帯 鋸 の 腰 入 (第 2 報)

—(帯鋸のねじれ挫屈について)—

久 野 陸 夫
土 肥 修

(昭和29年2月28日受理)

Stretching for Band Saw Blade II

(Buckling of Saw Blade)

Rokuo KUNO
Osamu DOI

Abstract

A saw blade is buckled by the excessive cutting force of wood. Critical value of buckling is caluculated by the following formula.

$$\frac{\pi^2 b^6 h^2}{36 l^2} EG = -\frac{hb^3}{3} GQ + \frac{E^2 b^2 h^6}{144 R^2} - \frac{bh^3}{12R} EPl\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}\right] + P^2 l^2 \left[\frac{1}{48} + \frac{11}{8\pi^2} - \frac{4}{\pi^3}\right]$$

where

b: thickness of saw blade

h: width of saw blade

l: distance between the two wheels

E: Young's modulus

G: modulus of elastisity in shear

Q: pulling force of saw blade

P: horizontal cutting force

R: radius of curvature of back line of saw blade at the working temperature

Tne greater the pulling force or the smaller the radius of curvature of back line is, the more resistable for buckling the saw blade is. But in such cases the stresses upon the wheel become severe. The maximum stress is as follows.

$$\sigma = \frac{Q}{hb} + \frac{Eb}{2a} + \frac{Eh}{2R}$$

where

a: radius of wheel

When the blade runs whithout no load, it must not be buckled. Therefore

$$\frac{\pi^2 b^6 h^2}{36 l^2} EG = -\frac{hb^3}{3} GQ + \frac{E^2 b^2 h^6}{144 R^2}$$

If the allowable working stress σ is given, these 3 equations should give the value of P, Q and R. Somewhat larger Q and R are the best values.

目　　次

2. 緒　　言

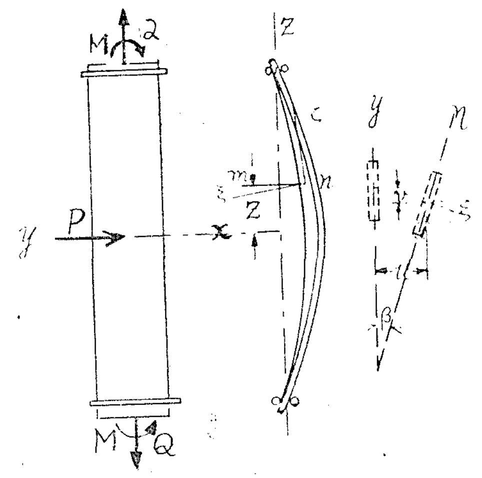
帶鋸製材において製材分留りを善くするためには適當な木取りによつて廢棄部分を少くする樣に努力しなければならないが，なお成可く薄鋸を用い，かつ，ばち巾を狹くし鋸屑となるべき部分を少くすべきである。しかし薄鋸を用いる結果として帶鋸はねじれ挫屈に弱くなるから，引曲りを生じ易くなり，送り力を小さくしなければならないので送り速度も遲くする必要がある。これは製品の品質低下，製產量の減少になるから，帶鋸はなるべくねじれ挫屈に强くすべきである。此の論文は緊張力，帶鋸の腰入，極限送り力（挫屈荷重）の間の關係を求めるのが目的である。この問題に關連して，岩藤，織田兩氏の軸方向に荷重を有する薄板はりのねじれ挫屈について[1]の論文はバックの影響を求める事が出來ないし，齋藤，森兩氏の帶鋸の挫屈について[2]の論文は假定が入つて居る樣に思われる。

2. 挫　屈　荷　重

帶鋸はテンションを付けずにバックのみ付けた場合を考える。故に帶鋸はきわめて背の低い截頭直圓錐面の帶になるのであるが，この樣な帶に上下の鋸車で緊張力を與えて，恰も眞直な帶が鋸車にかかつて居る樣な狀態で使用される。挫屈を考え樣とする帶鋸の自由部分の長さを l とし，この自由部分の兩端にかかる外力は緊張力 Q の他にバック半徑 R の帶鋸を眞直な狀態で上下の鋸車の間に張つて居るためのモーメント M がかかつて居るとする。このモーメント M は，

$$M=\frac{E}{R}\frac{bh^3}{12}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ただし鋸巾を h，厚さを b とする。故に挫屈を考え樣とする部分に加る外力は第１圖の如くになる。送り力 P は問題を簡單にする爲に自由部分の中央にかかつて居るものとし，主切削力（切削の爲，切削方向にかかる力）の影響は少いものとして無視する。兩端



第 1 圖

は自由支持と考える。

第1圖に示す様に固定座標軸 x, y, z および帯鋸の任意の断面 mn の中心に座標軸 ξ, η, ζ を取る。この ξ, η は断面の主軸方向に，ζ は帯鋸の挫屈後の中心線の切線方向に取る。断面の中心 x, y 方向の變位を u, v とし断面の回轉角を β とすれば，u, v, β が極めて微少なときは高次の微少量を無視して釣合の微分方程式を次の如く書く事が出來る。

$$\left.\begin{aligned} B_1\frac{d^2u}{dz^2}&=M_\eta \\ B_2\frac{d^2v}{dz^2}&=-M_\xi \\ C\frac{d\beta}{dz}&=M_\zeta \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

M_ξ, M_η, M_ζ は断面に働く力の ξ, η, ζ の各軸の周りのモーメントで

$$B_1=\frac{hb^3}{12}E,\qquad B_2=\frac{bh^3}{12}E,\qquad C\fallingdotseq\frac{hb^3}{3}G \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

次に x, y, z 軸のまわりのモーメントを M_x, M_y, M_z とすれば

$$\left.\begin{aligned} M_x&=-\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2}-z\right)-Qv+M \\ M_y&=Qu \\ M_z&=\frac{P}{2}(\delta-u) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

更にこれらを ξ, η, ζ の方向に分解して

$$\left.\begin{aligned} M_\xi&=-\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2}-z\right)-Qv+M \\ M_\eta&=\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2}-z\right)\beta+Qu-\beta M \\ M_\zeta&=-\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2}-z\right)\frac{du}{dz}+\frac{P}{2}(\delta-u)+M\frac{du}{dz} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

結局釣合い微分方程式は

$$\left.\begin{aligned} B_1\frac{d^2u}{dz^2}&=\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2}-z\right)\beta+Qu-\beta M \\ B_2\frac{d^2v}{dz^2}&=\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2}-z\right)+Qv-M \\ C\frac{d\beta}{dz}&=-\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2}-z\right)\frac{du}{dz}+\frac{P}{2}(\delta-u)+M\frac{du}{dz} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

この微分方程式を解いて行くと，Coulomb の Wave Function になるのでエネルギー法を用いて挫屈荷重を近似的に計算する事とする。即ち帯鋸面内に於ける曲げエネルギーを無視して他のひずみエネルギーを求めるとその合計 ΔU は，

$$\Delta U=B_1\int_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)^2dz+C\int_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2dz$$

また送り力 P の作用點の變位は

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \beta \frac{d^2u}{dz^2}\left(\frac{l}{2}-z\right)dz$$

緊張力 Q の作用點の變位は,

$$2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dz}\right)^2 dz$$

モーメント M の作用線の回轉する角度は $\frac{dv}{dz}$ を無視すれば兩端に於て各々

$$\frac{\int_0^{\frac{l}{2}}\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{d\left(u+\frac{1}{2}h\beta\right)}{dz}\right\}^2-\frac{1}{2}\left\{\frac{d\left(u-\frac{1}{2}h\beta\right)}{dz}\right\}^2\right]\cdot dz}{h}=\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{du}{dz}\frac{d\beta}{dz}dz$$

したがつて挫屈荷重を計算するエネルギー式は

$$-Q\int_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{du}{dz}\right)^2 dz+2M\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{du}{dz}\frac{d\beta}{dz}dz+P\int_0^{\frac{l}{2}}\beta\frac{d^2u}{dz^2}\left(\frac{l}{2}-z\right)dz$$

$$=B_1\int_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)^2 dz+C\int_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2 dz \quad \cdots\cdots(7)$$

近似式として

$$u=a\cos\frac{\pi}{l}z$$

と置きこの値を (6) の第 3 式に入れて周邊條件から β を求めると

$$C\beta=aM\cos\frac{\pi}{l}z-\frac{P}{2}\left[\left(\frac{l}{2}-z\right)a\left(\cos\frac{\pi}{l}z+1\right)+2\frac{l}{\pi}a\left(\sin\frac{\pi}{l}z-1\right)\right]$$

この u, β の値を (7) に入れて求める挫屈荷重 P が得られる。

$$\frac{\pi^2b^6h^2}{36l^2}EG=-\frac{hb^3}{3}GQ+M^2-PMl\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi^2}\right]+P^2l^2\left[\frac{1}{48}+\frac{11}{8\pi^2}-\frac{4}{\pi^3}\right] \quad (8)$$

この式は $P=0$ の場合は正しい値を與え, $M=0$ の場合は岩藤氏の第 1 近似の式と等しくなり, $Q=M=0$ の場合は 5% 程誤差がある。

今一例として次の様な値を入れて計算する。

ヤング係數	$E=2\times10^6$ kg/cm²
剪斷彈性係數	$G=8\times10^5$ kg/cm²
帶鋸厚さ (20番)	$b=0.89$ mm
帶　鋸　巾	$h=140$ mm
帶鋸自由部の長さ	$l=2000$ mm
バック半徑	R km

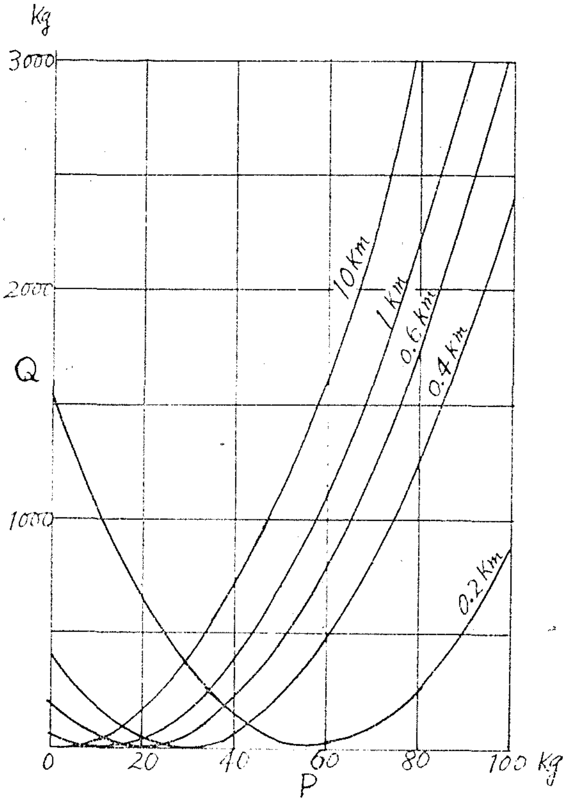
$$1.068=-2.632Q+165.67\frac{1}{R^2}-28.600\frac{P}{R}+1.246P^2$$

緊張力 Q kg のときの限界送り力卽ち挫屈荷重 P kg の關係を種々なるバック半徑 R km

第 1 表　P, Q, R の關係

P kg ＼ R km	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
∞	0	47	189	426	757	1183	1704	2319	3029	3834	4734
10	1	37	168	494	714	1129	1639	2244	2943	3737	4627
1	63	1	35	162	385	703	1115	1622	2223	2919	3710
0.8	98	9	16	117	312	602	987	1467	2041	2710	3474
0.6	174	41	2	57	207	452	792	1226	1755	2379	3088
0.4	393	169	39	4	64	218	467	811	1250	1773	2410
0.2	1573	1077	676	369	157	40	18	90	257	518	874

で求めて見ると第 1 表又は第 2 圖の如くになる。表の $P=0$ の附近で再び必要な緊張力 Q が大きくなつて居るのは，送り力 P で挫屈するのでなくて反對に送り力が小さすぎるために，モーメントで挫屈する場合である。



第 2 圖

實際の帯鋸の場合は更に種々複雑である。まずテンションが付けられて居るのであるが，テンションを付ければ齒前附近と背側附近は緊張應力が大きく，中央部分は緊張應力が小さくなつて居る筈である。しかし以上示した様な變形がテンションの付いて居る帯鋸の場合にも生ずると假定するならば前記の式はそのまま用いる事が出來る筈であるから挫屈荷重には變化がない筈である。故にテンションの量は挫屈荷重には關係しない。次に齒前には齒がついて居り，この齒が帯鋸全體に生ずる變形とは異つた變形をする筈であり，齒があるために挫屈荷重は上の計算より下ると考えられる。しかし齒だけが著しく變形して齒の根元に疲労を起したと云う様な事はない事から，この影響は少いと思われる。切削熱による齒前の溫度上昇については，若し溫度が齒前から背側に行くにしたがつて直線的に下つて居るならば，熱膨脹を考慮した切削時のバック半徑を前記 (8) 式に入れるべきであり，溫度上昇が齒前からの距離に對し直線的に變化せず 2 次の項も考えに入れなければならぬ場合も 2 次の項はテンションに變化を 與える事となるから影響はな

い。但し齒前が餘り熱せられて緊張應力が甚しく下る様な場合には前記の變形とは異つた變形も生じ得るからその影響を考慮しなければならぬ。

3. 應 力

挫屈荷重に對應する應力は

$$\sigma=\frac{Q}{hb}+\frac{E}{R}\ \frac{h}{2}-\frac{Pl}{2bh^2} \quad \cdots\cdots (9)$$

前例の帶鋸と同じ値を入れれば

$$\sigma=\frac{Q}{1.25}+\frac{140}{R}-5.7P\ \mathrm{kg/cm^2} \quad \cdots\cdots (9')$$

しかしこの値は問題にならぬのであつて，緊張力及びバックのある帶鋸が鋸車上にかかる場所に極めて大きな應力が生ずる。帶鋸は鋸車上でほぼ二線で接觸して居るものであるから，接觸線附近ではかなり大きな應力がかかつて居る筈であるが，簡單の爲にその影響を考えず，帶鋸が緊張力を受け眞直な状態で圓筒狀に鋸車上にまき付けられて居るものとすれば帶鋸の外面の應力は鋸車の半徑を a とすれば

$$\sigma_{\max}=\frac{Q}{hb}+\frac{E}{R}\cdot\frac{h}{2}+\frac{E}{a}\ \frac{b}{2} \quad \cdots\cdots (10)$$

例えば鋸車の半徑を 60 cm として前と同じ帶鋸を用いると

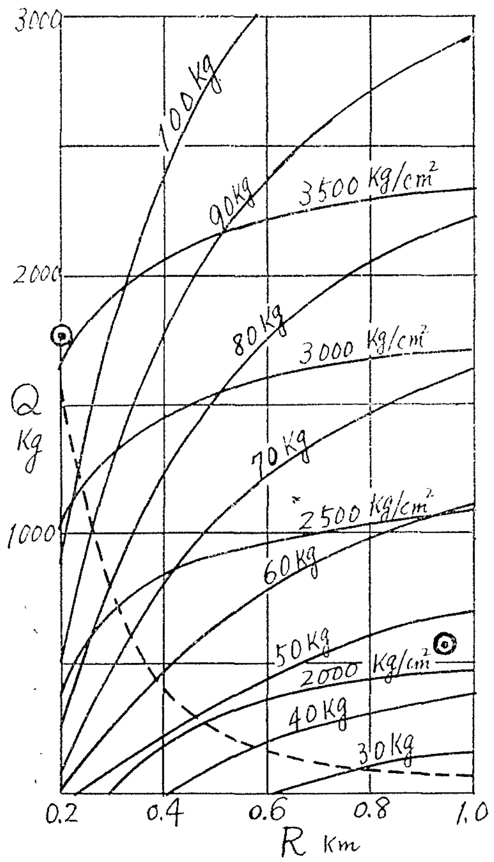
$$\sigma=\frac{Q}{1.25}+\frac{140}{R}+1480\ \mathrm{kg/cm^2} \quad \cdots\cdots (10')$$

この他にこの應力を更に增すものとしてテンションの効果，齒の切缺効果も當然考えねばならぬ。卽ち帶鋸の材質は擴張力 120 kg/mm² 乃至 150 kg/mm² であるから，應力は疲勞限界又はその附近迄達する恐がある爲に，緊張力を增す事は挫屈荷重の上からは有利であるに拘らず，甚だしく增す事の出來ない理由が此處にある。特に舊式の帶鋸盤又は不良の帶鋸盤に於ては特に之を考慮注意しなければならない。

4. 緊張力，バックの選擇に對する私見

以上と同じ例で縱軸に實際の緊張力（分銅の重量及び遠心力から計算した合計の値），橫軸にはバック半徑を取つて挫屈荷重を示したものが第 3 図である。尙この他に (10) 又は (10′) 式を用い鋸車上で生ずる帶鋸の最大應力が示してある。尙實際に研究した例を ⊙ 印で二例示した。バックとして實際用いられるのはこの 0.2 乃至 1 km 位の範圍であるが，殆んどすべて，同一許容應力に對してはバック半徑 R を小さく取る事によつて挫屈荷重を高める事が出來る。しかし許容應力を一定に取り，バック半徑を小さくすれば，當然これに對して適當な，より低い緊張力を取らなければならぬ。故に出來るだけバックを强くすべきであるが，しかし

餘りにバックが強すぎた場合には帯鋸が空轉して居る場合，即ち $P=0$ の場合にモーメント M の爲に挫屈を起す事となる。勿論この場合，β なる角度が甚しく大きくなる様な事はないとしても，安定な回轉は望まれないと考えられる。この $P=0$ の場合の挫屈を起すべきバック半徑 R が圖に點線で示してある。故に或る緊張力が與えられた時，バック半徑はこの値よりも大きくすべきで，結局最適の緊張力，バックの關係はこの $P=0$ の線よりも僅か上の値となる。



第 3 圖

5. 結　　言

故に結論は次の如くになる。

出來るだけ送り力を大きく取る爲には

1. バックは出來るだけ強くすべきである。
2. これに對し緊張力は次の式で計算されるより僅に大きな値を取るべきである。

$$\frac{\pi^2 b^6 h^2}{36 l^2} EG = -\frac{hb^3}{3} GQ + \left(\frac{E}{R}\,\frac{bh^3}{12}\right)^2$$

3. 以上の緊張力，バック半徑を決定する場合鋸に生ずる最大應力 σ をその帯鋸盤に適當した値にすべきである。

$$\sigma_{\max} = \frac{Q}{hb} + \frac{Eh}{2R} + \frac{E}{a}\,\frac{b}{2}$$

4. この場合の極限送り力は次の式で求められる。

$$\frac{\pi^2 b^6 h^2}{36 l^2} EG = -\frac{hb^3}{3} GQ + \frac{E^2 b^2 h^6}{144 R^2} - \frac{Ebh^3}{12R} Pl\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}\right] + P^2 l^2 \left[\frac{1}{48} + \frac{11}{8\pi^2} - \frac{4}{\pi^3}\right]$$

引 用 文 獻

(1) 齋藤美鶯，森　稔： 木材工業 8 巻 7～8 號 (309～312 頁，355～361 頁) 1953.
(2) 岩藤重正，織田昌信： 日本機械學會論文集 17 巻 61 號 (72～74 頁) 1951.