions are shown in diagrams ready for practical use, and they naturally involve the above mentioned cases of Tanasawa.

目 次

1. 緒 言	69
2. $\lambda_1 = \lambda_2$ の場合に對する加熱面温度勾配の影響	71
3. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ なる一般的な場合の誤差	74
4. 結 言	80

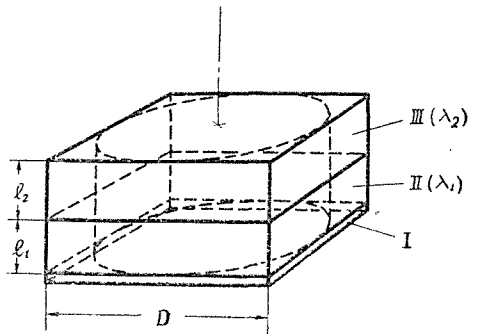
1. 緒 言

一般に保温材、建築用材等に於けるが如き比較的低い熱傳導率の測定には、主として試料に定常的な温度勾配を生ぜしめる方法と、週期的熱流によつて試料中に温度波を生ぜしめて、その振幅減衰率又は位相差より算出する方法とがあり、そのうち前者には、直接熱量を測定して求める場合と、試料を或る既知の熱傳導率の標準物質と比較して求める場合とがある。この最後の方法が、一

般に比較法と稱せられ、實驗が容易で、しかも精度も期待し得る方法である。

この比較法によつて熱傳導率を測定する場合には、使用計器類の精度に基づく不可避免的な誤差の外に試料の大きさが有限であるため、測定装置の側面からの熱放散に基づく誤差をも考慮しなければならぬ。この方法では、試料の形が平面型の場合と圓筒形の場合とがあるが、普通行われるのは前者である。

即ち、この場合には第1圖に於けるが如く、加熱板 I の上に熱傳導率既知 (これを λ_1 とする) なる基準板 II を置き、更にその上に熱傳導率未知 (これを λ_2 とする) なる試料板 III を置いて、次の如き計算によつて λ_2 を求める。



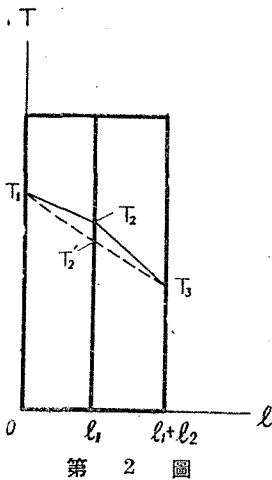
第 1 圖

今、基準板 II 及び試料 III の厚さを夫々 l_1 , l_2 、面積を F とすれば、 Δt 時間に加熱板 I から出て基準板 II 及び試料 III を通過する熱量 Q は、

$$Q = \frac{\lambda_1 (T_1 - T_2) F \Delta t}{l_1} = \frac{\lambda_2 (T_2 - T_3) F \Delta t}{l_2}$$

これより

$$\lambda_2 = \lambda_1 \frac{l_2}{l_1} \frac{T_1 - T_2}{T_2 - T_3} \dots\dots\dots (1)$$



第 2 圖

然しながら、これは一次元熱傳導を假定した上での計算であつて、実際には側面から一部の熱の逃げ去るために、 T_2 は一次元の場合よりも低下する (第2圖参照)。今これを T_2' とし、またその温度低下の量を $\epsilon (T_2 - T_3)$ とすれば、式 (1) に於いて T_2 の代わりに、より小なる T_2' を用ゐることにより、 λ_2 は一次元の場合よりも大なる値を示すことになる。この時の λ_2 を λ_2' とし、且つ

$$\frac{\lambda_2'}{\lambda_2} - 1 = \epsilon$$

とすれば、

$$\lambda_2' = \lambda_2 (1 + \epsilon) = \lambda_1 \frac{l_2}{l_1} \frac{T_1 - T_2'}{T_2' - T_3} = \lambda_1 \frac{l_2}{l_1} \frac{(T_1 - T_2) + \epsilon (T_2 - T_3)}{(T_2 - T_3) - \epsilon (T_2 - T_3)}$$

$$\doteq \lambda_2 (1 + \epsilon) + \epsilon \lambda_2 \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_2}$$

$$\therefore \epsilon \doteq \epsilon \left(1 + \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_2} \right) \dots\dots\dots (2)$$

著者は、この場合について、測定試料の面の大きさと厚さの比、試料と基準板の熱傳導率の比、並びに試料と基準板の厚さの比が、この誤差に及ぼす影響につき理論的な検討を行つた。計算は試料と基準板の境界面の、中央軸心部を通る等温面が、側面より熱の放散の行われることによつて如何程傾斜するかと言ふことに基づくものであるから、この際、加熱面に軸心部より周邊部に向かつて遞減する温度勾配があれば、上記の等温面は一層その傾斜を増加し、これに伴つて誤差もまた増加することになる。著者はこの點に關しても検討を行つたが、記述の便宜上、まず $\lambda_1 = \lambda_2$ なる普通の場合について加熱面温度勾配の影響を考慮し、しかる後に $\lambda_1 \neq \lambda_2$ なる一般的な場合に對する計算を行うこととした。

なお、この問題中の一二の特別な場合については、既に東北大學の棚澤泰氏の研究¹⁾がある。

今第1圖に於いて、平板の内部に存在する直径 D なる最大の圓を底とし、 $(l_1 + l_2)$ を高さに持つ圓筒の下底を T_1 に保ち、圓筒側面及び上底を T_2 とすれば、表面の熱抵抗を無視した場合であるから側面の影響は最大となる。次節以下の計算はこの圓筒内の温度分布の式を、圓筒座標に於ける軸對稱定常熱傳導の微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial l^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

を解くことによつて求め、この解に基いて誤差 e を決定せんとするものである。但し u は温度を表わす。

2. $\lambda_1 = \lambda_2$ の場合に對する加熱面温度勾配の影響

加熱面の温度勾配の式に、次式

$$[u]_{l=0} = T_1 + (T_2 - T_1) \left\{ 1 - \alpha \left(\frac{r^2}{D^2} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

但し、 α は 1 より大ならざる常數とす。

を用うれば、問題は微分方程式 (3) を境界條件

$$\left. \begin{aligned} l = 0, \quad u &= T_1 + (T_2 - T_1) \left\{ 1 - \alpha \left(\frac{r^2}{D^2} \right) \right\}, \\ l = l_1 + l_2, \quad u &= T_2, \\ r = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} &= 0, \\ r = \frac{D}{2}, \quad u &= T_2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

1) 「傳熱率測定器の寸法に依る誤差に就て」, 機械學會誌, 33卷 161號, 325頁 (昭5-9).

の下に解くことに歸着する。原點を T_3 に移して計算を進めると、まず式 (5) の第3式及び第4式より

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cosh \rho_n l + B_n \sinh \rho_n l) J_0(\rho_n r)$$

但し、 A_n 及び B_n は積分常數、 ρ_n は $J_0\left(\rho_n \frac{D}{2}\right) = 0$ を満足する如き値とす。

次に式 (5) の第1式より

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\rho_n r) &= (T_1 - T_3) \left\{ 1 - a \frac{r^2}{\left(\frac{D}{2}\right)^2} \right\} \\ &= \frac{2}{\left(\frac{D}{2}\right)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho_n r)}{\left\{ J_1\left(\rho_n \frac{D}{2}\right) \right\}^2} \int_0^{\frac{D}{2}} (T_1 - T_3) \left\{ 1 - a \frac{r^2}{\left(\frac{D}{2}\right)^2} \right\} J_0(\rho_n r) r dr \end{aligned}$$

故に

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\left(\frac{D}{2}\right)^2} \frac{1}{\left\{ J_1\left(\rho_n \frac{D}{2}\right) \right\}^2} \int_0^{\frac{D}{2}} (T_1 - T_3) \left\{ 1 - a \frac{r^2}{\left(\frac{D}{2}\right)^2} \right\} J_0(\rho_n r) r dr \\ &= \frac{2(T_1 - T_3)}{\left(\frac{D}{2}\right)^2 \left\{ J_1\left(\rho_n \frac{D}{2}\right) \right\}^2} \left\{ \frac{1}{\rho_n} \frac{D}{2} J_1\left(\rho_n \frac{D}{2}\right) - \left(\frac{a}{\left(\frac{D}{2}\right)^2} \int_0^{\frac{D}{2}} r^3 J_0(\rho_n r) dr \right) \right\} \\ &= \frac{2(T_1 - T_3)}{\left(\frac{D}{2}\right)^2 \left\{ J_1\left(\rho_n \frac{D}{2}\right) \right\}^2} \left[\frac{1}{\rho_n} \frac{D}{2} J_1\left(\rho_n \frac{D}{2}\right) - \frac{a}{\rho_n^4 \left(\frac{D}{2}\right)^2} \left\{ \left(\rho_n \frac{D}{2}\right)^3 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times J_1\left(\rho_n \frac{D}{2}\right) - 2\left(\rho_n \frac{D}{2}\right)^2 J_2\left(\rho_n \frac{D}{2}\right) \right\} \right] \\ &= 2(T_1 - T_3) \left[\frac{1 - a}{\left(\rho_n \frac{D}{2}\right) J_1\left(\rho_n \frac{D}{2}\right)} + \frac{2a \cdot J_2\left(\rho_n \frac{D}{2}\right)}{\left(\rho_n \frac{D}{2}\right)^2 \left\{ J_1\left(\rho_n \frac{D}{2}\right) \right\}^2} \right] \end{aligned}$$

又 式 (5) の第2式より

$$B_n = -A_n \coth \rho_n (l_1 + l_2)$$

故に

$$\begin{aligned} u &= 2(T_1 - T_3) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \cosh \rho_n l - \coth \rho_n (l_1 + l_2) \sinh \rho_n l \right\} \\ &\quad \times \left[\frac{1 - a}{\left(\rho_n \frac{D}{2}\right) J_1\left(\rho_n \frac{D}{2}\right)} + \frac{2a J_2\left(\rho_n \frac{D}{2}\right)}{\left(\rho_n \frac{D}{2}\right)^2 \left\{ J_1\left(\rho_n \frac{D}{2}\right) \right\}^2} \right] \end{aligned}$$

原點を T_3 より 0 に戻し、且つ $r=0$, $l=l_1$ とすれば、

$$T_2' = T_3 + 2(T_1 - T_3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh p_n l_2}{\sinh p_n (l_1 + l_2)} \times \left[\frac{1-a}{\left(p_n \frac{D}{2}\right) J_1\left(p_n \frac{D}{2}\right)} + \frac{2a J_2\left(p_n \frac{D}{2}\right)}{\left(p_n \frac{D}{2}\right)^2 \left\{J_1\left(p_n \frac{D}{2}\right)\right\}^2} \right] \dots (6)$$

上式に於いて $a = \frac{1}{5}$ とすれば、

$$T_2' = T_3 + 2(T_1 - T_3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh p_n l_2}{\sinh p_n (l_1 + l_2)} \times \left[\frac{4}{5} \frac{1}{\left(p_n \frac{D}{2}\right) J_1\left(p_n \frac{D}{2}\right)} + \frac{2}{5} \frac{J_2\left(p_n \frac{D}{2}\right)}{\left(p_n \frac{D}{2}\right)^2 \left\{J_1\left(p_n \frac{D}{2}\right)\right\}^2} \right] (7)$$

また $a = \frac{2}{5}$ ならば、

$$T_2' = T_3 + 2(T_1 - T_3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh p_n l_2}{\sinh p_n (l_1 + l_2)} \times \left[\frac{3}{5} \frac{1}{\left(p_n \frac{D}{2}\right) J_1\left(p_n \frac{D}{2}\right)} + \frac{4}{5} \frac{J_2\left(p_n \frac{D}{2}\right)}{\left(p_n \frac{D}{2}\right)^2 \left\{J_1\left(p_n \frac{D}{2}\right)\right\}^2} \right] (8)$$

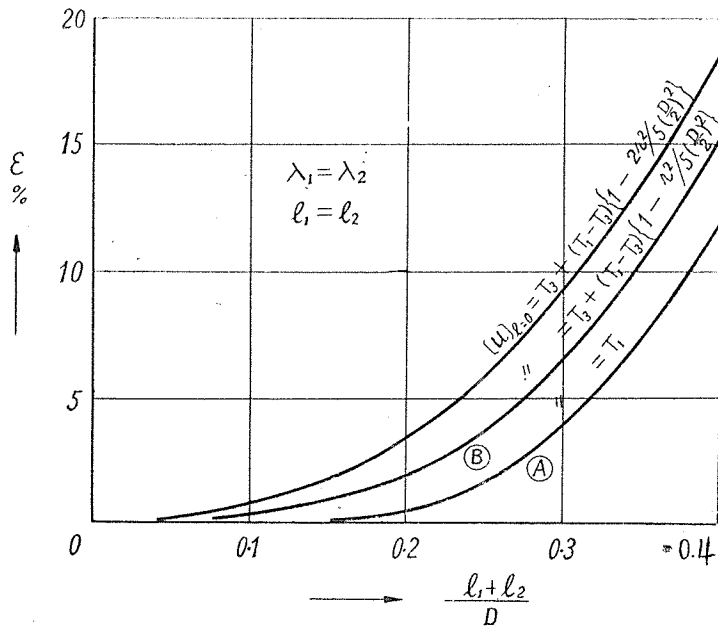
を得る。

$l_1 = l_2$ なる場合に對して式 (7) 及び (8) より ε を求め、これを $(l_1 + l_2)/D$ に對して圖示すれば第 3 圖の如くなる。圖中の曲線 (A) は加熱面に溫度勾配のない場合、即ち式 (6) に於て $a = 0$ の場合であり、前記棚澤氏の解に相當する。

敘上の計算結果より次の如く結論される。

i) 加熱面に溫度勾配のある場合には、加熱面が一樣な溫度である場合に比して ε (従つて誤差 e) は増加し、増加の割合は $(l_1 + l_2)/D$ の小なる程著しい。

ii) この誤差の増加の程度を具體的に知るために、たとえば、加熱面が一樣な溫度である場合に誤差 e が 1% (第 3 圖に示す如き場合、 ε に於いては 0.5%) となる點を考へて見ると、溫度勾配のない場合には、 $(l_1 + l_2)/D = \frac{1}{5}$ の點で $\varepsilon = 0.4\%$ ($e = 0.8\%$) となるが、式 (4) にて $a = \frac{1}{5}$ とせるが如き溫度勾配があれば、この點に於ける ε は 1.9% ($e = 3.6\%$) に増加し、しかして溫度勾配のある場合にも、溫度勾配のない場合と等しい ε の値を保つ爲には、 $(l_1 + l_2)/D$ は 0.11 でなければならぬことを知る。



第 3 圖

これを略言すれば、加熱面が一樣な温度で、且つ $\lambda_1 = \lambda_2$, $l_1 = l_2$ なる時、 $(l_1 + l_2)/D$ が $\frac{1}{5}$ 以下であれば誤差は 1% 以下に止められるが、式 (4) にて $a = \frac{1}{5}$ とせるが如き温度勾配、即ち、たとえば中央軸心部の温度差が 20°C、周辺部の温度差が 16°C で、その中間を 2 次曲線的に減少するような温度勾配があれば、 $(l_1 + l_2)/D$ が $\frac{1}{10}$ とならなければ誤差は 1% 以下とはなし得ぬこととなり、之は試験装置の大きさを 2 倍 (linear dimension にて) にせねばならぬことを示す。

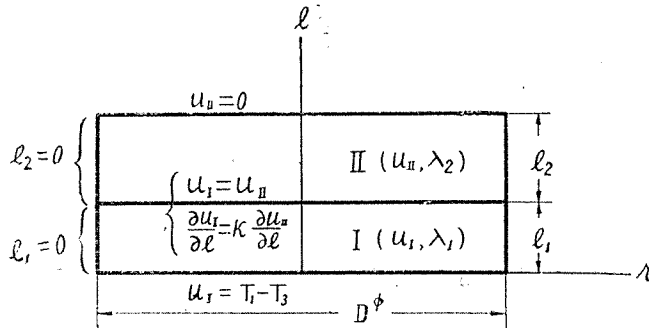
なおまた他の一例として、第 3 圖の曲線 (A) 及び (B) の中間の曲線を考えれば、中央軸心部温度差が 20°C、周辺部温度差が 18°C の場合に、誤差を温度差が一樣に 20°C の場合と同じ程度にとどめるためには、試料及び基準板の大きさを

$$\frac{1}{0.15/0.2} \cong 1.33$$

より、1.3 倍強にせねばならぬことも、上記の例と同様にして考察し得る。

3. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ なる一般的な場合の誤差

前節に於いて、加熱面に温度勾配のある場合に、温度勾配のない場合よりも誤差の増加すること、並びにその増加の程度を、 $\lambda_1 = \lambda_2$ なる場合について検討したから、以下本節に於いては、簡単のために、加熱面が一樣な温度であるとして計算を進め、温度勾配のある場合は、この結果より前節の計算に基づいて類推するに止める。



第 4 圖

今基準板 I 及び試料 II に対する温度分布の式を夫々 u_I 及び u_{II} とし、原點を T_3 に移して考えることとすれば、問題は微分方程式 (3) を、圓板 I に対しては

$$\left. \begin{aligned} l = 0, & \quad u_I = T_1 - T_3, \\ r = 0, & \quad \frac{\partial u_I}{\partial r} = 0 \\ r = \frac{D}{2}, & \quad u_I = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

また、圓板 II に対しては

$$\left. \begin{aligned} l = l_1 + l_2, & \quad u_{II} = 0, \\ r = 0, & \quad \frac{\partial u_{II}}{\partial r} = 0, \\ r = \frac{D}{2}, & \quad u_{II} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

なる境界条件の下に解き、かくして得られた u_I 及び u_{II} に含まれる合計 2 個の未定常数を、 u_I 及び u_{II} を、圓板 I 及び II の境界面 $l = l_1$ に於ける条件

$$\left. \begin{aligned} u_I &= u_{II}, \\ \frac{\partial u_I}{\partial l} &= \kappa \frac{\partial u_{II}}{\partial l}, \quad \text{但し } \kappa = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

によつて接続することにより決定することに歸せられる。

式 (9) 及び (10) に於ける $r = 0$ 及び $r = \frac{D}{2}$ に對する境界条件より

$$u_I = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cosh p_n l + B_n \sinh p_n l) J_0(p_n r)$$

$$u_{II} = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cosh p_n l + D_n \sinh p_n l) J_0(p_n r)$$

但し, A_n, B_n, C_n, D_n は積分常数, p_n は $J_0\left(p_n \frac{D}{2}\right) = 0$ を満足する如き値とす.

式 (11) より

$$A_n \cosh p_n l_1 + B_n \sinh p_n l_1 = C_n \cosh p_n l_1 + D_n \sinh p_n l_1$$

$$A_n \sinh p_n l_1 + B_n \cosh p_n l_1 = \kappa (C_n \sinh p_n l_1 + D_n \cosh p_n l_1)$$

兩式より $1 - \kappa \neq 0$ として A_n, C_n を消去すれば,

$$A_n = \frac{\kappa (B_n - D_n) \tanh p_n l_1 - (B_n - \kappa D_n) \coth p_n l_1}{1 - \kappa}$$

$$C_n = \frac{(B_n - D_n) \tanh p_n l_1 - (B_n - \kappa D_n) \coth p_n l_1}{1 - \kappa}$$

よつて

$$u_I = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\kappa (B_n - D_n) \tanh p_n l_1 - (B_n - \kappa D_n) \coth p_n l_1}{1 - \kappa} \cosh p_n l + B_n \sinh p_n l \right\} J_0(p_n r)$$

$$u_{II} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(B_n - D_n) \tanh p_n l_1 - (B_n - \kappa D_n) \coth p_n l_1}{1 - \kappa} \cosh p_n l + D_n \sinh p_n l \right\} J_0(p_n r)$$

次に, 式 (9) 及び式 (10) の第1式より

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa (B_n - D_n) \tanh p_n l_1 - (B_n - \kappa D_n) \coth p_n l_1}{1 - \kappa} J_0(p_n r) \\ &= T_1 - T_3 \\ &= 2 (T_1 - T_3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(p_n r)}{\left(p_n \frac{D}{2}\right) J_n\left(p_n \frac{D}{2}\right)} \end{aligned}$$

及び

$$\frac{(B_n - D_n) \tanh p_n l_1 - (B_n - \kappa D_n) \coth p_n l_1}{1 - \kappa} \cosh p_n (l_1 + l_2) + D_n \sinh p_n (l_1 + l_2) = 0$$

これを B_n 及び D_n に関して整頓すれば,

$$(\kappa \tanh^2 p_n l_1 - 1) B_n + \kappa (1 - \tanh^2 p_n l_1) D_n = \frac{2 (T_1 - T_3) (1 - \kappa)}{\left(p_n \frac{D}{2}\right) J_1\left(p_n \frac{D}{2}\right)} \tanh p_n l_1$$

$$- (1 - \tanh^2 p_n l_1) B_n + \left\{ \kappa - \tanh^2 p_n l_1 + (1 - \kappa) \tanh p_n (l_1 + l_2) \tanh p_n l_1 \right\} D_n = 0$$

これを解くと

$$\left. \begin{aligned}
 B_n &= \frac{2(T_1 - T_2)(1 - \kappa)}{\left(\rho_n \frac{D}{2}\right) J_1\left(\rho_n \frac{D}{2}\right)} \frac{\tanh \rho_n l_1 \{ \kappa - \tanh^2 \rho_n l_1 + (1 - \kappa) \tanh \rho_n (l_1 + l_2) \tanh \rho_n l_1 \}}{\Delta} \\
 D_n &= \frac{2(T_1 - T_2)(1 - \kappa)}{\left(\rho_n \frac{D}{2}\right) J_1\left(\rho_n \frac{D}{2}\right)} \frac{\tanh \rho_n l_1 (1 - \tanh^2 \rho_n l_1)}{\Delta} \\
 \text{但し } \Delta &= (1 - \kappa) \tanh \rho_n l_1 \left\{ (1 - \kappa) \tanh \rho_n l_1 + (\kappa \tanh^2 \rho_n l_1 - 1) \tanh \rho_n (l_1 + l_2) \right\}
 \end{aligned} \right\} (12)$$

次に

$$\begin{aligned}
 B_n - D_n &= \frac{2(T_1 - T_2)(1 - \kappa)^2}{\left(\rho_n \frac{D}{2}\right) J_1\left(\rho_n \frac{D}{2}\right)} \frac{\tanh \rho_n l_1 \{ \tanh \rho_n (l_1 + l_2) \tanh \rho_n l_1 - 1 \}}{\Delta} \\
 B_n - \kappa D_n &= \frac{2(T_1 - T_2)(1 - \kappa)^2}{\left(\rho_n \frac{D}{2}\right) J_1\left(\rho_n \frac{D}{2}\right)} \frac{\tanh^2 \rho_n l_1 \{ \tanh \rho_n (l_1 + l_2) - \tanh \rho_n l_1 \}}{\Delta}
 \end{aligned}$$

故に

$$\begin{aligned}
 & \frac{\kappa(B_n - D_n) \tanh \rho_n l_1 - (B_n - \kappa D_n) \coth \rho_n l}{1 - \kappa} \\
 &= \frac{2(T_1 - T_2)(1 - \kappa)}{\left(\rho_n \frac{D}{2}\right) J_1\left(\rho_n \frac{D}{2}\right)} \frac{\tanh \rho_n l \{ \tanh \rho_n (l_1 + l_2) (\kappa \tanh^2 \rho_n l_1 - 1) + (1 - \kappa) \tanh \rho_n l_1 \}}{\Delta} \\
 & \times \frac{(B_n - D_n) \tanh \rho_n l_1 - (B_n - \kappa D_n) \coth \rho_n l_1}{1 - \kappa} \\
 &= \frac{2(T_1 - T_2)(1 - \kappa)}{\left(\rho_n \frac{D}{2}\right) J_1\left(\rho_n \frac{D}{2}\right)} \frac{\tanh \rho_n l_1 \tanh \rho_n (l_1 + l_2) (\tanh^2 \rho_n l_1 - 1)}{\Delta}
 \end{aligned}$$

故に 求むる解は

$$\begin{aligned}
 u_I &= 2(T_1 - T_2)(1 - \kappa) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho_n r)}{\left(\rho_n \frac{D}{2}\right) J_1\left(\rho_n \frac{D}{2}\right)} \frac{\tanh \rho_n l_1}{\Delta} \left[\left\{ \tanh \rho_n (l_1 + l_2) (\kappa \tanh^2 \rho_n l_1 - 1) \right. \right. \\
 & \left. \left. + (1 - \kappa) \tanh \rho_n l_1 \right\} \cosh \rho_n l + \left\{ \kappa - \tanh^2 \rho_n l_1 + (1 - \kappa) \tanh \rho_n (l_1 + l_2) \tanh \rho_n l_1 \right\} \sinh \rho_n l \right] \dots (13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{II} &= 2(T_1 - T_2)(1 - \kappa) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho_n r)}{\left(\rho_n \frac{D}{2}\right) J_1\left(\rho_n \frac{D}{2}\right)} \frac{\tanh \rho_n l_1}{\Delta} \left\{ \tanh \rho_n (l_1 + l_2) (\tanh^2 \rho_n l_1 - 1) \cosh \rho_n l \right. \\
 & \left. + (1 - \tanh^2 \rho_n l_1) \sinh \rho_n l \right\} \dots (14)
 \end{aligned}$$

原點を T_3 より 0 に戻し、且つ $r=0$, $l=l_1$ とすれば、

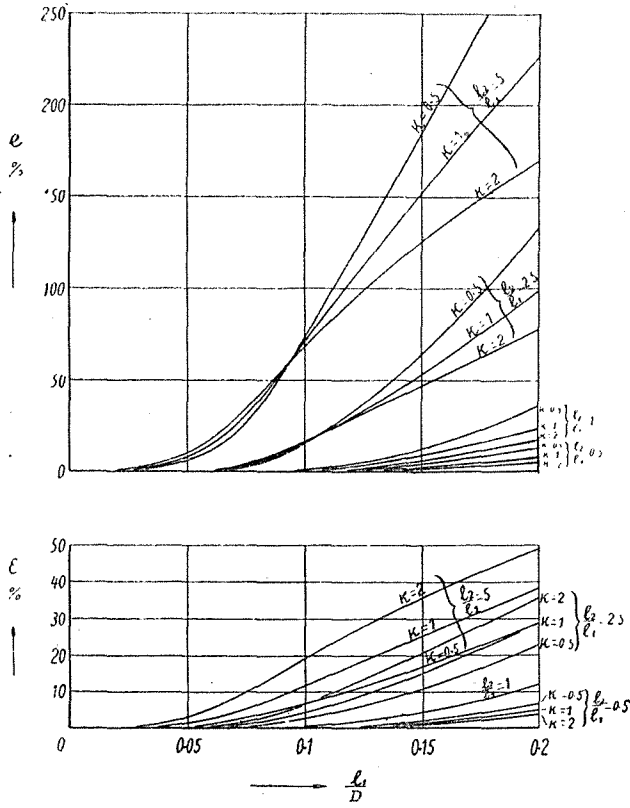
$$\begin{aligned}
 T_2' &= (u_{II})_{r=0, l=l_1} \\
 &= T_3 + 2(T_1 - T_3) (1-\kappa) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\rho_n \frac{D}{2}\right) J_1\left(\rho_n \frac{D}{2}\right)} \frac{\sinh \rho_n l_1}{\Delta} \left[\tanh \rho_n (l_1 + l_2) (\kappa \tanh^2 \rho_n l_1 - 1) \right. \\
 &\quad \left. + (1-\kappa) \tanh \rho_n l_1 + \tanh \rho_n l_1 \left\{ \kappa - \tanh^2 \rho_n l_1 + (1-\kappa) \tanh \rho_n (l_1 + l_2) \tanh \rho_n l_1 \right\} \right] \\
 &= T_3 + 2(T_1 - T_3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\rho_n \frac{D}{2}\right) J_1\left(\rho_n \frac{D}{2}\right)} \\
 &\quad \times \frac{\sinh \rho_n l_1 \{ \tanh \rho_n (l_1 + l_2) (\tanh^2 \rho_n l_1 - 1) + \tanh \rho_n l_1 (1 - \tanh^2 \rho_n l_1) \}}{\tanh \rho_n l_1 \{ (1-\kappa) \tanh \rho_n l_1 + (\kappa \tanh^2 \rho_n l_1 - 1) \tanh \rho_n (l_1 + l_2) \}} \\
 &= T_3 + 2(T_1 - T_3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\rho_n \frac{D}{2}\right) J_1\left(\rho_n \frac{D}{2}\right)} \\
 &\quad \times \frac{1}{\cosh \rho_n l_1} \frac{1}{1 + \frac{\kappa \tanh \rho_n l_1 \{ 1 - \tanh \rho_n (l_1 + l_2) \tanh \rho_n l_1 \}}{\tanh \rho_n (l_1 + l_2) - \tanh \rho_n l_1}} \\
 &= T_3 + 2(T_1 - T_3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\rho_n \frac{D}{2}\right) J_1\left(\rho_n \frac{D}{2}\right)} \frac{1}{\cosh \rho_n l_1} \frac{1}{1 + \kappa \frac{\tanh \rho_n l_1}{\tanh \rho_n l_2}} \dots \dots (15) \\
 &= (u_{II})_{r=0, l=l_1}
 \end{aligned}$$

以上の計算に於いては $1-\kappa \neq 0$ として取り扱つて來たが、次に $1-\kappa=0$ 、即ち $\lambda_1 = \lambda_2$ の場合を考えると、最早圓板 I 及び II に對して別個の解を求める必要はなく、圓板 I 及び II を均質且つ一體と考えた場合たる棚澤氏の解が求むるものであるが、これはまた式 (15) に於いて $\kappa=1$ と置くことによつても求められる故、 $1-\kappa \neq 0$ として求めた式 (15) は $1-\kappa=0$ の場合にも適用し得ることを知る。

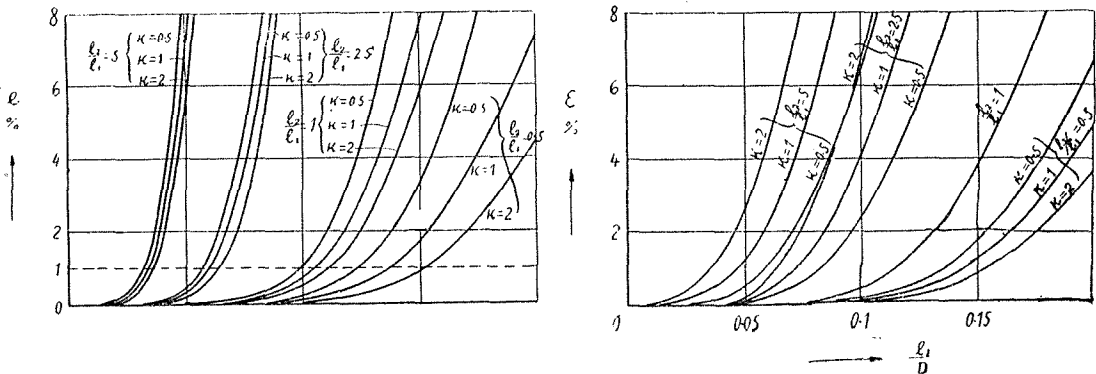
なおまた、棚澤氏の論文に於ける、氏の所謂誤差最大の場合に對する解も、式 (15) に於いて $\kappa=1$ と置くことによつて得られることは明らかである。

式 (15) に基づいて ε 、更に式 (2) によつて e を求め、これらの値を $\frac{l_2}{l_1}$ 及び κ を副變數として $\frac{l_1}{D}$ に對して圖示すれば 第 5 圖 を得る。第 5 圖 に於いて最も必要とされる ε 又は e の小さな部分を擴大して示せば 第 6 圖 の如くである。なお式 (2) は近似式であり、 ε の大きな場合には過小な値を與えるので、第 5 圖 の一部は正しくない値を示しているが、實際に必要な 第 6 圖 の範圍内では充分な精度を有する。

敘上の結果より次の如く結論される。



第 5 圖



第 6 圖

i) $\frac{l_1}{D}$, $\frac{l_2}{l_1}$, κ の任意の値に対する誤差 e は、图中的曲線に示される如くである。

今 $e = 1\%$ なる水平線を引けば、この水平線と各曲線との交點は、夫々の場合に對する、誤差を 1% 以内にとどめ得べき $\frac{l_1}{D}$ の値を示す。

たとえば、 $\lambda_1 = 0.2 \text{ kcal/mh}^\circ\text{C}$ なるベークライト板を基準板として $\lambda_2 = 0.1 \text{ kcal/mh}^\circ\text{C}$ なる保温材を試験する場合 $\left(\kappa = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 0.5 \right)$, $\frac{l_2}{l_1} = 0.5$ ならば

$$\frac{l_1}{D} < \frac{1}{8.5}$$

の時に誤差を 1% 以下になし得ることとなる。図中の曲線上にない任意の點に對しても、内挿法によつてこの限界を定めることが出来る。

ii) $\frac{l_2}{l_1}$ の大なる程曲線は傾斜を増加するので、 $\frac{l_1}{D}$ が少しく増加しても誤差が著しく増加することがある。

iii) 第 6 圖に示すのは加熱面に温度勾配のない場合であるが、温度勾配のある場合にも、前節の第 3 圖及びこれに對する説明より、その影響を容易に類推することが出来る。勿論、式 (15) に對して加熱面温度勾配の影響を加味することもまた容易である。

4. 結 言

比較法によつて熱傳導率を測定する際 (平面型試料の場合) に生ずる、測定装置の大きさが有限なることに基づく誤差、並びに加熱面の温度勾配がこの誤差の大きさに及ぼす影響を理論的に検討して、第 6 圖及び第 3 圖に示せるが如き結果を得た。しかしてこの結果には、かつて棚澤氏の研究された二三の特別なる場合に對する解を含むものである。

終りに、終始御懇切なる御鞭撻と御指導とを賜つた大賀教授並びに齋藤助教授、また種々有益なる御助言を戴いた研究室の堀哲夫氏、これらの方々に深甚なる感謝の意を表わす次第である。