非線型回路の定常解*

片山辰雄

(昭和25年1月30日受理)

Steady State Solutions of Non-linear Electrical Circuits

Tatsuo Katayama

A new method is proposed to get steady state solutions of non-linear differential equations of electrical circuits. This method is based on the perturbation one and gives the most accurate values of fundamental harmonic and higher harmonics at the same time. Moreover it admits to discuss the stability of solutions.

1. 緒　　　言

非直線特性は電氣的或は機械的振動を取扱う場合屢々遭遇するものであつて，その研究も古くから行われ，之に關する文献も枚擧に暇ない程である．一般に非線型問題の解決は非線型微分方程式の解を求め，その安定性を吟味すれば宜いのであるが，微分方程式の解を求める事は概ね困難であつて，問題毎に夫々特種の工夫が凝らされて居る．之等の中でも van der Pol 氏[1] の常數變化法の如きは，直観的な點に於て優れて居るのみならず，現象の説明にも充分であり，且つ適用の範圍も廣い．又 Kryloff 及び Bogoliuboff 兩氏[2] の非線型微分方程式を直接解くことなく，現象を解明する方法も極めて興味あるものである．斯様に多數の諸氏の研究によつて，非線型問題も線型に近い場合は，多くの現象が解明せられ研究の餘地も相當少くなつたもののようである．線型から相當離れた場合は解析的解法は極めて困難で，初期條件から數値計算を行うか，圖式解法によるか，或は differential analyser による外はない．

併し非直線性がさほど大きくない場合は，所謂攝動法によつて解くことが出來る．この方法は適用範圍は廣いが，その收斂性が問題であつて，その收斂度を高め，近似度を上げる工夫を拂わねばならない．この方面に就ては，餘り研究が行われて居ないようであるが，從來攝動法に於て行われ來たつた，非線型項を零と置いた線型微分方程式の解を零次近似解とする方法は，計算は簡單ではあるが，收斂度從つて近似度は充分でない．近似度を高める一つの方法は，零次近似解として，例えば前記 van der Pol 氏の方法によつて求めた解を用いて，改めて第一，第二の近似解を求める事である．只この場合更に別種の手數を拂わねばならぬ點に難がある．

* 本研究は文部省科學研究費による．

玆に述べる方法は攝動法に多少の工夫を補したもので，回路に交番電壓を加えた場合も，加えない場合も同じ手續きで，それ等の定常解を連續的に何次迄も求められ，その際計算を零次近似解を得るに止めるならば，その解は從來の方法例えば van der Pol 氏の方法によるものと一致し，更に計算を進めれば，その近似度を益々高めると同時に，高調波歪を算出する事が出來る．尙非線型微分方程式の解法に於ては，解の安定性の問題が極めて重要であるが，本方法に於ても之を吟味する事が出來る．

2. 定　常　解

本方法を從來のものと比較する便宜上，已に解明された周知の現象を例にとつて說明する．非線型振動を取扱う場合，强制振動と自由振動とに分類することはやや穩當を缺くものであるが，便宜上この語を使用する．

(a) **强制振動**　ヘテロダイン發振器の微分方程式

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int i\,dt-M\frac{di_a}{dt}=E\cos\omega t \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (1)$$

に於て，　$i_a=Se_g\left(1-\frac{e_g}{3V_s^2}\right)$　と假定し

$$v=\frac{e_g}{V_s}=\frac{\int i\,dt}{V_s},\quad \alpha=\frac{MS}{LC}-\frac{R}{L},\quad \gamma=\frac{1}{3}\frac{MS}{LC},\quad \omega_0^2=\frac{1}{LC},\quad B=\frac{E}{V_s}$$

と置けば，(1) は

$$\ddot{v}-\alpha\dot{v}+\gamma\frac{dv^3}{dt}+\omega_0^2v=B\omega_0^2\cos\omega t \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (2)$$

上式に於ける非線型項の係數 γ の値に就ては，今暫く問はない事とする．今この解を攝動法に從つて，

$$v=v_0+\gamma v_1+\gamma^2v_2+\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (3)$$

と置く．但し零次近似解 v_0 を，(2) に於て $\gamma=0$ と置いた線型微分方程式

$\ddot{v}-\alpha\dot{v}+\omega_0^2v=B\omega_0^2\cos\omega t$　の解にとらず，(2) の基本波に關する等價線型微分方程式

$$\ddot{v}-\alpha_0\dot{v}+c_0^2v=B\omega_0^2\cos\omega t \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (4)$$

を滿足するものとする．但し α_0, c_0^2 は後に述べる如く，所謂等價の意義に從つて決定されるものであるが，之等と與えられた α, ω_0^2 との間には次の關係があるものと假定する．

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\alpha_0+\gamma\alpha_1+\gamma^2\alpha_2+\cdots\cdots\\ \omega_0^2&=c_0^2+\gamma c_1+\gamma^2c_2+\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (5)$$

(5), (3) を (2) に代入して，γ に就て整理すれば，

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot v_0 - \alpha_0 \dot v_0 + c_0^2 v_0 = B\omega_0^2 \cos \omega t\\
&\ddot v_1 - \alpha_0 \dot v_1 + c_0^2 v_1 = -c_1 v_0 + \alpha_1 \dot v_0 - 3v_0^2 \dot v_0\\
&\ddot v_2 - \alpha_0 \dot v_2 + c_0^2 v_2 = -c_2 v_0 - c_1 v_1 + \alpha_2 \dot v_0 + \alpha_1 \dot v_1 - 6 v_0 \dot v_0 v_1 - 3 v_0^2 \dot v_1
\end{aligned}\right\} \cdots (6)$$

....

上式を解けば

$$\left.\begin{aligned}
&v_0 = V_0 \cos(\omega t + \theta_1) = x \sin \omega t + y \cos \omega t\\
&\text{但し}\quad V_0 = \frac{B\omega_0^2}{Z_1}, \quad Z_1 = \sqrt{(c_0^2 - \omega^2)^2 + \alpha_0^2 \omega^2}, \quad \tan \theta_1 = \frac{\alpha_0 \omega}{c_0^2 - \omega^2}
\end{aligned}\right\} \cdots (7)$$

$$\ddot v_1 - \alpha_0 \dot v_1 + c_0^2 v_1 = -c_1 V_0 \cos(\omega t + \theta_1) - \omega V_0 \left(\alpha_1 - \frac{3}{4} V_0^2\right) \sin(\omega t + \theta_1)$$
$$+ \frac{3}{4} \omega V_0^3 \sin(3\omega t + 3\theta_1) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8)$$

$$\left.\begin{aligned}
\therefore\quad v_1 = &-\frac{c_1 V_0}{Z_1} \cos(\omega t + 2\theta_1) - \frac{\omega V_0 (\alpha_1 - \frac{3}{4} V_0^2)}{Z_1} \sin(\omega t + 2\theta_1)\\
&+ \frac{3\omega V_0^3}{4Z_3} \sin(3\omega t + 3\theta_1 + \theta_3)\\
\text{但し}\quad & Z_3 = \sqrt{(c_0^2 - 9\omega^2)^2 + 9\alpha_0^2 \omega^2}, \quad \tan \theta_3 = \frac{3\alpha_0 \omega}{c_0^2 - 9\omega^2}
\end{aligned}\right\} \cdots (9)$$

上式の c_1, α_1 を決定する爲に,

$$\omega t = 0 \quad \text{及び} \quad \omega t = \frac{\pi}{2} \quad \text{のとき,} \quad v = v_0, \quad \text{從つて} \quad v_1 = 0$$

と假定すれば,

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{c_1 V_0}{Z_1} \cos 2\theta_1 + \frac{\omega V_0 (\alpha_1 - \frac{3}{4} V_0^2)}{Z_1} \sin 2\theta_1 = \frac{3\omega V_0^3}{4Z_3} \sin(3\theta_1 + \theta_3)\\
&\frac{c_1 V_0}{Z_1} \sin 2\theta_1 - \frac{\omega V_0 (\alpha_1 - \frac{3}{4} V_0^2)}{Z_1} \cos 2\theta_1 = \frac{3\omega V_0^3}{4Z_3} \cos(3\theta_1 + \theta_3)
\end{aligned}\right\}$$

$$\therefore\quad c_1^2 + \omega^2 \left(\alpha_1 - \frac{3}{4} V_0^2\right) = \frac{9Z_1^2}{16Z_3^2} \omega^2 V_0^4, \quad -\frac{c_1}{\omega(\alpha_1 - \frac{3}{4} V_0^2)} = \tan(5\theta_1 + \theta_3) \cdots (10)$$

$$v_1 = \frac{3\omega V_0^3}{4Z_3} \left\{ \sin(\omega t - 3\theta_1 - \theta_3) + \sin(3\omega t + 3\theta_1 + \theta_3) \right\}$$

(10) より α, w_0^2 等の數値が與えられて居れば, c_1, α_1 或は c_0^2, α_0 の値は反復法等によつて求められる. 以下同様の手數に由つて v_2 等が算出される.

c_1, α_1 を決定するのに, 第二の假定, 即ち $\omega t = 0$ 及び $\frac{\pi}{2}$ のとき, v_1 の基本波のみを取つて零と置き, 高調波を省略するものとすれば, 計算は著しく簡單になる. 即ち (8) より直ちに

$$c_1 = 0, \quad \alpha_1 = \frac{3}{4} V_0^2 \qquad \text{從つて} \quad \omega_0^2 = c_0^2, \quad \alpha = \alpha_0 + \frac{3}{4} \gamma V_0^2$$

よつて (7) より，　$(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\left(\alpha-\frac{3}{4}\gamma V_0^2\right)^2=\frac{(B\omega_0^2)^2}{V_0^2}$

今　$Z=\frac{2(\omega_0-\omega)}{\alpha}$，$\rho=\frac{3}{4}\frac{\gamma}{\alpha}V_0^2$，$A=\frac{B\omega_0}{\alpha\sqrt{\frac{4\alpha}{3\gamma}}}$　と置けば

$$\rho Z^2+\rho(1-\rho)^2=A^2 \quad \cdots\cdots\cdots (11)$$

上式を ρ，Z 平面上に畫けば，この三次曲線より共振狀態を知る事が出來る．この結果は van der Pol 氏[1] 等の研究と一致する．

(8) より，　$v_1=V_1\sin(3\omega t+3\theta_1+\theta)$，　$V_1=\frac{3\omega V_0^3}{4Z_3}$

次に，　$\ddot{v}_2-\alpha_0\dot{v}_2+c_0^2v_2=-\alpha_2\omega V_0\sin(\omega t+\theta_1)-c_2V_0\cos(\omega t+\theta_1)$
$-\frac{3}{4}\omega V_0^2V_1\cos(\omega t+\theta_1+\theta)-\frac{9}{4}\omega V_0^2V_1\cos(3\omega t+3\theta_1+\theta_3)-\frac{15}{4}\omega V_0^2V_1\cos(5\omega t+5\theta_1+\theta)$

之より，　$c_2=-\frac{3}{4}\omega V_0V_1\cos\theta$，　$\alpha_2=\frac{3}{4}V_0V_1\sin\theta$　ととれば，

$$v_2=-\frac{9\omega V_0^2V_1}{4Z_3}\cos(3\omega t+3\theta_1+2\theta)-\frac{15\omega V_0^2V_1}{4Z_5}\cos(5\omega t+5\theta_1+\theta_3+\theta_5)$$

但し　$Z_5=\sqrt{(c_0^2-25\omega^2)^2+25\alpha_0^2\omega^2}$，　$\tan\theta_5=\frac{5\alpha_0\omega}{c_0^2-25\omega^2}$

以下同様に常に v_n 中の基本波を打消すように c_n, α_n をとれば，

$$c_0^2=\omega_0^2-\gamma c_1-\gamma^2c_2\cdots\cdots,\quad \alpha_0=\alpha-\gamma\alpha_1-\gamma^2\alpha_2\cdots\cdots,\quad v_0=\frac{B\omega_0^2}{\sqrt{(c_0^2-\omega^2)^2+\alpha_0^2\omega^2}}\cos(\omega t+\theta_1)$$

之より極めて近似度の高い基本波 v_0 と之に相當した高調波が求まる．若し零次近似解で滿足するなら，その結果は van der Pol 氏等の結果と一致する．此場合 (4) は (2) を滿足する v の基本波そのものの等價線型微分方程式であるが，之に對して第一の假定によれば，(4) は $\omega t=0$，及び $\frac{\pi}{2}$ の二點に於て v と値を等しくするような基本波の等價線型方程式である．van der Pol 氏の方法によれば，その假定からどの程度迄使用し得られるか，又どの程度の誤差を伴うか明確でないが，本方法では γ の値を吟味する事によつて，誤差の程度が明になるから，何等使用に不安がないものと考えられる．

次に解の安定性に就て考える．基本波のみに就て考えれば，$c_1=0$，$\alpha_1=\frac{3}{4}V_0^2$　のとき $v_1=0$ となる事は，見方を變えて考えると，v_0 は一週期後もその値を變化しない，換言すると定常である事を表し，$v_1\neq 0$ のときは，v_0 の値は變化して一週期後には γv_1 だけ減少するものと云い得よう．即ち　$\gamma v_1=-\int_0^T\frac{dv_0}{dt}dt$　但し高調波は省略する．(8) を書換えると

$$\ddot{v}_1-\alpha_0\dot{v}_1+c_0^2v_1=-\left\{c_1x+\omega y\left(\alpha_1-\frac{3}{4}V_0^2\right)\right\}\sin\omega t-\left\{c_1y-\omega x\left(\alpha_1-\frac{3}{4}V_0^2\right)\right\}\cos\omega t$$
$$-\frac{3}{4}\omega y(3x^2-y^2)\sin 3\omega t-\frac{3}{4}\omega x(3y^2-x^2)\cos 3\omega t$$

之より k を比例常數とすれば,

$$\frac{dx}{dt}=k\gamma\omega\left\{-c_1y+\omega x\left(\alpha_1-\frac{3}{4}V_0^2\right)\right\}=P(x,y)$$
$$\frac{dy}{dt}=k\gamma\omega\left\{c_1x+\omega y\left(\alpha_1-\frac{3}{4}V_0^2\right)\right\}=Q(x,y)$$

x, y の變分を夫々 ξ, η とすれば

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{\partial P}{\partial x}\xi+\frac{\partial P}{\partial y}\eta=k\gamma\omega\left\{\omega\left(\alpha_1-\frac{3}{4}V_0^2-\frac{6}{4}x^2\right)\xi+\left(-c_1-\frac{6}{4}\omega xy\right)\eta\right\}$$
$$\frac{d\eta}{dt}=\frac{\partial Q}{\partial x}\xi+\frac{\partial Q}{\partial y}\eta=k\gamma\omega\left\{\left(c_1-\frac{6}{4}\omega xy\right)\xi+\omega\left(\alpha_1-\frac{3}{4}V_0^2-\frac{6}{4}y^2\right)\eta\right\}$$

この聯立微分方程式の特性方程式は

$$S^2-2k\omega^2\left(\gamma\alpha_1-\frac{6}{4}\gamma V_0^2\right)S+k^2\omega^4\left\{\left(\gamma\alpha_1-\frac{3}{4}\gamma V_0^2\right)\left(\gamma\alpha_1-\frac{9}{4}\gamma V_0^2\right)+\left(\frac{\gamma c_1}{\omega}\right)^2\right\}=0$$

上式は零次近似解, 從つて之に相當する α_0, c_0^2 を消去した殘りの補整値に就て云々して居る事を考慮して, 上式の二根の符號を吟味することによつて,

$$1-2\rho<0\,,\quad (1-\rho)(1-3\rho)+Z^2>0$$

の場合, 解は安定な事が推察される. 即ち前記 ρ, Z 平面上に於て鞍點は $(1-\rho)(1-3\rho)+Z^2=0$ なる楕圓の内部に存在し, 又 $\rho^2-Z^2=0$, 即ち $\rho-Z=0$, $\rho+Z=0$ なる直線によつて S の實根, 虚根即ち結節點と渦狀點とが分れる等が了解される. 斯様に適當な注意を拂えば, 本法によつても現象を位置解析的に解明する事が出來よう.

(b) **自由振動** 前記 (2) に $v=\sqrt{\dfrac{\alpha}{3\gamma}}\,x$, $\tau=\omega_0 t$ なる變數變換を施せば,

$$\ddot{x}-\mu(1-x^2)\dot{x}+x=Q\cos K\tau \quad \cdots\cdots (12)$$

但し $\mu=\dfrac{\alpha}{\omega_0}$, $Q=\sqrt{\dfrac{3\gamma}{\alpha}}E$, $K=\dfrac{\omega}{\omega_0}$,

$\dot{x}$, $\ddot{x}$ は何れも τ に就ての微分を表す. 之は所謂 van der Pol の微分方程式であるが, 今この自由振動を求める.

強制振動の場合と同様に, 次の如く假定する.

$$x=x_0+\mu x_1+\mu^2x_2+\cdots\cdots,\qquad 1=c_0^2+\mu c_1+\mu^2c_2\cdots\cdots$$

但し上式の 1 は (12) 式の x の係數である. 之等を (12) に代入整理して,

$$\ddot{x}_0 + c_0^2 x_0 = Q\cos K\tau\,,\quad \ddot{x}_1 + c_0^2 x_1 = \dot{x}_0 - c_1 x_0 - x_0^2\dot{x}_0$$

$$\ddot{x}_2 + c_0^2 x_2 = \dot{x}_1 - c_2 x_0 - c_1 x_1 - 2x_0\dot{x}_0 x_1 - x_0^2 x_1$$

$$\ddot{x}_3 + c_0^2 x_3 = \dot{x}_2 - c_3 x_0 - c_2 x_1 - c_1 x_2 - x_0^2\dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_1^2 - 2x_0 x_1\dot{x}_1 - 2x_0\dot{x}_0 x_2$$

…………………………………………………………

之より

$$x_0 = \frac{Q}{c_0^2 - K^2}\cos K\tau = X_0\cos K\tau \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (13)$$

$$x_1 = \frac{KX_0}{c_0^2 - K^2}\left(\frac{X_0^2}{4} - 1\right)\sin K\tau - \frac{c_1 X_0}{c_0^2 - K^2}\cos K\tau + \frac{KX_0^3}{4\,(c_0^2 - 9K^2)}\sin 3K\tau$$

今 $K\tau = 0$ のとき $x = x_0$ 従つて $x_1 = 0$ と假定すれば,

$c_1 = 0$ 従つて $c_0 = 1$

$$x_1 = \frac{KX_0}{c_0^2 - K^2}\left(\frac{X_0^2}{4} - 1\right)\sin K\tau + \frac{KX_0^3}{4\,(c_0^2 - 9K^2)}\sin 3K\tau \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (14)$$

若し $Q = 0$ のとき, $x \neq \infty$ であれば, この x の値は自由振動の定常値を與える筈である. これには先ず (13) に於て, $x_0 \neq \infty$ でない爲に, $Q \to 0$ のとき, $K^2 \to c_0^2$ でなくてはならない. 之から自由振動の周波数が決定する. 更に (14) に於て, $K^2 \to c_0^2$ のとき, $x_1 \neq \infty$ でない爲に, $X_0 = 0$ 或は $\dfrac{X_0^2}{4} - 1 = 0$ 即ち $X_0 = 2$ なる事を要する. 次に $X_0 = 0$ 即ち自由振動が發生しないか, 或は $X_0 = 2$ 即ち振動が發生するかは, 解の安定性を吟味すればよい. 之には前記と全く同様の方法を講ずれば,

$$\frac{dX}{d\tau} = kX_0\left(1 - \frac{X_0^2}{4}\right),\qquad \frac{d\xi}{d\tau} = k\left(1 - \frac{3}{4}X_0^2\right)\xi = p\xi$$

従つて, $X_0 = 0$ に對して, $p > 0$ 即ち不安定

$X_0 = 2$ に對しては $p < 0$ 即ち安定, 換言すれば自由振動を發生し, その最終の振幅は 2 となる. 又この場合の周波数は回路の固有周波数に等しい. 之等は凡て従來の研究と一致する.

次に $K\tau = \dfrac{\pi}{2}$ のとき, $x_1 = 0$ と (14) に代入すると,

$$x_1 = \frac{KX_0^3}{4\,(c_0^2 - 9K^2)}(\sin K\tau + \sin 3K\tau) = -\frac{1}{4K}(\sin K\tau + \sin 3K\tau)$$

以下同様にして,

$$c_2 = \frac{1}{8}\,,\qquad 従つて \qquad c_0^2 = 1 - \frac{1}{8}\mu^2$$

$$x_2 = \frac{23}{96K^2}\cos K\tau - \frac{3}{16K^2}\cos 3K\tau - \frac{5}{96K^2}\cos 5K\tau$$

$$c_3 = 0\,,$$

$$x = -\frac{23}{16\times 32K^3}\sin K\tau + \frac{1}{16\times 8K^2}\sin 3K\tau + \frac{5}{72K^3}\sin 5K\tau + \frac{77}{96\times 48K^3}\sin 7K\tau$$

$$c_4 = \frac{115}{1536K^2} \fallingdotseq \frac{10}{134K^2}\ ,\qquad c_0^2 = 1 - \frac{1}{8}\mu^2 - \frac{10}{134K^2}\mu^4$$

$$\therefore\ c_0^2 = \frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{8}\mu^2\right)+\sqrt{\left(1-\frac{1}{8}\mu^2\right)^2-\frac{40}{134}\mu^4}\right\}$$ 従つて $\mu \ngtr 1.22$ なるを要す.

この場合も先に述べた如く基本波のみを摘出する事も出來る．斯様にして $\mu = 1$ の場合も何等の機械的手段によらずに解を求め得る.

一般に非線型微分方程式と線型のそれとの大きい相違は所謂 limit cycle の有無であつて，Poincaré, Bendixson 等の重要な研究があるが，實際に與えられた方程式に於ける limit cycle の存在の決定は極めて困難であつて，differential analyser に依る外はない場合が多い(3)．前記の方法は之を解決するに役立つ一つの手段であると考えられる．前記の微分方程式

$\ddot{x} - \mu(1-x^2)\dot{x} + x = 0$ に於て，$y = \dfrac{dx}{dt}$ と置けば，之は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x+(1-x^2)y}{y}$$ なる標準型となる.

例えば $\mu = 0.1$ 或は $\mu = 1$ の場合，先に求めた結果を利用すれば，初期條件を假定する事なく，x，y 平面上に所謂 limit cycle の近似曲線を畫く事が出來よう.

又 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x+(1-x^2)y}{y}$ 或は $\ddot{x} + \mu(x^2-1)\dot{x} + x = 0$ の場合も本法によれば，

$$x_0 = X_0\cos Kt,\ x_1 = -\frac{KX_0}{c_0^2-K^2}\sin Kt + \frac{KX_0^4}{4(c_0^2-4K^2)}\sin 2Kt + \frac{KX_0^4}{8(c_0^2-16K^2)}\sin 4Kt\ ,$$

となり，$K^2 \to c_0^2\ (c_0^2 = 1)$ のとき，$X_0 = 0$ なる事を要し，limit cycle は存在しない．併しその安定性を前記の方法によつて吟味すれば，不安定なる故，この場合自由振動の振幅は無限に増大する事を知る.

次に $\ddot{x} + p^2x + \mu x^3 = 0$

なる保存系に屬する方程式に於ては，

$$x_0 = X_0\cos Kt,\ x_1 = \frac{X_0^3}{4(c_0^2-9K^2)}(\cos Kt - \cos 3Kt)$$

$K^2 \to c_0^2$ のとき X_0 の値に何等制限は存在しない．即ち X_0 の値は一に初期條件によつて定まり，この場合は單なる周期解である事が知られる．斯様に本方法によつて，自由振動の定常解の有無及びその性質を容易に知る事が出來る.

（c） **一般の場合 (强制振動及び自由振動)**　陽極同調回路のヘテロダイン發振機に就て，同期化及び分數調波振動の問題を考察する.

此の場合微分方程式は

$$LC\frac{d^2i}{dt^2}+RC\frac{di}{dt}+i=i_a+C\frac{de}{dt}$$

但し　$i_a=f(V_{st})$，　$e=E\cos\omega t$

今　$\frac{\omega t}{n}=\tau$，　$\frac{nR}{\omega L}=2\delta$，　$Q=\frac{nE}{\omega L}$，　$\omega_0{}^2=\frac{1}{LC}$ と置くと，原式は

$$\frac{d^2i}{d\tau^2}+2\delta\frac{di}{d\tau}+\frac{n^2\omega_0{}^2}{\omega^2}i=\frac{n^2\omega_0{}^2}{\omega^2}i_a-Q\sin n\tau \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

陽極電流 i_a を制御電壓 V_{st} の三次式で表せば，$V_{st}=(M-DL)\frac{di}{dt}$　より

$$i_a=I_a+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3\,,\qquad 但し\quad x=\frac{di}{d\tau}$$

(15) を微分して，上式の關係を挿入すれば，

$$\ddot{x}+\frac{n^2\omega_0{}^2}{\omega^2}x=\frac{n^2\omega_0{}^2}{\omega^2}\left\{\left(\alpha-\frac{2\delta\omega^2}{n^2\omega_0{}^2}\right)+2\beta x+3\gamma x^2\right\}\dot{x}-nQ\cos n\tau$$

更に，　$\frac{n^2\omega_0{}^2}{\omega^2}=\frac{1}{1+Z}$，　$Z=\frac{\omega^2-n\omega_0{}^2}{n\omega_0{}^2}$，　$\frac{\beta}{1+Z}=\mu$，　$\frac{\alpha-2\delta\,(1+Z)}{\beta}=\alpha'$，

$\frac{3\gamma}{\beta}=\gamma'$，　$\lambda=-nQ$　　と置けば上式は，

$$\ddot{x}+x=\mu\left\{(\alpha'+2x+\gamma'x^2)\,\dot{x}+\frac{Z}{\beta}x\right\}+\lambda\cos n\tau$$

上式の一般解を求める爲に，之を變形して次の方程式を導入する．

$$\ddot{x}-\alpha''\dot{x}+x=\mu\left\{(2x+\gamma'x^2)\,\dot{x}+\frac{Z}{\beta}x\right\}+\lambda\cos n\tau+\lambda'\cos\tau \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

但し　$\alpha''=\mu\alpha'$，λ' の項は自由振動を導出する爲に附加したもので，後に $\lambda'\to 0$ と置くものである．上式に

$$\alpha''=\alpha_0+\mu\alpha_1+\cdots\cdots\,,\qquad 1=c_0{}^2+\mu c_1+\cdots\cdots\,,\qquad x=x_0+\mu x_1+\cdots\cdots$$

を代入して整理すれば．

$$\ddot{x}_0-\alpha_0\dot{x}_0+c_0{}^2x_0=\lambda\cos n\tau+\lambda'\cos\tau$$

$$\ddot{x}_1-\alpha_0\dot{x}_1+c_0{}^2x_1=-c_1x_0+\alpha_1\dot{x}_0+2x_0\dot{x}_0+\gamma'x_0{}^2\dot{x}_0+\frac{Z}{\beta}x_0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

之より

$$x_0=\frac{\lambda}{\sqrt{(c_0{}^2-n^2)^2+n^2\alpha_0{}^2}}\cos(n\tau+\theta)+\frac{\lambda'}{\sqrt{(c_0{}^2-1)^2+\alpha_0{}^2}}\cos(\tau+\theta')$$

$$=X\cos(n\tau+\theta)+X'\cos(\tau+\theta) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

$$\ddot{x}_1 - \alpha_0 \dot{x}_1 + c_0^2 x_1 = \left(\frac{Z}{\beta} - c_1\right) X \cos(n\tau+\theta) - nX\left(\alpha_1 + \frac{\gamma'}{4}X^2 + \frac{\gamma'}{2}X'^2\right)\sin(n\tau+\theta) +$$

$$\left(\frac{Z}{\beta} - c_1\right) X' \cos(\tau+\theta') - X'\left(\alpha_1 + \frac{\gamma'}{4}X'^2 + \frac{\gamma'}{2}X^2\right)\sin(\tau+\theta') - (n-1)XX'\sin\left\{(n-1)\tau+\theta-\theta'\right\}$$

$$- nX^2\sin(2n\tau+2\theta) - X'^2\sin(2\tau+2\theta') - \frac{\gamma' n X^3}{4}\sin(3n\tau+3\theta) - \frac{\gamma' X'^3}{4}\sin(3\tau+3\theta')$$

$$-(n+1)XX'\sin\left\{(n+1)\tau+\theta+\theta'\right\} - \frac{\gamma' X^2 X'}{4}(2n+1)\sin\left\{(2n+1)\tau+2\theta+\theta'\right\}$$

$$- \frac{\gamma' X^2 X'}{4}(2n-1)\sin\left\{(2n-1)\tau+2\theta-\theta'\right\} - \frac{\gamma' X X'^2}{4}(n+2)\sin\left\{(n+2)\tau+\theta+2\theta'\right\}$$

$$- \frac{\gamma' X X'^2}{4}(n-2)\sin\left\{(n-2)\tau+\theta-2\theta'\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (18)$$

(17) より自由振動 X' の存在する爲には，$\lambda'\to 0$ のとき，$c_0^2\to 1$, $\alpha_0\to 0$ なる事を要する．從つて $c_1\to 0$，$\alpha_1\to\alpha'$ となる．前記の如く基本波のみを摘出するとすれば，(18) より

$$\frac{Z}{\beta} - c_1 = 0\,, \qquad \text{及び} \qquad X'\left(\alpha' + \frac{\gamma'}{4}X'^2 + \frac{\gamma'}{2}X^2\right) = 0$$

後式より　$X' = 0$　或は　$\alpha' + \dfrac{\gamma'}{4}X'^2 + \dfrac{\gamma'}{2}X^2 = 0$ ･･････････････ (19)

何れが安定であるか，即ち自由振動が發生するか否かは，前記の方法によつて，安定條件式

$S = \alpha' + \dfrac{3}{4}\gamma' X'^2 + \dfrac{\gamma'}{2}X^2$ の正負を檢すれば宜い．

$\alpha' < 0$ の場合　$X' = 0$ に對しては，$S = \alpha' < 0$，安定であり，又 $\gamma' > 0$ のときは，(19) を滿足する X' の値は存在するが，之に對しては，$S > 0$，不安定であるから，$\alpha' < 0$ の場合は自由振動は發生しない．併し $n = 2$ の場合は，所謂結合波に屬する (18) の第5項は $XX'\sin(\tau+\theta-\theta')$ となるから，之を附加して考えれば，

$$\frac{Z}{\beta} - c_1 - X\sin(\theta-2\theta) = 0 \quad \text{及び} \quad X'\left\{\alpha' + \frac{\gamma'}{4}X'^2 + \frac{\gamma'}{2}X^2 + X\cos(\theta-2\theta')\right\} = 0$$

從つて之から，　$X' = 0$ か，或は

$$\alpha' + \frac{\gamma'}{4}X'^2 + \frac{\gamma'}{2}X^2 \pm \sqrt{X^2 - \left(\frac{Z}{\beta} - c_1\right)^2}$$

$$= \alpha' + \frac{\gamma'}{4}X'^2 + \frac{\gamma'}{2}X^2 \pm \sqrt{X^2 - \frac{Z^2}{\beta^2}} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (20)$$

(20) を滿足する X' に對しては，$S = \dfrac{\gamma'}{2}X'^2$，之より $\gamma' < 0$ であれば，自由振動を發生し得るが，之には更に (20) より，或は $X' = 0$ に對する安定判定條件から，$\alpha' + \dfrac{\gamma'}{2}X^2 \pm \sqrt{X^2 - \dfrac{Z^2}{\beta^2}} > 0$ なる事を要する．之から根號の符號は正でなくてはならない．從つて求める一般解は

$$x = \frac{\lambda}{3}\cos 2\tau + X'\cos\tau \qquad 但し \quad X'^2 = -\frac{2}{9}\lambda^2 - \frac{4}{|\gamma'|}\left\{|\alpha'| - \sqrt{\frac{\lambda^2}{9} - \frac{Z^2}{\beta^2}}\right\}$$

又 $\frac{1}{2}$ 分數調波の存在域は

$$X^2 - \frac{Z^2}{\beta^2} > \left(\alpha' + \frac{\gamma'\lambda^2}{18}\right)^2$$

によつて與えられ，通常の共振曲線とは趣を全く異にする事が知られる．

$\alpha' > 0$ の場合　$X' = 0$ に對しては $S > 0$，又 (19) を滿足する X' に對しては $S = \frac{\gamma'}{2}X'^2$ となるから，$\alpha' < 0$ の場合と異り，$\gamma' < 0$ であれば自由振動を發生する．但し (19) より $\alpha' + \frac{\gamma'}{2}X'^2 < 0$ の範圍では，自由振動は存在せず，强制振動のみである．之は所謂同期化の現象を表すものである．$\alpha' < 0$ の場合は始めから自由振動は存在しないから，同期化の現象は起らない．$n = 2$ の場合は，前記と同様に $\frac{1}{2}$ 分數調波振動を發生する．之には

$$\alpha' + \frac{\gamma'}{4}X^2 \pm \sqrt{X^2 - \frac{Z^2}{\beta^2}} > 0$$

なる事を要する．從つて $\alpha' + \frac{\gamma'}{4}X^2 < 0$ 即ち同期化域に於ても分數調波振動が起り得る．尙上式に於ける根の正負に從つて，X の正負即ち强制振動の位相が變化する．之は一般に分數調波振動を發生するには，適當な位相關係が必要な事を示すものと考えられる．$\frac{1}{3}$ 分數調波振動に就ても，(18) より全く同様に考察する事が出來る．

上記の方法を從來のそれに[4]比較すれば，如何に簡單であり，自然的であるかが了解されよう．

3. 結　　言

上記の方法は，眞空管回路のみならず，他の現象，例えば鐵心入りアクタンス回路等にも利用し得る外，更に一階微分方程式にも，又高階の方程式にも適用する事が出來る．此方法は二三の點に於て，尙研究考慮を要する餘地は存在するが，之を從來のものと比較すれば，與えられた非線型微分方程式が線型から或程度はずれた場合，一つの方法で近似度の高い基本波と同時に之に伴う高調波及び誤差を算出し，更に解の安定性をも論じ得る等簡單で綜合的な點に於て得る所があるのでないかと考えられる．

文　　献

(1) B. van der Pol: Phil. Mag, 3, 65 (1927).

(2) 井　上：電氣評論，30，708 (昭 17) 31，55 (昭 18).

(3) 淸　水：應用數學，2，15 (昭 24).

(4) L. Mandelstam & N. Papalexi: Z. f. Phys. 73, 227 (1931).