



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	自然砂の粒度分布に関する考察
Author(s)	柏村, 正和; Kashiwamura, Masakazu
Citation	北海道大學工學部彙報, 6, 45-53
Issue Date	1952-09-01
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40494
Type	departmental bulletin paper
File Information	6_45-53.pdf



自然砂の粒度分布に関する考察

柏村 正和

(昭和27年2月18日受理)

Consideration on a Size Distribution of Natural Sand

Masakazu KASHIWAMURA

The size distribution of sea bottom sand off the coast of Ishikari mostly follows the next equation :

$$f(r) dr = e^{-n\left(\frac{r}{r_0}\right)^2} dr$$

It is said that this equation satisfies not a little also on other natural sand. Using this equation, an explanation on the result of sedimentation curve of sand and applications to other experiments are tried.

序

1949年夏、石狩沖の海底砂を採集しその粒度分布を調べた。そして海流や地形が粒度に如何なる影響を與えているか知りたいと思ひ、海底砂の沈降速度実験を行つた。その結果、時間と沈積量に関する類似せる曲線群を得た (Fig. 9).

此の曲線は多分自然砂の粒度分布によつて決定されるものと考え、各自然砂につき粒度分布を仔細に観察する中に次の事實を見出した。即ち、『粒度分布曲線の多くのものが、その頂點より左の勾配が急峻で、右がなだらかである (Fig. 1)。又曲線の傾斜の傾向が粒の平均粒度に拘らず似ている』ということであつた。小田島氏*によれば、海

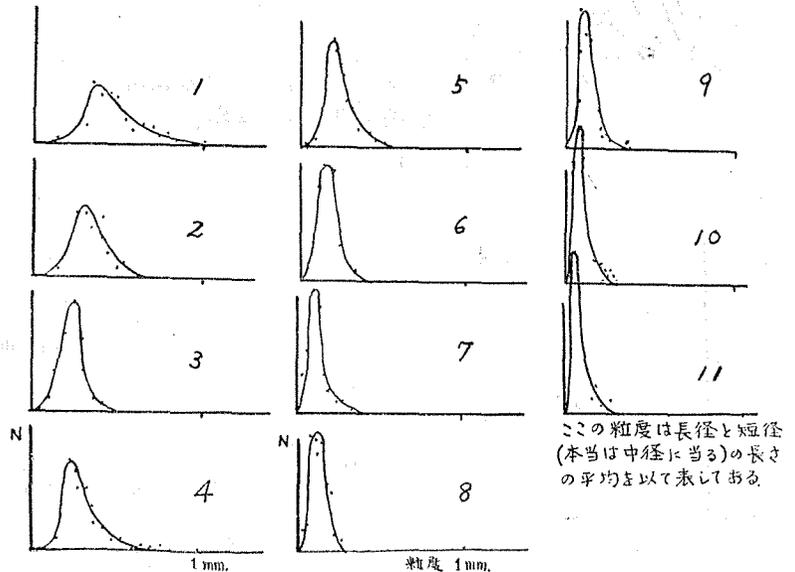


Fig. 1

* 小田島 成：室蘭工大研究報告，Vol. 1, No. 2, 1951.

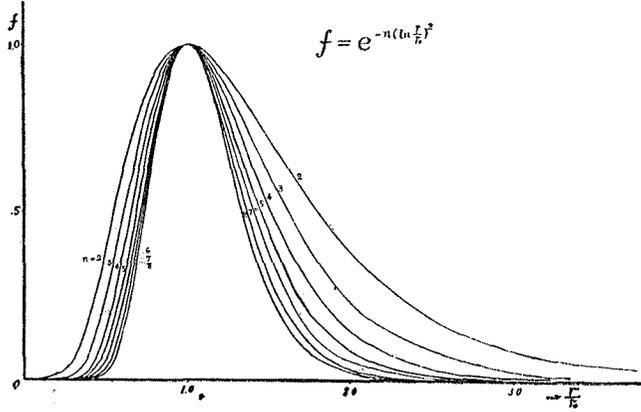


Fig. 2

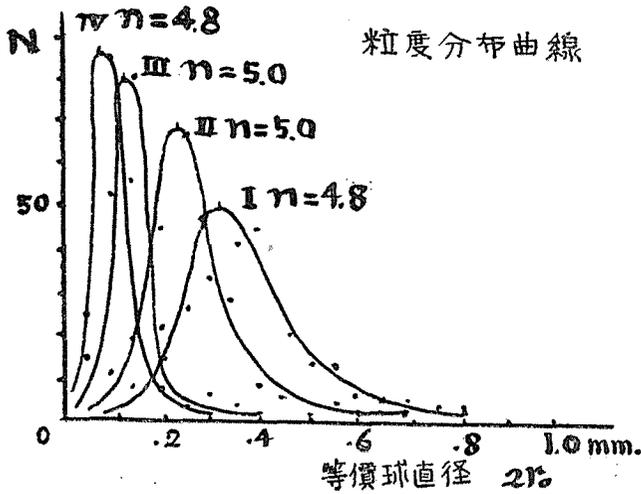


Fig. 3

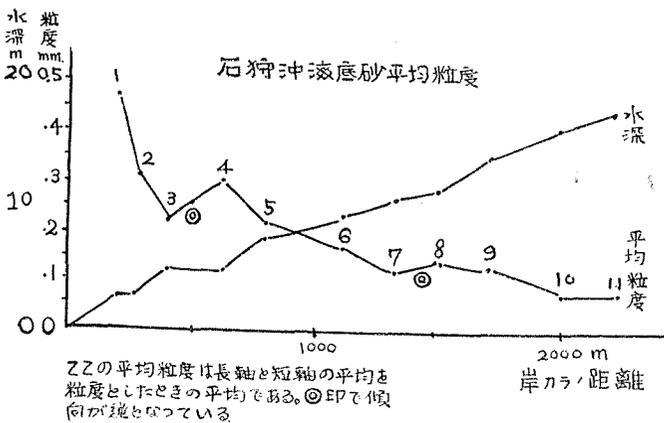


Fig. 4

岸の砂の粒度分布は 對數的正規分布になるという。

自然砂の粒度分布に此の分布函数を興え、それを用いて沈降實驗や他の實驗結果を説明しようと試みたのである。

(1) 自然砂の粒度分布曲線

自然砂（ここでは石狩の海底砂）の粒度分布が對數的正規分布に従うものが多いのは Fig. 1 によつても判る。この分布を式で表すと

$$f(r) dr = e^{-n(\ln \frac{r}{r_0})^2} dr \dots (1)$$

となる。nをいろいろ變える事により曲線の傾向を變化させる事が出来、實際の分布曲線に近づけることが可能であろうと考えた。此の式を以て自然砂の分布式と假定し、種々の實驗に當はめようとするのである。此の式の n を 2 から 8 迄變化させた曲線群は Fig. 2 に示してある。石狩沖で採集した 11 箇所の資料の分布曲線を見ると、此の分布に従いそうなのが數箇あり、而も全部 n = 4~5 であつた (Fig. 3)。全然此の式と傾向を異にするのは僅か 2 箇所で、しかも此の石狩にては、沖に向つて砂が細くなる傾向があるのに、此の 2 箇所では逆轉の現象を示していた (Fig. 4)。もし此の對數的正規分布を以て正常の砂の分布とするなら

ば、此の2點に於ては特殊な力、例えば砂堆の影響、不規則な水の流れ等によつて攪亂され、砂が異常分布を示すのかも知れない。

(2) 分布式の自然砂の体積への應用

今砂の1粒1粒を完全球と見做すならば、(1)に於ける分布式を使つてその体積が算出出来る筈である。砂粒の数の分布は次の形となる。

$$N dr = N_0 e^{-n\left(\frac{\ln r}{r_0}\right)^2} dr \quad \dots\dots\dots (2)$$

此處に N は單位半徑内にある粒子の數、 r は砂粒を同体積の球に置き換えた時の半徑である。 r_0, N_0 は最も數の多い大きさを有する砂粒の r 及び N を與える。上の(2)式と砂粒を完全球と考える事により砂全体の占める實体積は次の通りとなる。

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\infty \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot N_0 e^{-n\left(\frac{\ln r}{r_0}\right)^2} dr \\ &= \frac{4}{3} \pi r_0 N_0 e^{\frac{1}{4n}} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \\ &= \frac{4}{3} \pi r_0^4 N_0 e^{\frac{1}{4n}} \sqrt{\frac{\pi}{n}} \end{aligned}$$

今、砂の全粒數を N_{Total} で表すと

$$\begin{aligned} N_{Total} &= \int_0^\infty N_0 e^{-n\left(\frac{\ln r}{r_0}\right)^2} dr \\ &= N_0 r_0 e^{\frac{1}{4n}} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \\ &= N_0 r_0 e^{\frac{1}{4n}} \sqrt{\frac{\pi}{n}} \end{aligned}$$

故に結局實体積は

$$V = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \cdot N_{Total} \cdot e^{\frac{15}{4n}} \quad \dots\dots\dots (3)$$

となる。砂粒相互の間には空隙が多く砂の實体積と見掛上の体積との比、これを今假に實体積率と呼ぶなら、實体積を實体積率で割るならば砂の見掛の体積となる。今實体積率を A とすると

$$V_{obs} = \frac{4}{3} \pi r_0^3 N_{Total} e^{\frac{15}{4n}} / A \quad \dots\dots\dots (4)$$

此の式が自然の砂粒に合致するか否かを檢する爲、石狩の海底砂の數箇所のものについて實測を行つた。Fig. 5の如く先を細くして封じた硝子管の上部に目印を附し、そこ迄の容積を水銀を用いて測定し0.05200 ccを得た。次に此の目印迄、乾燥した海底砂を入れ、充分叩いて密にし、ぎつしりつまらせる。

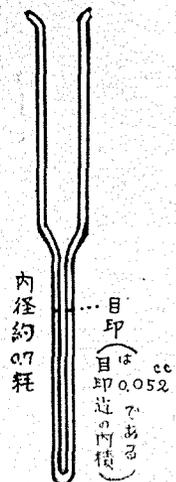


Fig. 5

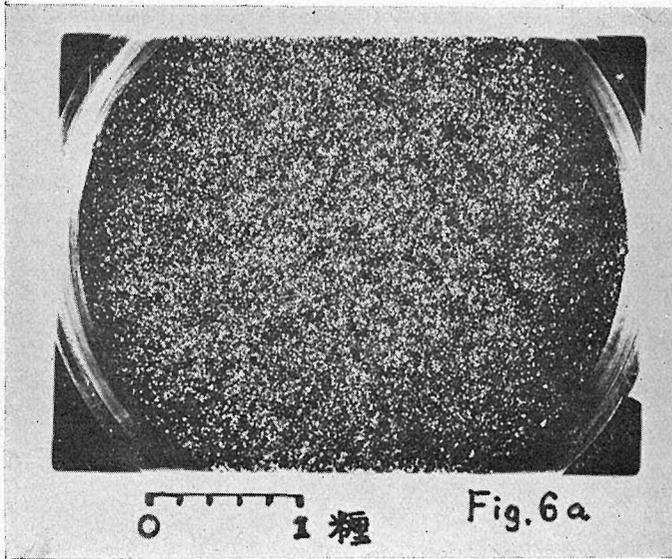


Fig. 6 a

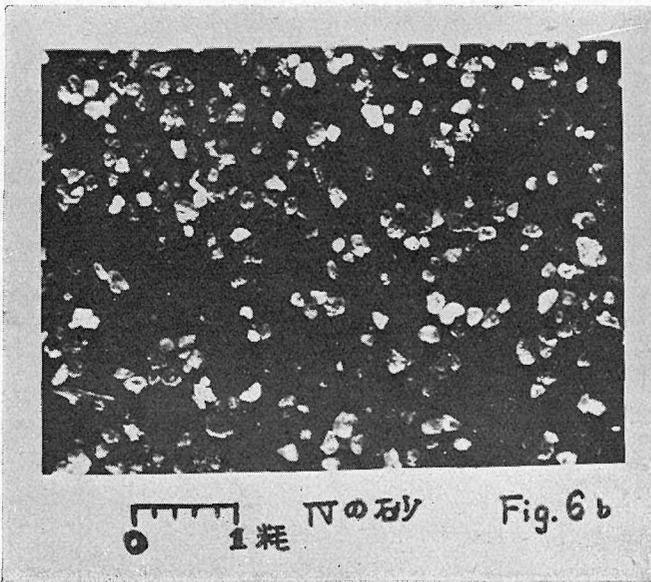


Fig. 6 b

その砂を今度は圍いのある硝子板上に逸しない様に移し、一面に擴げて寫眞に撮り (Fig. 6), 擴大して數を丹念に數える. これが N_{Total} を與えるのであるが, 更に同資料から 200 粒以上の粒子について擴大鏡を用いて, 粒度分布曲線を出し, それから r_0 と n とを定めた. 又 A は比重壘により測定し 0.50~0.55 (粒子が粗な程大きい) を得た. 資料として採つた砂は石狩の海底砂の中, 最も分布曲線が分布式に従いそうなもの 4 種である. 結果を表にすると Fig. 7 の如くなる.

資料が少ないので決定的でないが, III と IV は實測値に極めて近い. I と II が大きく實測値と合致しないのは, r_0 を過大に決定した爲ではないかと思われる. III と IV は寫眞上で 1 粒毎に大きさを測つたのであるが, I と II は粒子が大きいので 1 粒づつピンセットで挟んで擴大鏡で測つた爲小粒子が見落されて計測に洩れ, r_0 が大きく出たも知れない. 併し此處で一番問題とすべきは r_0 の取り方であつた. (4) 式で明かな如く, V は

Fig. 7

	等價球 半徑 r_0 cm	N_{Total}	實體積率 A	n	$\frac{4}{3} \pi r_0^3 N_{Total} e^{-\frac{15}{4n}} / A$ cc	同左 實測値 cc
I	0.016..	1847	0.55	4.8	0.12	0.052
II	0.011..	4473	0.50	5.0	0.08	0.052
III	0.0062	12495	0.50	5.0	0.05	0.052
IV	0.0044	31210	0.50	4.8	0.05	0.052

r_0 の 3 乗により左右されるのであるから、 r_0 の少しの誤差は大きく V の値を變動させるのである。極端にいうならば砂の粒子は楕圓体に近いものであり、これを上方から見ると長軸と中軸のみが觀測されて、短軸は常に見えないことになる筈である。故に寫眞に依つて粒度分布を測定する際には短軸が測定出来ない爲に、實際上砂粒と同体積の球の半径が如何になるか決める事が出来ない。併し多くの粒について長徑と中徑との比が約 1.3 附近で最も多く、粒の平均の比はどの資料も大体 1.5 附近の一定に近い値となつた。このことは大体に於て、粒の大小に拘らず長徑と中徑との比が一定の分布をなすことを示している。このことから中徑と短徑の比も一定と推論し、更に此の場合長徑と中徑の比が、中徑と短徑の比に等しいと假定する。勿論是を確める方法がないし、又ある海岸では極めて扁平な小石の集積しているのを見ることがあるから、此の假定は頗る曖昧である。併し此の資料についてよく觀察すると極端に扁平な粒は殆どなく、大体上の假定を容認しても大きな誤がなさそうに考えられる。以上の理由から測定時の等價球半径として、粒子の中軸をとることにした。何となれば、上の假定を満足する楕圓体の体積はその中軸の長さを半径とする球の体積に等しいからである。以上の如くにして r_0 を決めるわけであるが、粒度分布曲線は前述の如く砂粒 200 程度について作つたものであるが、200 粒では極めて不安定な曲線となり、理想としては 5000~10000 の粒から作らなければ中々きれいな曲線は得られまいと思う。實驗上これを行うのは不可能に近いので、200 粒から作つた粒度分布曲線から r の平均値 \bar{r} を計算し、それから更により確からしい r_0 を決定する工夫をした。200 粒の粒子から作つた曲線から假に r_0 を圖上で決定出来たととしても、とても信頼出来る値でないからである。 \bar{r} から r_0 を決定する方法を述べれば、最初の (1) 式を用いて

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{\int_0^\infty r e^{-n\left(\frac{r}{r_0}\right)^2} dr}{\int_0^\infty e^{-n\left(\frac{r}{r_0}\right)^2} dr} \\ &= r_0^2 e^{\frac{1}{2n}} \sqrt{\frac{\pi}{n}} / r_0 e^{\frac{1}{4n}} \sqrt{\frac{\pi}{n}} \\ &= r_0 e^{\frac{3}{4n}} \\ \therefore \bar{r} &= r_0 e^{\frac{3}{4n}} \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

故に粒度分布曲線から n と \bar{r} を決定すれば r_0 が算出される。併しながら是を以てしても $V_{0.05}$ の値は小數以下 2 位迄より信用出来ない。

(3) 分布式の沈降實驗への應用

H. S. Allen は 1900 年に Philosophical Magazine に於て“砂粒は 15°C で限界直徑 0.17 mm 以下では沈降實驗に對し Stokes の法則が成立つ”と云つている。此の法則の成立を假定して沈降時間と沈積量との關係を出してみよう。先ず此の實驗裝置について説明する。Fig. 8 のような内半径 1.95 mm の硝子筒に水を入れ高さ 1 m から砂 1 g を同時に落下せしめる。又それと同時に時計を發動させて時

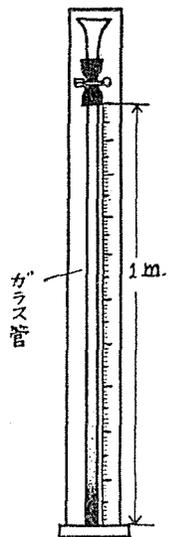


Fig. 8

間毎の砂の沈積量を下からの高さで讀むのである。此の結果は Fig. 9 に示すが、粗な砂の時は落下速度が早過ぎて細かい曲線の傾向が確かめられないが、小さな粒の砂群程きれいな曲線となつている。Stokes の法則の成立つ粒子は相當小さいのであるが、此の法則の適用を受ける砂は此の實驗では幸いきれいな曲線として得られているので、理論から得た曲線と比較する事が出来る。理論式を出すに當つて次の事を假定する。

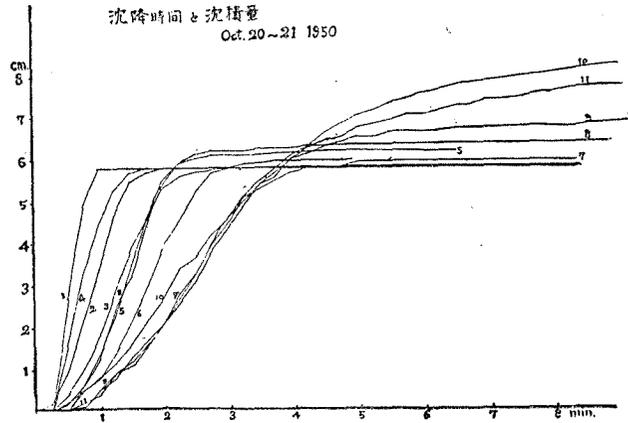


Fig. 9

1. 粒子分布は $N dr = N_0 e^{-n\left(\frac{r}{r_0}\right)^2} dr$ である。
2. 粒子は完全球で沈降に際し Stokes の法則が成立つ。
3. 粒子の密度はすべて一定とする。

扱て粒子 1 箇に働く重力は

$$\frac{4}{3} \pi r^3 (\rho - \rho_0) g \quad \rho \text{ は粒子の密度, } \rho_0 \text{ は液体の密度, } g \text{ は重力加速度}$$

同じく Stokes による摩擦力は

$$6\pi\eta r \quad v \text{ は沈降速度, } \eta \text{ は粘性係数}$$

故に粒子の終速度 v_t は

$$v_t = \frac{2}{9} \frac{r^2 (\rho - \rho_0)}{\eta} g$$

管の長さを L とすると粒子 1 箇が底に到達する迄の時間 t は

$$t = \frac{L}{v_t} = \frac{9\eta L}{2r^2 (\rho - \rho_0) g}$$

逆に t なる時間に丁度底に届く粒子の大きさは

$$r = \left\{ \frac{9\eta L}{2t (\rho - \rho_0) g} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

故に時間 t に於て丁度底に届く粒子の単位時間當りの數 N_t は

$$\begin{aligned} N_t &= N_0 e^{-n\left(\frac{r}{r_0}\right)^2} \cdot \frac{dr}{dt} \\ &= N_0 e^{-\frac{n}{4}\left(\frac{t^2 g}{L}\right)^2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{9\eta L}{2(\rho - \rho_0) g}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t^{-2} \end{aligned}$$

故に時間 t に於て丁度底に届く粒子の単位時間當りの体積 V_t は

$$V_t = \frac{4}{3} \pi r^3 N_t \frac{dr}{dt}$$

$$= \frac{4}{3} \pi \left(-\frac{1}{2} \right) \left\{ \frac{97L}{2(\rho - \rho_0)g} \right\}^2 N_0 t^{-3} e^{-\frac{n}{4} \left(\frac{\ln t_0}{t} \right)^2}$$

故に時間 t に於ける沈積量 H_t は

$$H_t = - \int_0^t V_t dt / FA \quad F \text{ は管の斷面積, } A \text{ は實体積率}$$

$$= c \int_0^t e^{-\frac{n}{4} \left(\frac{\ln t_0}{t} \right)^2} t^{-3} dt$$

$$= c \int_{\infty}^{\ln \frac{t_0}{t}} e^{-\frac{n}{4} x^2} t_0^{-3} e^{3x} (-t_0) e^{-x} dx \quad c = \frac{4}{3} \pi N_0 \left(\frac{1}{2} \right) \left\{ \frac{97L}{2(\rho - \rho_0)g} \right\}^2$$

$$= -c t_0^{-2} e^{\frac{4}{n}} \int_{\infty}^{\ln \frac{t_0}{t}} e^{-\left(\frac{\sqrt{n}}{2} x - \frac{2}{\sqrt{n}} \right)^2} dx$$

$$= -c t_0^{-2} e^{\frac{4}{n}} \frac{2}{\sqrt{n}} \int_{\infty}^x e^{-x^2} dx$$

$$= c t_0^{-2} e^{\frac{4}{n}} \frac{2}{\sqrt{n}} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^x e^{-x^2} dx \right\}$$

$$= c t_0^{-2} e^{\frac{4}{n}} \sqrt{\frac{\pi}{n}} \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx \right\}$$

$$= \frac{4}{3} \pi t_0^3 N_{\text{total}} e^{\frac{15}{n}} \frac{1}{2FA} \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx \right\}$$

故に

$$H_t = \frac{V}{FA} \cdot \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

但し $x = \frac{\sqrt{n}}{2} \ln \frac{t_0}{t} - \frac{2}{\sqrt{n}}$, V は砂の全實体積

今此の曲線を代表して

$$y = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\sqrt{n}}{2} \ln \frac{t_0}{t} - \frac{2}{\sqrt{n}}} e^{-x^2} dx \quad \dots\dots\dots (7)$$

を追跡してみると Fig. 10 の如く n によつて變る曲線群を得る。實驗に依つて得た曲線と此の曲線群中の $n=5$ 附近のものとはかなりよく一致する。併し詳細に觀察すると必ずしも一致していない。これは始めの假定の矛盾が原因すると思われる。何故なら、砂は完全球ではないから如何に微小でも完全に Stokes の法則には従わないし、又密度分布もかなり大きく擴がつて居り、決して密度一定と見做し得ないからである。又實驗の方では、砂を同一高さから同時に落下せしめる事は中々難しく、又落下途中の渦による攪亂も見逃せない障害であり、是等をすべて解決した後の沈積曲線は詳

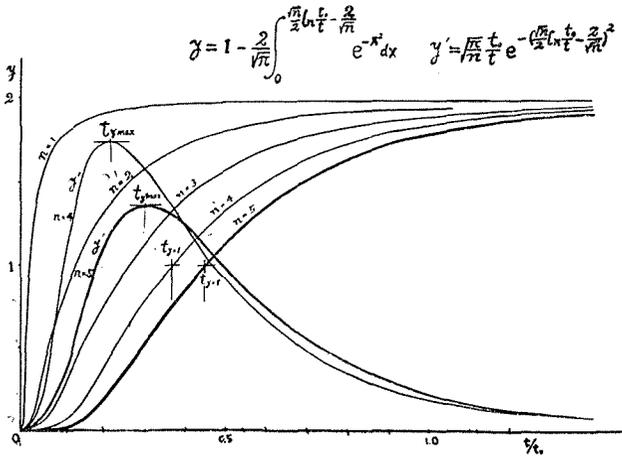


Fig. 10

細に見れば少し理論曲線に近づくであろう。併しながら曲線の大体の傾向は殆ど相似的であり、理論曲線と実験曲線とはある誤差範囲内で一致したと云える。此の事は沈降曲線の性質を決定するものは粒子の粒度分布曲線であることを示していると云えよう。

砂の粒度分布曲線を拵えるのは数百粒について一々測定せねばならないので容易な事ではない。もし上述の沈降実験から逆に粒度分布を求めることが出来れば、大

いに時間と労力の経済になる。砂が(1)式に従うと假定する時は、沈積曲線から砂の分布曲線を導くことが出来る。即ち t_0 と n とを決めればよいわけである (Fig. 10).

$$y = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx \quad x = \frac{\sqrt{n}}{2} \frac{t_0}{t} - \frac{2}{\sqrt{n}}$$

$$y' = \sqrt{\frac{\pi}{n}} \frac{t_0}{t} e^{-\left(\frac{\sqrt{n}}{2} \ln \frac{t_0}{t} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2}$$

であるから $y=1$ とすれば

$$\frac{\sqrt{n}}{2} \ln \frac{t_0}{t} - \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$$

$$\therefore t_0 = t_{y=1} \cdot e^{\frac{4}{n}} \quad \dots \dots \dots (8)$$

又 y' の最大値に於ては

$$y'' = \sqrt{\frac{\pi}{n}} \frac{t_0^2}{t^2} e^{-\left(\frac{\sqrt{n}}{2} \ln \frac{t_0}{t} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2} \left\{ \sqrt{n} \left(\frac{\sqrt{n}}{2} \ln \frac{t_0}{t} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right) - 1 \right\} = 0$$

であるから

$$t_0 = t_{y' \max} \cdot e^{\frac{n}{4}} \quad \dots \dots \dots (9)$$

(8) と (9) から

$$n = 2 \left/ \ln \frac{t_{y=1}}{t_{y' \max}} \right. \quad \dots \dots \dots (10)$$

故に實際得た沈積曲線から $t_{y=1}$ と $t_{y' \max}$ を求めれば (10) 式から n を出すことが出来る。此の n を (9) か (10) に代入して t_0 を出し、管の長さや砂や液の密度粘性係数等から r を出すことが出来る筈である。併し實際此のような方法で逆に分布曲線を出すやり方には多くの難點があり、適合す

る資料もあるが、中々あわない場合が多い。これは砂が正規分布に従わぬ場合は勿論であるが、従つていても密度分布が大きいとか、Stokesの法則に従わぬという爲に適合しないのであろう。此の方法は尙研究中である。

結 言

此の論文の基本式(1)は、普通のガウス分布が運算不能に陥り易いのに対し、多くの方面への運算及び応用が容易であつた。此の式の由來が理論から出發しているものであり、實際の砂について細部迄に適合はしないが、今後の研究により補正項を附する等の手段を講じて、よく適合する實驗式を誘導しようと思う。此の研究により種々の面白い問題に當面した。先ず自然砂の成因が岩石の破壊によるものならば、全体的に見ても部分的に見ても粒度分布は同じ(1)の式に従うであろう。そうすれば前記實驗資料の海底の一點の砂の粒度分布が(1)に従うとすると、附近の全海域の砂の粒度分布も矢張り(1)に従うかもしれない。ある假定を置くと、矢張り全海域の粒度分布も(1)式に従うことが誘導出来るが、勿論是を確める方法は考えられない。又(1)式に従う分布が砂の正常粒度分布であるとすると、(1)と著しく異なる分布を示す地點には、異常な力が働いているか、異常な地形をしていると考えられないであろうか。もし是が確められれば港灣・河川等地球物理學的方面に役立つと思う。又砂の實体積率については、此處では0.50~0.55であつたが、自然砂が自然に堆積した状態ではどうであろうかという問題も考えられる。等大完全球又は完全楕圓が最も密に配列する時の實体積率が約0.74であるから、自然砂の堆積状態に於てはかなりいろいろの値を示すと思う。一般に粗な粒子程衝撃により速かに實体積を増加するから、自然砂の粒度と實体積率からその場所に作用する力とか、堆積してからの年代等を知る上の参考になるかも知れぬ。又砂の長徑と中徑との平均比が粒の大小に拘らずほぼ一定となつたが、是は或は確率論的に誘導出来る普遍的な問題かも知れない。

いろいろの方面で此の様に長徑・中徑・短徑の比が一定になる粒子があるということである。

これ等の研究は對象が多大な數になる爲、實驗精度をあげるには尨大な時間と勞力を要する。此の論文に於てもその爲資料の乏しかつたのを遺憾とする。實驗方法の改善によつて今後此の種の障害を克服して實驗を進める所存である。