



Title	導波管内の窓についての再考察
Author(s)	松本, 正; Matsumoto, Tadashi
Citation	北海道大學工學部彙報, 5, 90-101
Issue Date	1951-11-15
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40482
Type	departmental bulletin paper
File Information	5_90-101.pdf



導波管内の窓についての再考察

助教授 松本 正

(昭和25年3月10日)

Further Consideration on the Iris in a Wave Guide.

Tadashi MATSUMOTO

Synopsis

This is a theoretical study on the iris in a rectangular cylindrical wave-guide. Some papers on such research were published already by the author, T. W. Miles and others. In this paper the author shows another method to calculate approximately the susceptance of the iris easily as follows.

At first, a suitable one mode is assumed on the plane of the window, and this amplitude distribution of transverse component of electric field is expanded in Fourier serieses in x direction and also y direction in general over the whole cross-section of the wave guide. Thus each term of such series obtained as product of two Fourier serieses represents one of the modes of the field disturbed by the iris respectively. And the amplitudes of all modes can be calculated by finding the coefficients of the serieses.

Thus the electric energy and magnetic energy stored by the higher modes are determined and they can be evaluated by shunt susceptances in the transmission line representation for an exciting dominant mode. In order to avoid the complications inherent in having both TE and TM modes present, it is convenient to use a set of modes ($E_x = 0$) when the exciting field has no x component of electric field. By such analysis we can form the formulae to calculate the susceptance of general rectangular window easily, and also inductive window and capacitive window are treated as the special cases. Of course, in general, this method may be approximate one.

緒 言	90
§. 1 窓のアドミッタンスの求め方	91
§. 2 各姿態窓の振幅を求める事	94
§. 3 容量性窓のサスセプタンスの計	95
§. 4 誘導性窓のサスセプタンスの計算	97
§. 5 一般の窓のサスセプタンスの計算	100
結 言	101
文 献	101

緒 言

矩形筒導波管内に置かれた窓の入射波に対する反射係数、透過係数又はサスセプタンスの計算法については既に筆者等の研究も数篇^{(1), (2), (3)}あるし又 *J. W. Miles* の論文⁽⁴⁾がある。尙これら兩者の研究は全く無関係に行われたものである。*Miles* は矩形筒導波管の誘導性窓及び容量性窓のサスセプタンスの計算公式を與えたが筆者等はこれらの他に一般の矩形窓のサスセプタンスの計算公式をも與える事が出来た。尙誘導性窓及び容量性窓に対する兩者の公式の表示は異つた形をとつているが本質的には同一のもので唯級數の收斂方法の相異によつて異つた形となつたものである。何れも解法は境界値問題としての解法で窓の表側及び裏側の磁氣及び電氣エネルギーの蓄積場を求めこれらを入射波の線路表示に於ける分路のインダクタンス及び容量として評價するのである。尙窓の断面上には其の部分の唯一つの dominant mode のみがあると假定すると計算が容易となり又實驗的にもその近似的妥當性が認められている。

筆者はこの問題を再考案し次の様な方法で解くと甚だ簡単な近似解法が得られ又解析の物理的意味を明かにしつつ解く事の出来る事を知つた。

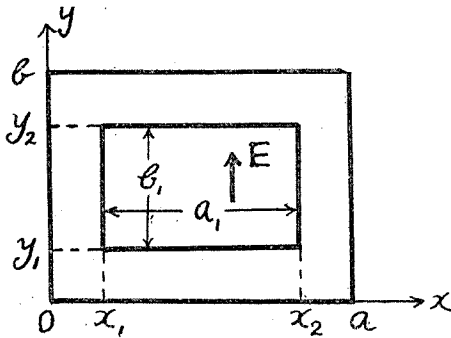
先づ窓の面上に適當な一つの姿態波を假定しその電界の振幅分布を導波管の断面上に管壁境界條件を満足する様に縦横に Fourier 展開する。そうすると斯くして得られる無限次の姿態群からなる電磁界は自ら凡ての境界條件を満足していることになる。又窓の面を xy 面に平行にし窓の面上の電界は E_y (或は E_x) のみで示される場合姿態群は E 波と H 波の重疊とせむに $E_x = 0$ の姿態群 (或は $E_y = 0$ の姿態群) に展開されたとすると計算が簡單になる。そうすると各姿態の振幅はフーリエ級數の係數を求める方法で求められるから高次姿態波のエネルギー蓄積が定まりこれが分路アドミッタンスとして求められる。又窓の兩側に於ける磁界の横成分は窓を通して連続である事を利用し導波管の断面が不変である場合には窓の兩側のもつアドミッタンスは相等しい事が容易に證明されるので窓の片面のアドミッタンスはその二倍である上記の方法は一般の窓の計算に適用出来且誘導性窓や容量性窓はその特別な場合として得られるので都合がよい。

§. 1 窓のアドミッタンスの求め方

今矩形筒導波管内に $Z = 0$ の所に第1.1圖に示される様な矩形の窓をなす平面不連続があるものとする。導體は凡て完全導體とし窓を作つている導體の厚さは無限に薄いものと假定する。導波管内で周壁並に $Z = 0$ の断面上で與へられた境界條件を満足する様に Maxwell の方程式

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{E}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu \mathbf{H} \quad (1.1)$$

を解くのであるが入射波の電界が y 方向に向いているものとする導波管内の界は $E_x = 0$ を



第 I. I 圖

満足する様な界のみとなる。そこで

$$\mathbf{E} = -\nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = -\nabla \phi - j\omega \varepsilon \mathbf{A} \quad (1.2)$$

と置き且

$$\mathbf{A} = i\mathbf{A}_x = iA, \quad A_y = A_z = 0 \quad (1.3)$$

と置くと電磁界成分は次の様に表わされる。

$$\left. \begin{aligned} H_y &= \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x}, & E_y &= -\frac{\partial A}{\partial z} \\ H_z &= \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial x}, & E_z &= \frac{\partial A}{\partial y} \\ H_x &= \frac{1}{j\omega\mu} \left[\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + k^2 A \right], & E_x &= 0 \end{aligned} \right\} (1.4)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = -k^2 A, \quad k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu \quad (1.5)$$

今窓を通過して来た界をしらべて見るにこれは凡て $e^{-\Gamma z}$ の形の傳播をするから $E_y = \Gamma A$ となり (1.5) 式より E_y の方程式は

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = -(\Gamma^2 + k^2) E_y \quad (1.6)$$

故に導波管周壁の境界条件を考慮するとこの方式の解は次の様な形となる筈である。

$$\left. \begin{aligned} E_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} E_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-\Gamma_{mn} z} \\ \Gamma_{mn} &= \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2} \end{aligned} \right\} (1.7)$$

この E_y から他の成分は次の様に求められる。

$$\left. \begin{aligned} H_y &= \frac{1}{j\omega\mu\Gamma} \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial x}, & H_z &= \frac{-1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_y}{\partial x} \\ H_x &= \frac{1}{j\omega\mu\Gamma} \left[\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + k^2 E_y \right], & E_z &= \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial E_y}{\partial y} \end{aligned} \right\} (1.8)$$

第 (m, n) 姿態の界アドミッタンスを M_{mn} とすると

$$M_{mn} = -\left(\frac{H_x}{E_y}\right)_{m,n} = -\frac{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}{j\omega\mu\Gamma_{mn}} \quad (1.9)$$

窓を通して運ばれる共軛複素電力は

$$\begin{aligned} P^* &= -\frac{1}{2} \int_S (E_y^* H_x)_{z=0} dS \quad S: \text{導波管の断面} \\ &= \frac{1}{2} \int_{y=0}^b \int_{x=0}^a \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} M_{mn} E_{m'n'} E_{mn}^* \sin^2 \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos^2 \frac{n\pi}{b} y dx dy \end{aligned}$$

この式の右邊の被積分項を適當な群に分けて計算し

$$P^* = \frac{ab}{2} \left[\frac{1}{2} M_{10} |E_{10}|^2 + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} M_{1n} |E_{1n}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=2}^{\infty} M_{m0} |E_{m0}|^2 + \frac{1}{4} \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn} |E_{mn}|^2 \right] \quad (1.10)$$

一方基本波 (1.0) 姿態に對する界入力アドミッタンスを Y_i とすをと P^* は又次の様になる。

$$P^* = \frac{1}{2} Y_i \int_{y=0}^b \int_{x=0}^a E_{10} E_{10}^* \sin^2 \frac{\pi}{a} x \, dx \, dy = \frac{ab}{4} Y_i |E_{10}|^2 \quad (1.11)$$

故に (1.10) 式と (1.11) 式の各右邊を等しいと置いて Y^i を求めると

$$Y_i = M_{10} + \frac{1}{2} \frac{1}{|E_{10}|^2} \sum_{n=1}^{\infty} M_{1n} |E_{1n}|^2 + \frac{1}{|E_{10}|^2} \sum_{m=2}^{\infty} M_{m0} |E_{m0}|^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{|E_{10}|^2} \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn} |E_{mn}|^2 \quad (1.12)$$

右邊の第一項 M_{10} は入射波 (1.0) 姿態の界アドミッタンスである。今導波管が基本波(1.0)姿態のみを其の傳送域に含む様に作られてあるものとする。と M_{10} は實數でこの姿態以外の凡ての高次姿態の M_{mn} は悉く純虛數である。従つて第二項、第三項及び第四項は純虛である。これらを夫々 Y_C , Y_L 及び Y_M と置くと

$$Y_i = M_{10} + Y_C + Y_L + Y_M = M_{10} + Y_S \quad (1.13)$$

$$Y_S = Y_C + Y_L + Y_M \quad (1.14)$$

斯くして窓の片側 ($z=0$ の側) のアドミッタンス Y_S が求められたわけである。窓の他の片側 ($z=-0$) の側では電界は入射界 E_{10} と反射波 E_y^r の和でこれが $z=+0$ の側の電界と同一のものであるべきであるから

$$E_{10}^i + E_y^r = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} E_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y$$

又反射波は e^{+1z} の形の傳播をするから

$$H_x^r = M E_y^r$$

であり窓の穴を通して左右の側の磁界の横成分は連続であるから

$$H_x^i + H_x^r = H_x. \quad H_x^i = -M_{10} E_{10}^i, \quad H_x = -M E_y$$

これらの式より

$$M_{10} E_{10}^i = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} M_{mn} E_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \quad (1.15)$$

両邊に $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn}^* \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y$ を乗じて断面 $a \times b$ 上に積分して書き直すと

$$\frac{E_{10}^i}{E_{10}} = \frac{1}{p} = 1 + \frac{Y_S}{M_{10}} \tag{1.16}$$

p は基本波 (1.0) 姿態の透過係数である。又 Y_S は (1.14) 式の Y_S で片面のアドミッタンスである。一方第 1.2 圖の様に特性アドミッタンス M_{10} の線路の途中に分路アドミッタンス Y がある場合の電圧透過係数 p は



$$\frac{1}{p} = 1 + \frac{Y}{2M_{10}} \tag{1.17}$$

であるから (1.16) と比較して

$$Y = 2 Y_S \tag{1.18}$$

第 1.2 圖

即ち窓の兩側の面のもつアドミッタンスは全く等しく全體

として片面の二倍となる。(但し窓の兩側の導波管の太さは不變としている。)

斯くして窓のアドミッタンスは

$$Y = jB_C + jB_L + jB_M \tag{1.19}$$

$$\left. \begin{aligned} jB_C &= 2Y_C = \frac{1}{|E_{10}|^2} \sum_{n=1}^{\infty} M_{1n} |E_{1n}|^2 \\ jB_L &= 2Y_L = \frac{2}{|E_{10}|^2} \sum_{m=2}^{\infty} M_{m0} |E_{m0}|^2 \\ jB_M &= 2Y_M = \frac{1}{|E_{10}|^2} \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn} |E_{mn}|^2 \end{aligned} \right\} \tag{1.20}$$

これらを計算するには E_{mn} 求める必要がある。次節にその方法を示す。

§ 2. 各姿態波の振幅を求める事

E_y は一般に (1.7) 式で示されるがこれを書き直すと $z = 0$ に於て

$$(E_y)_{z=0} = \left[\sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi}{a} x \right] \cdot \left[B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \right] = F(x) \cdot G(y) \tag{2.1}$$

但 $E_{mn} = A_m B_n \tag{2.2}$

今窓の面上の電界は E_y のみで振幅分布は y 方向には一定で y 方向へは半波正弦分布をなすものとする。と $z = 0$ の面上の界 E_y の振幅分布 $\varepsilon(x, y)$ は

$$\varepsilon(x, y) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{a_1} (x - x_1) \dots \dots \dots \text{窓の面上} \\ 0 \dots \dots \dots \text{導体面上} \end{cases} \tag{2.3}$$

この窓の面上の分布を導波管の全断面上に導波管の周壁の境界条件を満足する様な姿態群に縦横に展開するとこれらの和として得られる $(E_y)_{z=0}$ は凡ての導体面上の境界条件を満足しているわけである。このため第2.1圖の圖形のように $x = x_1 \sim x_2$ の間の振幅1の半波正弦波を $x = 0 \sim a$ の間に

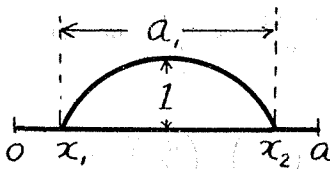
$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (2.4)$$

の形にフーリエ展開し又第2.2圖のように $y = y_1 \sim y_2$ の間で一樣に1の高さをもつ圖形を $y = 0 \sim b$ の間に

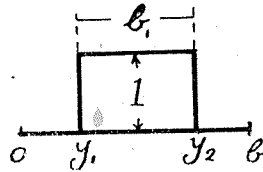
$$G(y) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \frac{n\pi}{b} y, \quad (2.5)$$

の形に展開し

$$(E_y)_{z=0} = F(x) \cdot G(y) \quad (2.6)$$



第 2.1 圖



第 2.2 圖

と置くとよい。又展開された級数の各項の係数は

$$\left. \begin{aligned} A_m &= \frac{1}{a} \int_{x_1}^{x_2} \sin \frac{\pi}{a_1} (x-x_1) \sin \frac{m\pi}{a} x \, dx & m \neq 0 \\ B_0 &= \frac{1}{b} \int_{y_1}^{y_2} dy \\ B_n &= \frac{2}{b} \int_{y_1}^{y_2} \cos \frac{n\pi}{b} y \, dy & n \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

となる。斯くして(2.2)より E_{mn} が求められる。

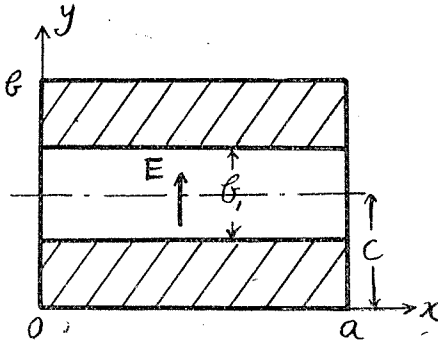
§ 3. 容量性窓のサスセフタンスの計算

第3.1圖の様な容量性窓の場合には $z = 0$ の面上の E_y の振幅分布は

$$\varepsilon(x, y) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{a} x & \dots\dots\dots \text{窓の面上} \\ 0 & \dots\dots\dots \text{導体面上} \end{cases} \quad (3.1)$$

この場合のフーリエ展開は

$$F(x) = \sin \frac{\pi}{a} x, \quad G(y) = \sum_0^{\infty} B_n \cos \frac{n\pi}{b} y \quad (3.2)$$



第 3.1 圖

となるから $A_1 = 1, A_m = 0 (m > 1)$ と置くとよい。所が $E_{mn} = A_m B_n$ であるから (1.20) 式の jB_L と jB_M が零となり (1.19) 式の jB_C は第 3.1 圖の場合の $Y = jB_C$ と同じものとなる。斯くして第 3.1 圖の容量性窓のサスセブタンスは

$$jB_C = \frac{1}{|E_{10}|^2} \sum_{n=1}^{\infty} M_{1n} |E_{1n}|^2 \quad (3.3)$$

にて計算出来るが

$$\left. \begin{aligned} E_{10} &= A_1 B_0 = \frac{1}{b} \int_{y_1}^{y_2} dy & y_1 &= c - \frac{b_1}{2} & y_2 &= c + \frac{b_1}{2} \\ E_{1n} &= A_1 B_n = \frac{2}{b} \int_{y_1}^{y_2} \cos \frac{n\pi}{b} y dy & (n \neq 0) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

故に

$$E_{10} = \frac{b_1}{b}, \quad E_{1n} = E_{10} \frac{4b}{n\pi b_1} \sin \frac{n\pi b_1}{b} \cos \frac{n\pi c}{b} \quad (n \neq 0) \quad (3.4)'$$

又 (1.n) 姿態の界アドミッタンスは

$$M_{1n} = \frac{(\pi/a)^2 - k^2}{j\omega\mu \Gamma_{1n}} \quad \Gamma_{1n} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2} \quad (3.5)$$

$(n = 0, 1, 2, \dots)$

従つて (3.3), (3.4)', (3.5) から

$$jB_C = \left(\frac{4b}{\pi b_1}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} M_{1n} \frac{1}{n^2} \sin^2 \frac{n\pi b_1}{2b} \cdot \cos^2 \frac{n\pi c}{b} \quad (3.6)$$

となる。

特に $c = b/2$ である様な對稱な容量性窓の場合には

$$E_{1, 2n+1} = 0, \quad \frac{E_{1, 2n}}{E_{10}} = (-1)^n \frac{2b}{n\pi b_1} \sin \frac{n\pi b_1}{b} \quad (3.7)$$

となるから

$$jB_C = 2 \left(\frac{b}{\pi b_1}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} M_{1, 2n} \frac{\left(1 - \cos \frac{2n\pi b_1}{b}\right)}{n^2}$$

所が M_{1n} は次の様に書き直す事が出来る

$$M_{1n} = j M_{10} \left[\left(\frac{n\lambda_g}{2b}\right)^2 - 1 \right]^{-1/2}$$

竝に λ_g は基本波 (1.0) 姿態の管内波長で

$$\lambda_g = 2\pi \sqrt{k^2 - (\pi/a)^2}$$

であるから $(n\lambda_g/2b)^2 \gg 1$ ならば ($n \geq 2$ に對し)

$$M_{1n} \approx j M_{10} 2b/n\lambda_g \quad (3.9)$$

故に (3.8) は

$$\frac{B_c}{M_{10}} = \frac{2}{\lambda_g} \frac{b^2}{\pi^2 b_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos 2n\pi b/b_1}{n^3} \quad (3.10)$$

上式の總和の計算には次の公式を利用すればよい。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos nx}{n^3} = -\frac{1}{2} x^2 \log x + \frac{3}{4} x^2 + \frac{x^4}{288} + \dots \quad (3.11)$$

斯くして容量性窓のサセプタンス B_c が求められるわけである。

扱て (3.6) 式の E_{10} , E_{1n} に對し積分の形の式 (3.4) 式を代入すると

$$jB_c = 4 \sum_{n=1}^{\infty} M_{1n} \frac{\left[\int_{y_1}^{y_2} \int_{y_1}^{y_2} \cos \frac{n\pi}{y} y \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y' dy dy' \right]}{\left[\int_{y_1}^{y_2} dy \right]^2} \quad (3.12)$$

故に

$$\frac{B_c}{M_{10}} = \frac{8b}{\lambda_g b_1^2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{y_1}^{y_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{b} y \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y' dy dy' \quad (3.13)$$

となつて Miles⁽⁴⁾ の與へた式が得られる。この式を計算するため Miles は次の様にした。即ち

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{b} y \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y' = -\frac{1}{2} \log \left| \cos \frac{\pi}{b} y - \cos \frac{\pi}{b} y' \right|$$

を利用し且次の様な變數變換を行つて $y = y_1 \sim y_2$ の積分範圍を $\theta = 0 \sim \pi$ までに變更する

$$\cos \frac{\pi}{b} y = \alpha \cos \theta + \beta$$

$$\alpha = \sin \frac{\pi c}{b} \cdot \sin \frac{\pi b_1}{2b} \quad \beta = \cos \frac{\pi c}{b} \cdot \cos \frac{\pi b_1}{2b}$$

そうすると窓が狭い時即ち b_1 が小さい場合には

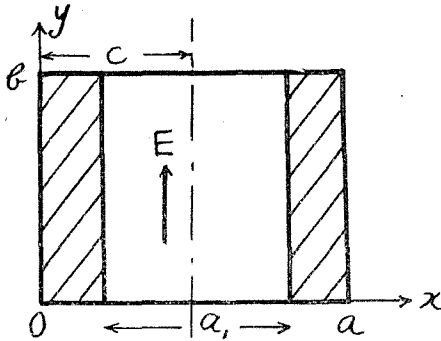
$$\frac{B_c}{M_{10}} = \frac{4b}{\lambda_g} \log_e \left(\operatorname{cosec} \frac{\pi c}{b} \cdot \operatorname{cosec} \frac{\pi b_1}{2b} \right) \quad (3.14)$$

特に對稱窓の場合は $c = b/2$ であるから

$$\frac{B_c}{M_{10}} = \frac{4b}{\lambda_g} \log_e \left(\operatorname{cosec} \frac{\pi b_1}{2b} \right) \quad (3.15)$$

§ 4. 誘導性窓のサセセプタンスの計算

第 4.1 圖の様な誘導性窓の場合には $z = 0$ の面上の E_y 振幅分布は



第 4.1 圖

$$\varepsilon(x_1, y) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{a_1} (x-x_1) & \text{窓の面上} \\ 0 & \text{導体面上} \end{cases} \quad (4.1)$$

この場合のフーリエ展開は、

$$G(y) = 1, \quad F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (4.2)$$

となるから、 $B_0 = 1, B_n = 0 (n \neq 0)$ である。所が $E_{mn} = A_m B_n$ であるから (1.20) 式の jB_c と jB_M は 0 となり (1.19) 式の jB_L は第 4.1 圖の $Y=jB_L$

と同じものになる。斯くして第 4.1 圖の誘導性窓のサセプタンスは

$$jB_L = \frac{2}{|E_{1,0}|^2} \sum_{m=2}^{\infty} M_{m0} |E_{m0}|^2 \quad (4.3)$$

にて計算される。茲に

$$E_{m0} = A_m B_0 = \frac{2}{a} \int_{x_1}^{x_2} \sin \frac{\pi}{a_1} (x-x_1) \sin \frac{m\pi}{a} x dx \quad (4.4)$$

$m = 1, 2, 3, \dots$

即ち

$$E_{m0} = \frac{4\pi}{aa_1} \sin \frac{m\pi c}{a} \cdot \cos \frac{m\pi a_1}{2a} \left[\left(\frac{\pi}{a_1} \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 \right] \quad (4.4')$$

(4.3) と (4.4)' とより

$$jB_L = \frac{2 \left[\left(\frac{a}{a_1} \right)^2 - 1 \right]}{\left(\sin \frac{\pi c}{a} \cdot \cos \frac{\pi a_1}{2a} \right)^2} \sum_{m=2}^{\infty} M_{m0} \frac{\left(\sin \frac{m\pi c}{a} \cdot \cos \frac{m\pi a_1}{2a} \right)^2}{\left[\left(\frac{a}{a_1} \right)^2 - m^2 \right]^2} \quad (4.5)$$

茲に

$$M_{m0} = \frac{1}{j\omega\mu} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - k^2} = -j\eta^{-1} \left[\left(\frac{m\lambda}{2a} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \quad (4.6)$$

$\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}, \quad \lambda: \text{自由空間波長}$

若し $(m\lambda/2a)^2 \gg 1$ ならば

$$M_{m0} = -j\eta^{-1} \frac{m\lambda}{2a} \quad (4.6')$$

特に $c = a/2$ で對稱な誘導性窓の場合には $E_{2m+1,0} = 0$ となり $E_{2m+1,0}$ のみが残り

$$jB_L = -j\eta^{-1} \frac{\lambda}{a} \frac{[p^2 - 1]^2}{\cos^2 y} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m+1) \cdot \cos^2 (2m+1)y}{[p^2 - (2m+1)^2]^2} \quad (4.7)$$

茲に $p = a/a_1, \quad y = \pi a_1/2a$

斯くして jB_L が求められるわけである。又 Miles の公式を誘くには (4.3) を (4.4) の形の

E_{m0} を代入し且 $m \geq 2$ に對し (4.6') を採用して

$$jB_L = -j \frac{\lambda}{a\eta} \frac{\int_{x_1}^{x_2} \int_{x_1}^{x_2} \varepsilon(x) \varepsilon(x') \sum_{m=2}^{\infty} m \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{a} x' dx dx'}{\left[\int_{x_1}^{x_2} \varepsilon(x) \sin \frac{\pi x}{a} dx \right]^2}$$

但 $\varepsilon(x) = \sin \pi/a_1 (x - x_1)$

$m = 2$ から ∞ までの總和は $m = 1$ から ∞ までの總和から $m = 1$ の第一項を引いたものに等しいから

$$jB_L = -j \frac{\lambda}{a\eta} \left[\frac{\int_{x_1}^{x_2} \int_{x_1}^{x_2} \varepsilon(x) \varepsilon(x') \sum_{m=1}^{\infty} m \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{a} x' dx dx'}{\left[\int_{x_1}^{x_2} \varepsilon(x) \sin \frac{\pi x}{a} dx \right]^2} - 1 \right] \quad (4.9)$$

斯くして Miles の公式が得られる。これを計算するには

$$\sum_{m=1}^{\infty} m \sin m\theta \cdot \sin m\theta' = -\frac{1}{2} \frac{\sin\theta \cdot \sin\theta'}{(\cos\theta - \cos\theta')^2}$$

を利用し且

$$\cos \frac{\pi}{x} x = a \cos\theta + \beta$$

$$a = \sin\left(\frac{\pi c}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi a_1}{2a}\right), \quad \beta = \cos\left(\frac{\pi c}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi a_1}{2a}\right)$$

の如き變數變換を利用し積分範圍 $x = x_1 \sim x_2$ を $\theta = 0 \sim \pi$ に變更すると

$$jB_L = -j \frac{\lambda}{a\eta} \left[\frac{\sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_0^{\pi} \varepsilon(\theta) \sin m\theta d\theta \right)^2}{a^2 \left(\int_0^{\pi} \varepsilon(\theta) \cdot \sin\theta d\theta \right)^2} - 1 \right] \quad (4.10)$$

茲に $\varepsilon(\theta)$ は窓の面上の電界の振幅分布で

$$\varepsilon(\theta) = A \sin\theta \quad A: \text{定 数} \quad (4.11)$$

の形となるから

$$jB_L = -j \frac{\lambda}{a\eta} \left[\frac{1}{a^2} - 1 \right] = -j \frac{\lambda}{a\eta} \left[\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi c}{a}\right) \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi a_1}{2a}\right) - 1 \right] \quad (4.12)$$

式は基本波の界アドミッタンスは

$$M_{10} = \frac{\Gamma_{10}}{j\omega\mu} = \frac{1}{\eta} \frac{\lambda}{\lambda_g}$$

$$\therefore \frac{B_L}{M_{10}} = -\frac{\lambda_g}{a} \left[\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi c}{a}\right) \cdot \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi a_1}{2a}\right) - 1 \right] \quad (4.13)$$

若し $c = a/2$ で對稱の誘導性窓の場合は

$$\frac{B_L}{M_{10}} = -\frac{\lambda_g}{a} \cot^2\left(\frac{\pi a_1}{2a}\right) \quad (4.14)$$

(4.13), (4.14) が Miles の與えた公式である。

§5. 一般の窓のサスセプタンスの計算

第 1.1 圖の様な一般の窓のアドミッタンスは (1.19), (1.20) で求められる。即ち窓のアドミッタンスは三つの項からなり

$$Y = jB_c + jB_L + jB_M \quad (5.1)$$

であり第一項の jB_c 及び第二項の jB_L は夫々第 3 節及び第 4 節で計算されるものである。簡單のため窓が上下及び左右に對稱であるとすると jB_c は (3.10) 式或は (3.15) 式で計算せられ又は (4.7) 式或は (4.14) 式で計算せられる。故に jB_M が計算されると (5.1) から窓のアドミッタンス Y が計算せられるわけである。

扱て窓が上下及び左右に對稱であると

$$\left. \begin{aligned} A_{2m} &= 0, & A_{2m+1} &= \frac{4\pi}{\alpha\alpha_1} (-1)^m \cos \frac{(2m+1)\alpha_1\pi}{2a} \sqrt{\left[\left(\frac{\pi}{\alpha_1}\right)^2 - \left(\frac{(2m+1)\pi}{a}\right)^2\right]} \\ B_0 &= b_1/b, & B_{2n+1} &= 0, & B_{2n} &= (-1)^n B_0 \frac{2b}{n\pi b_1} \sin \frac{n\pi b_1}{b} \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

であるから

$$jB_M = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} M_{2m+1, 2n} \frac{|E_{2m+1, 2n}|^2}{|E_{10}|^2} \quad (5.3)$$

である。従つて $E_{10} = A_1 B_0$, $E_{2m+1, 2n} = A_{2m+1} \cdot B_{2n}$ であるし又

$$\begin{aligned} M_{2m+1, 2n} &= \frac{1}{j\omega\mu\Gamma_{2m+1, 2n}} \left\{ \left(\frac{2m+1}{a} \pi \right)^2 - k^2 \right\} \\ \Gamma_{2m+1, 2n} &= \left[\left(\frac{2m+1}{a} \pi \right)^2 + \left(\frac{2n\pi}{b} \right)^2 - k^2 \right]^{1/2} \\ &= \frac{2n\pi}{b} \left[1 + \frac{1}{(2n)^2} \left\{ \left(\frac{2m+1}{a} b \right)^2 - \left(\frac{2b}{\lambda} \right)^2 \right\} \right]^{1/2} \\ M_{10} &= \frac{1}{\omega\mu} \left(\frac{\pi}{a} \right) \sqrt{\left(\frac{2a}{\lambda} \right)^2 - 1} \end{aligned}$$

であるから

$$\frac{B_M}{M_{10}} = -\frac{8b^2(p^2-1)^2}{\pi^2\alpha b_1^2 \cos^2 x \cdot \sqrt{q^2-1}} \sum_{m=1}^{\infty} D_m \frac{((2m+1)^2 - q^2)}{[p^2 - (2m+1)^2]^2} \cos^2(2m+1)x \quad (5.4)$$

茲に

$$D_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} \sin^2 2ny \cdot \left[1 + \frac{1}{(2n)^2} \left\{ \left(\frac{2m+1}{a} b \right)^2 - \left(\frac{2b}{\lambda} \right)^2 \right\} \right]^{-1/2}$$

$$p = \frac{a}{\alpha_1}, \quad q = \frac{2a}{\lambda}, \quad x = \frac{\pi\alpha_1}{2a}, \quad y = \frac{\pi b_1}{2b}$$

結 言

本篇の解法の特徴は窓の面上の電界分布を假定しそれを導波管断面に上フーリエ展開（一般には縦方向の展開と横方向の展開との積）を行い各姿態の種類は級数の各項に對應するものとして求めその振幅は級数の各項の係数を求めると云う純數學的な手段を用いた事であり且つ級数の各項に對しては唯一つの姿態波が對應する様に、 E 波と H 波の姿態群を用いず、 $E_z \equiv 0$ の姿態群を用いた事である。このため複雑な境界値問題が物理的意味を把握しつつ機械的に計算が行い得るわけである。又一般の窓のサスセプタンスは誘導性窓と容量性窓のサスセプタンスと補正項からなつてると云う興味ある事柄に對しても明瞭な説明を與えている。尙本篇には窓を作つてゐる導體の厚さの影響や絞りの穴の上に唯一つの mode のみを假定する事に對する補正や計算途中の近似のとり方に對する補正に對しては既述文献⁽³⁾⁽⁴⁾に取扱はれているのでそれには觸れていない。

文 献

- 1) 松本正, 鈴木道雄; 導波管内の絞りに就て, 電學誌 (昭和22年7月) 67巻第708號
- 2) 松本正, 鈴木道雄; 立體回路に關する二三の研究, 北海道大學工學部彙報第1卷 p.115~143 (昭和23年4月)
- 3) 松本正, 鈴木道雄; 管内絞りの理論, 電氣通信學會立體回路専門委員會資料第八輯 (昭和24年8月)
- 4) J. W. Miles: The Equivalent Circuit for a Plane Discontinuity in a Cylindrical Wave Guide, Proc. of I. R. E. 1946