同期電動機の同期化現象

保野麻太郎
小野田芳光
(昭和28年3月5日受理)

Pulling-Into-Step Phenomena of Synchronous Motors

Asataro MATANO
Yoshimitsu ONODA

Abstract

In this paper the equation of motion of synchronous induction motors is solved by Taylor series and the condition of pulling-into-step is deduced analytically.

§1. 緒 言

同期化現象の運動方程式は非線型微分方程式となるので，解く事が困難で，これまでは圖式解法，段々法又は微分解析器に依つていた。

之等による解は，すべて圖形になつてのみあらわれてくるため，その微分方程式を滿足する函數，即ち滑り函數を解析的に調べる事はできない。

著者は解を Taylor 級數で表わし，又 Taylor 級數に依る解が實際に適合する事を知つた. もとより Taylor 級數は一價連續且つ微分可能の函數でないと成立しない。ところが，滑り函數 $s(\theta)$ は同期速度に達する $\frac{3}{2}\pi\sim2\pi$ 手前より多價函數となるのである。しかし，かくして解かれた解を吟味した結果，この級數は少なくとも同期速度に達する $\frac{3}{2}\pi$ より手前，即ち多價函數となる前に振動發散する事が知られた。よつてこの級數は合理的である。同期化できないような高い滑りの時は，收斂域が大となるから，位相角の大なる場所の滑りの値を直接算出する事ができる。もしもこの場合，段々法を用いるならばそれに要する勞力は大であるが，Taylor 級數による解は平易である。更にこの解の利益はそれを解析する事により，種々の理論的考察ができる事である。

一例として，從來不可能であつた同期化可能滑りの條件式の理論的導出があげてある。その結果 Edgerton の條件式を多少不完全であるが證明する事ができた。又數値計算で收斂範圍外の點を求めんとする時は，$s\fallingdotseq0$ なる限り，その點を原點として新に級數を作り得るから，段々法的に數値計算する事もできる。

§2. 同期化現象の運動方程式

回轉している誘導電動機の界磁卷線に直流を送入する時は，或る條件の下では同期速度まで加速して同期電動機となる。直流勵磁の存在する場合の回轉子の運動方程式は次の如くである。

$$Is\frac{ds}{d\theta}+cs+A\sin\theta=F \quad \cdots\cdots (1)$$

ここに

$I=$ 回轉部分の慣性モーメント

$s=$ 滑り

$\theta=$ 回轉子の磁極中心軸の電機子回轉磁界に對する遲れ電氣角

$cs=$ 滑り s のときの誘導電動機のトルク

$A=$ 與えられた直流勵磁に對する同期機の最大トルク

$F=$ 負荷

§3. 同期化現象の運動方程式の解法

方程式 (1) の定數の數を 1 個減少するため次の如くおく。

$$l=\frac{c}{I} \qquad m=\frac{F}{c} \qquad n=\frac{A}{c}$$

然らば方程式 (1) は次の如くなる。

$$s\frac{ds}{d\theta}=lm-ls-ln\sin\theta \quad \cdots\cdots (2)$$

この式を滿足する滑り函數 $s(\theta)$ は Taylor の定理により，次の如く表わし得る。

$$s(\theta)=s(\theta_0+h)=s(\theta_0)+hs'(\theta_0)+\frac{h^2}{2!}s''(\theta_0)+\cdots\cdots$$
$$+\frac{h^{r-1}}{(r-1)!}s^{(r-1)}(\theta_0)+\frac{h^r}{r!}s^{(r)}(\theta_0)+\frac{h^{r+1}}{(r+1)!}s^{(r+1)}(\theta_0+kh) \quad \cdots\cdots (3)$$

ここに $\theta=\theta_0+h$ であつて θ_0 は任意の定數で h が變數である。又 $\frac{h^{r+1}}{(r+1)!}s^{(r+1)}(\theta_0+kh)$ は Lagrange の形式で表わした剩餘項であり $0<k<1$ である。

今 $s(\theta_0)=s_0$ とおけば

$$ss'=lm-ln\sin\theta-ls$$
$$s'^2+ss'=-ln\cos\theta-ls'$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{ds}{d\theta}+\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)s\right\}^{r-1}s\left(\frac{ds}{d\theta}\right)=-ln\sin\left(\theta+\frac{r-1}{2}\pi\right)-ls^{(r-1)}$$

であるから

$$s'(\theta_0) = \frac{1}{s_0}\left\{lm - ln\sin\theta_0 - ls_0\right\}$$

$$s''(\theta_0) = \frac{1}{s_0}\left\{-ln\cos\theta_0 - ls'(\theta_0) - s'^2(\theta_0)\right\}$$

....

....

$$s^{(r-1)}(\theta_0)\,s'(\theta_0) + (r-1)\,s_0^{(r-1)}\,s_0'' + \frac{(r-1)(r-2)}{2!}\,s_0^{(r-1)}\,s_0''' + \cdots\cdots + s_0\,s^{(r)}(\theta_0)$$

$$= -ln\sin\left(\theta_0 + \frac{r-1}{2}\pi\right) - ls^{(r-1)}(\theta)$$

更にこれらの式を整頓すれば

$$s(\theta_0) = s_0$$

$$s'(\theta_0) = \frac{1}{s_0}\left\{lm - ln\sin\theta_0 - ls_0\right\}$$

$$s''(\theta_0) = -\frac{1}{s_0}\left\{ln\sin\left(\theta_0 + \frac{1}{2}\pi\right) + ls'(\theta_0) + s'^2(\theta_0)\right\}$$

$$s'''(\theta_0) = -\frac{1}{s_0}\left\{ln\sin\left(\theta_0 + \frac{2}{2}\pi\right) + ls''(\theta_0) + 3s'(\theta_0)\,s''(\theta_0)\right\}$$

$$s^{\mathrm{IV}}(\theta_0) = -\frac{1}{s_0}\left\{ln\sin\left(\theta_0 + \frac{3}{2}\pi\right) + ls'''(\theta_0) + 4s'(\theta_0)s'''(\theta_0) + 6s''^2(\theta_0)\right\}$$

$$s^{\mathrm{V}}(\theta_0) = -\frac{1}{s_0}\left\{ln\sin\left(\theta_0 + \frac{4}{2}\pi\right) + ls^{\mathrm{IV}}(\theta_0) + 5s'(\theta_0)\,s^{\mathrm{IV}}(\theta_0) + 10s''(\theta_0)\,s'''(\theta_0)\right\}$$

$$s^{\mathrm{VI}}(\theta_0) = -\frac{1}{s_0}\left\{ln\sin\left(\theta_0 + \frac{5}{2}\pi\right) + ls^{\mathrm{V}}(\theta_0) + 6s'(\theta_0)s^{\mathrm{V}}(\theta_0) + 15s''(\theta_0)s^{\mathrm{IV}}(\theta_0) + 20s'''^2(\theta_0)\right\}$$

$$s^{\mathrm{VII}}(\theta_0) = -\frac{1}{s_0}\left\{ln\sin\left(\theta_0 + \frac{6}{2}\pi\right) + ls^{\mathrm{VI}}(\theta_0) + 7s'(\theta_0)s^{\mathrm{VI}}(\theta_0) + 21s''(\theta_0)s^{\mathrm{V}}(\theta_0) + 35s'''(\theta_0)s^{\mathrm{IV}}(\theta_0)\right\}$$

....

....

$$s^{(r)}(\theta_0) = -\frac{1}{s_0}\left\{ln\sin\left(\theta_0 + \frac{r-1}{2}\pi\right) + ls^{(r-1)}(\theta_0) + \frac{r!}{(r-1)!\,1!}\,s^{(r-1)}(\theta_0)\,s^{(1)}(\theta_0)\right.$$

$$+ \frac{r!}{(r-2)!\,2!}\,s^{(r-2)}(\theta_0)\,s^{(2)}(\theta_0) + \frac{r!}{(r-3)!\,3!}\,s^{(r-3)}(\theta_0)\,s^{(3)}(\theta_0) + \cdots\cdots$$

$$\left.\cdots\cdots + \frac{r!}{(r-q)!\,q!}\,s^{(r-q)}(\theta_0)\;s^{(q)}(\theta_0)\right\}$$

但し $(r-q)=q$ か $(r-q)=q+1$ である。

以上の式によつて (3) 式の係数が決定される。

滑り函数 $s(\theta)$ は上式によつて知られるように交番無限級数で表わされる。従つて

$$\left|\frac{h^r}{r!}s^{(r)}(\theta_0)\right| < 1$$

で且つ r の増大と共に $\left|\frac{h^r}{r!}s^{(r)}(\theta_0)\right|$ が単調減少して行けばこの級数は収斂する。

(A)

今偏位角 $\theta=0$ の位置に於て直流勵磁が送入せられたとする。此の場合は，誘導機トルクと同期機トルクとが相加わるように作用するので，最も條件のよい場合である。この場合滑り函数 $s(\theta)$ は次の如くなる。

$\theta=0$ で $s=\dfrac{F}{c}=m$ であるから

$$s_0 = m$$

$$s'(\theta_0) = s'(0) = 0$$

$$s''(\theta_0) = s''(0) = -\frac{ln}{m}$$

$$s'''(\theta_0) = s'''(0) = \frac{l^2 n}{m^2}$$

$$s^{\mathrm{IV}}(\theta_0) = s^{\mathrm{IV}}(0) = \frac{ln}{m}\left(1-\frac{l^2}{m^2}-6\frac{ln}{m^2}\right)$$

$$s^{\mathrm{V}}(\theta_0) = s^{\mathrm{V}}(0) = -\frac{l^2 n}{m^2}\left(1-\frac{l^2}{m^2}-16\frac{ln}{m^2}\right)$$

$$s^{\mathrm{VI}}(\theta_0) = s^{\mathrm{VI}}(0) = -\frac{ln}{m}\left(1-\frac{l^2}{m^2}+\frac{l^4}{m^4}-15\frac{ln}{m^2}+51\frac{l^3 n}{m^4}+90\frac{l^2 n^2}{m^4}\right)$$

……………………………………………………

これらを式 (3) に代入すれば

$$s(\theta) = m-\frac{h^2}{2!}\frac{ln}{m}+\frac{h^3}{3!}\frac{l^2 n}{m^2}+\frac{h^4}{4!}\frac{ln}{m}\left(1-\frac{l^2}{m^2}-6\frac{ln}{m^2}\right)-\frac{h^5}{5!}\frac{l^2 n}{m^2}\left(1-\frac{l^2}{m^2}-16\frac{ln}{m^2}\right)$$
$$-\frac{h^6}{6!}\frac{ln}{m}\left(1-\frac{l^2}{m^2}+\frac{l^4}{m^4}-15\frac{ln}{m^2}+51\frac{l^3 u}{m^4}+90\frac{l^2 n^2}{m^4}\right)+\cdots\cdots \tag{4}$$

所で $\theta=\theta_0+h=h$ であるからこの場合は θ と h とは同じである。従つて上式の h を θ で書き換えれば

$$s(\theta) = m-\frac{\theta^2}{2!}\frac{ln}{m}+\frac{\theta^3}{3!}\frac{l^2 n}{m^2}+\frac{\theta^4}{4!}\frac{ln}{m}\left(1-\frac{l^2}{m^2}-6\frac{ln}{m^2}\right)-\frac{\theta^5}{5!}\frac{l^2 n}{m^2}\left(1-\frac{l^2}{m^2}-16\frac{ln}{m^2}\right)$$
$$-\frac{\theta^6}{6!}\frac{ln}{m}\left(1-\frac{l^2}{m^2}+\frac{l^4}{m^4}-15\frac{ln}{m^2}+51\frac{l^3 n}{m^4}+90\frac{l^2 n^2}{m^4}\right)+\cdots\cdots$$

(B)

次に偏位角 $\theta=\pi$ の位置で直流勵磁が送入せられたとする。この場合は誘導機トルクと同

期機トルクとが相殺するように働くので，條件の最も悪い場合である。

$$\theta=\pi \text{ で } s=\frac{F}{c}=m \text{ であるから}$$

$$s_0=m$$

$$s'\ (\theta_0)=s'\ (\pi)=0$$

$$s''\ (\theta_0)=s''\ (\pi)=\frac{ln}{m}$$

$$s'''(\theta_0)=s'''(\pi)=-\frac{l^2n}{m^2}$$

$$s^{\mathrm{IV}}(\theta_0)=s^{\mathrm{IV}}(\pi)=-\frac{ln}{m}\left(1-\frac{l^2}{m^2}+6\frac{ln}{m^2}\right)$$

$$s^{\mathrm{V}}\ (\theta_0)=s^{\mathrm{V}}\ (\pi)=\frac{l^2n}{m^2}\left(1-\frac{l^2}{m^2}+16\frac{ln}{m^2}\right)$$

$$s^{\mathrm{VI}}(\theta_0)=s^{\mathrm{VI}}(\pi)=\frac{ln}{m}\left(1-\frac{l^2}{m^2}+\frac{l^4}{m^4}+15\frac{ln}{m^2}-51\frac{l^3n}{m^4}+90\frac{l^2u^2}{m^4}\right)$$

$$s^{\mathrm{VII}}(\theta_0)=s^{\mathrm{VII}}(\pi)=-\frac{l^2n}{m^2}\left(1-\frac{l^2}{m^2}+\frac{l^4}{m^2}+71\frac{ln}{m^2}-107\frac{l^3n}{m^4}+636\frac{l^2n^2}{m^4}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

これらを式 (3) に代入すれば

$$\begin{aligned}
s(\theta)=m&+\frac{h^2}{2!}\frac{ln}{m}-\frac{h^3}{3!}\frac{l^2n}{m^2}-\frac{h^4}{4!}\frac{ln}{m}\left(1-\frac{l^2}{m^2}+6\frac{ln}{m^2}\right)+\frac{h^5}{5!}\frac{l^2n}{m^2}\left(1-\frac{l^2}{m^2}+16\frac{ln}{m^2}\right)\\
&+\frac{h^6}{6!}\frac{ln}{m}\left(1-\frac{l^2}{m^2}+\frac{l^4}{m^4}+15\frac{ln}{m^2}-51\frac{l^3n}{m^4}+90\frac{l^2n^2}{m^4}\right)\\
&-\frac{h^7}{7!}\frac{l^2n}{m^2}\left(1-\frac{l^2}{m^2}+\frac{l^4}{m^4}+71\frac{ln}{m^2}-107\frac{l^3n}{m^4}+636\frac{l^2n^2}{m^4}\right)\\
&-\frac{h^8}{8!}\frac{ln}{m}\left(1-\frac{l^2}{m^2}+\frac{l^4}{m^4}-\frac{l^6}{m^6}+98\frac{ln}{m^2}-295\frac{l^3n}{m^4}+261\frac{l^5n}{m^6}\right.\\
&\left.+1260\frac{l^2n^2}{m^4}-3382\frac{l^4n^2}{m^6}+5040\frac{l^3n^3}{m^6}\right)\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\tag{5}$$

而して $\theta=\theta_0+h=\pi+h$　故に $h=\theta-\pi$ であるから上式を θ の式に書き換えれば

$$\begin{aligned}
s(\theta)=m&+\frac{(\theta-\pi)^2}{2!}\frac{ln}{m}-\frac{(\theta-\pi)^3}{3!}\frac{l^2n}{m^2}-\frac{(\theta-\pi)^4}{4!}\frac{ln}{m}\left(1-\frac{l^2}{m^2}+6\frac{ln}{m^2}\right)\\
&+\frac{(\theta-\pi)^5}{5!}\frac{l^2n}{m^2}\left(1-\frac{l^2}{m^2}+16\frac{ln}{m^2}\right)+\frac{(\theta-\pi)^6}{6!}\frac{ln}{m}\left(1-\frac{l^2}{m^2}+\frac{l^4}{m^4}+15\frac{ln}{m^2}-51\frac{l^3n}{m^4}\right.\\
&\left.+90\frac{l^2n^2}{m^4}\right)-\frac{(\theta-\pi)^7}{7!}\frac{l^2n}{m^2}\left(1-\frac{l^2}{m^2}+\frac{l^4}{m^4}+71\frac{ln}{m^2}-107\frac{l^3n}{m^4}+636\frac{l^2n^2}{m^4}\right)\\
&-++\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

§4. 同期引入可能滑りの新理論

最も條件の悪い $\theta=\pi$ で直流勵磁を送入した際にも，同期引入が可能なる事が一般に望まれているから，その場合に就いて考える。

式 (5) をみれば h^r の係數の中で n の高次の項が他より大であることが知られる。更に l と m と n との比は $1:3:10$ 位であつて n の高次の部分が大となる。從つて h^r の係數としては n の高次の部分のみ考慮すれば良い事になる。斯くすれば滑り函數 $s(\theta)$ は次の如くおくことができる。

$$
\begin{aligned}
s(\theta) &= m+\frac{1}{2!}\,\frac{ln}{m}h^2-\frac{1}{3!}\,\frac{l^2n}{m^2}h^3-\frac{6}{4!}\left(\frac{ln}{m}\right)\left(\frac{ln}{m^2}\right)h^4+\frac{16}{5!}\left(\frac{l^2n}{m^2}\right)\left(\frac{ln}{m^2}\right)h^5 \\
&\quad+\frac{90}{6!}\left(\frac{ln}{m}\right)\left(\frac{ln}{m^2}\right)^2h^6-\frac{636}{7!}\left(\frac{l^2n}{m^2}\right)\left(\frac{ln}{m^2}\right)^2h^7-\frac{5040}{8!}\left(\frac{ln}{m}\right)\left(\frac{ln}{m^2}\right)^3h^8+\cdots\cdots \\
&\fallingdotseq m+\frac{ln}{m}\left\{\frac{1}{2}h^2-\frac{1}{6}\,\frac{l}{m}h^3-\frac{1}{2^2}\left(\frac{ln}{m^2}\right)h^4+\frac{1}{2^3}\,\frac{l}{m}\left(\frac{ln}{m^2}\right)h^5+\frac{1}{2^3}\left(\frac{ln}{m^2}\right)^2h^6\right. \\
&\quad-\frac{1}{2^3}\,\frac{l}{m}\left(\frac{ln}{m^2}\right)^2h^7-\frac{1}{2^3}\left(\frac{ln}{m^2}\right)^3h^8+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{ki}}\left(-\frac{ln}{m^2}\right)^{r-1}h^{2r} \\
&\quad\left.-\frac{1}{2^{kj}}\left(\frac{l}{m}\right)\left(-\frac{ln}{m^2}\right)^{r-1}h^{2r+1}+\cdots\cdots\right\} \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6)
\end{aligned}
$$

括弧内の級數の存在範圍はこの級數の一般項 $\frac{1}{2^{ki}}\left(-\frac{ln}{m^2}\right)^{r-1}h^{2r}-\frac{1}{2^{kj}}\left(\frac{l}{m}\right)\left(-\frac{ln}{m^2}\right)^{r-1}h^{2r+1}$ が $(-1)^{r-1}+(-1)^r$ となつた時の振動範圍である。依つて大体 $[1,\ -1]$ であるという事が知られる。それ故，同期化するためには負の最大振動範圍で $s(\theta)$ が負となる事を要する。

$$
\therefore \qquad m-\frac{ln}{m}<0
$$

$$
\therefore \qquad m<\sqrt{ln} \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7)
$$

以上の理論中で $s(\theta)$ の存在範圍が振動範圍であるとしたことには多少疑問の餘地があるが，それは次の如く說明される。

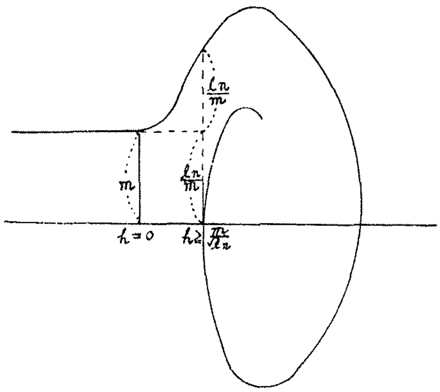
$\theta\fallingdotseq\frac{m}{\sqrt{ln}}$ の附近で $s(\theta)$ は振動するのであるが，そこは第一動搖で同期速度に達する $2\pi\sim\frac{3}{2}\pi$ の所にあり，その附近より $s(\theta)$ は多價函數となるのである。從つて $s(\theta)$ が振動を始めるものと解される。元より一般には式 (6) 中括弧内の無限級數

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{2}h^2-\frac{1}{6}\,\frac{l}{m}h^3-\frac{1}{2^2}\left(\frac{ln}{m^2}\right)h^4+\frac{1}{2^3}\,\frac{l}{m}\left(\frac{ln}{m^2}\right)h^5+\frac{1}{2^3}\left(\frac{ln}{m^2}\right)^2h^6 \\
&\quad--++\cdots\cdots+\frac{1}{2^{ki}}\left(-\frac{ln}{m^2}\right)^{r-1}h^{2r}-\frac{1}{2^{kj}}\left(\frac{l}{m}\right)\left(-\frac{ln}{m^2}\right)^{r-1}h^{2r+1}+\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

が振動を始めるから多價函數となるのであると斷言する事はできない。$m\geqq\sqrt{ln}$ となると $s(\theta)$ は上式の如く表わす事ができなくなり，§3 で求めたように複雑な級數を考えねばならなくな

るからである。それ故，判然とはしないが，從來解かれた圖形よりみてこの場合には斯く考えてよく，$s(\theta)$ の振動範圍が存在範圍であると考えることが可能なのである。

實際に第一動搖で同期化した時の圖形は略々下圖の如くなり，以上の理論が信頼し得る事が知られる。



今　　S = 直流勵磁を與える時の滑り

N = 回轉數 (r.p.m.)

P_m = その勵磁に對する脫出トルクに相當する出力 (kW)

GD^2 = はずみ車効果 (kg-m²)

f = 電壓の周波數 (c/s)

とすれば

$$l = \frac{18\times 10^5 c}{\pi^3 N^2 GD^2 f} = \frac{5.81\times 10^4 c}{N^2 GD^2 f}$$

$$m = S$$

$$n = \frac{P_m}{c}$$

であるから，式 (7) に入れると

$$S < \frac{242}{N}\sqrt{\frac{P_m}{GD^2 f}}$$

即ち，Edgerton が微分解析器を使用して得た條件式が得られる。

附言　　本研究報告は小野田芳光の卒業論文である。