三次元応力問題の一解法に関する覚書

(直角座標系に依る)

秦　　　謹　　　一

(September 30, 1954)

Note on One Method for Solving Three-Dimensional Stress Problems

(Referred to Rectangular Cartesian Coordinates)

Kin-ichi HATA

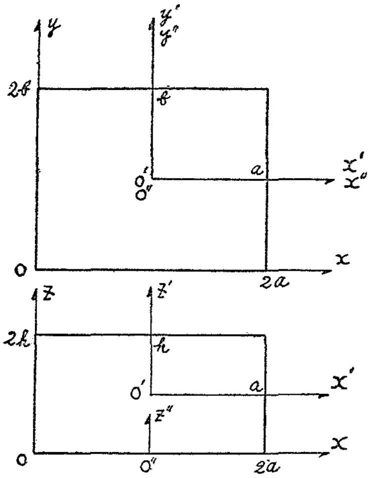
Abstract

This paper is concerned with one mode of attack upon three-dimensional stress problems, referred to rectangular cartesian coordinate system, and so, relative to a rectangular parallelopiped or a short column with rectangular cross section. This presented method is the method of series, as Prof. Love described, and applicable to the stress problem of a homogeneous, isotropic, elastic body of finite extent, as mentioned above, in the absence of body forces. The expression for each solution obtained herein has three double Fourier series of its own, noting two specified variables for each series, and when given functios associated with given surface tractions or surface displacements can be expanded in double Fourier series, needed relation formulae among sequences of coefficients in the solutions to determine them may be readily obtained.

Though the forms of solutions are simple enough, these three-dimensional solutions are exact within the assumptions of the theory of elasticity of the first order, the author thinks. It is regrettable that, using this method, it is much harder to obtain solutions, if they are referred to other coordinates than cartesian.

三次元応力問題の解法には J. Boussinesq[1], C. Somigliana, その他多くの人々のものがあるが, それ等のうちの大部分のものが H. Neuber[2] の解法に一致する事が示されている. 併し何れにしても三次元応力問題は二次元問題の様に深く研究されているとは云えない様である. 此処で問題にせんとするものは物体力が働いていない場合で Surface Tractions 問題である. 又等方等質の弾性体の微小変位理論の範囲内とする. 多くの解法に於いては, 基本的な三つ乃至四つの調和函数の決定或いは選び方が可成り困難である. H. Neuber[2] はその著書に於いて切欠応力問題に対して比較的容易に基本的な調和函数 Φ_0, Φ_1, Φ_2, Φ_3 に形を与えて解を得ているが, 有限物体に対する扱いではないので, そのために多くの困難を回避出来た様に思われる. 有限弾性体としての取り扱いに依れば, 特別の場合を除き三次元弾性問題は処理の面倒なものである. 例えば軸対称問題の様な場合は勿論尤も容易な三次元問題であろう. 但し以上は釣合方程式, 適合

条件式と境界条件を正確に残りなく満足せしめる様に正確に解く場合について云つているのである．一般的な解を求める中途で何等かの近似的取り扱いを行えばこれは別問題である．又境界条件を残りなく満足せしめる事[3]は三次元問題に於いても釣合式や適合条件式を満たすより一層困難な事であり，その上境界条件の附し方も二次元問題より一層厄介である．例えば二次元問題の単支持条件も三次元問題では意味が明瞭でないことは明かである．固定条件のつけ方も色々考えられるが，この方は比較的処理容易である．有名な Nadai[4]の厚円板の問題の支持条件の意味は分明とは云えない様である．以下に於いて述べる一解法とは寧ろ諸氏の解法以後のもの，即ちそれ等よりは形の上で一層具体的なものであると云えよう．此処では直角座標に依る説明を行うことにする．よつて矩形断面短柱或いは直六面体又は充分に厚い矩形板に適用出来る解法である，即ち一応最初より有限弾性体の取り扱いを目的としている訳である．而してこの解法は別に巧妙な点はなく寧ろ一見極めて平凡の様ではあるが，筆者寡聞にしてこの様な解が従来発表されているとは知らない．この解は Prof. Love の中等程度の厚さの弾性板の応力問題の解[5]が一見解法が完全であるに似ず不完全で，厚さに沿つて任意に変化する surface tractions に対応する解となり得ないので，この解を改善しようとして成功しなかつたので，一先づ最初よりやり直して得たものである．surface tractions を重 Fourier 級数に展開して解を求める方法は解を閉ぢた形に得ることが出来ず迂遠であるかも知れないが，已むを得ない様である．surface tractions は考えている弾性体が静止平衡を保ち得る様なものとする．直角座標系を使用すれば解の形は x, y, z の三変数に関して同じ取り扱いをして得られたものでなければならないことは勿論である．直角座標 x, y, z 軸を図の如くにとるとする．



先づ応力の表現より出発する．物体力が作用していない場合応力並に変位は $(x,\ y,\ z)$ の重調和函数であることはよく知られているので最初よりその形を用いる．

$$
\begin{aligned}
\sigma_x = &\sum_n\sum_s A^1{}_{ns}\cos k_n z\cos\beta_s y\left(\underset{\overline{A^1{}_{ns}}}{\begin{Bmatrix}\cosh\\ \sinh\end{Bmatrix}} l_{ns}x + B^1{}_{ns}x\underset{\overline{B^1{}_{ns}}}{\begin{Bmatrix}\sinh\\ \cosh\end{Bmatrix}} l_{ns}x\right)+\\
&+\sum_n\sum_r C^1{}_{nr}\cos k_n z\cos\alpha_r y\left(\underset{\overline{C^1{}_{nr}}}{\begin{Bmatrix}\cosh\\ \sinh\end{Bmatrix}} m_{nr}y + D^1{}_{nr}y\underset{\overline{D^1{}_{nr}}}{\begin{Bmatrix}\sinh\\ \cosh\end{Bmatrix}} m_{nr}y\right)+\\
&+\sum_r\sum_s E^1{}_{rs}\cos\alpha_r x\cos\beta_s y\left(\underset{\overline{E^1{}_{rs}}}{\begin{Bmatrix}\cosh\\ \sinh\end{Bmatrix}} \gamma_{rs}z + F^1{}_{rs}z\underset{\overline{F^1{}_{rs}}}{\begin{Bmatrix}\sinh\\ \cosh\end{Bmatrix}} \gamma_{rs}z\right),
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

$$\sigma_y = \sum_n \sum_s A^2_{ns} \cos k_n z \cos \beta_s y \left(\underset{\overline{A^2_{ns}}}{\left\{\begin{matrix}\cosh\\ \sinh\end{matrix}\right.} l_{ns} x + B^2_{ns} x \underset{\overline{B^2_{ns}}}{\left\{\begin{matrix}\sinh\\ \cosh\end{matrix}\right.} l_{ns} x \right) +$$

$$+ \sum_n \sum_r C^2_{nr} \cos k_n z \cos \alpha_r x \left(\underset{\overline{C^2_{nr}}}{\left\{\begin{matrix}\cosh\\ \sinh\end{matrix}\right.} m_{nr} y + D^2_{nr} y \underset{\overline{D^2_{nr}}}{\left\{\begin{matrix}\sinh\\ \cosh\end{matrix}\right.} m_{nr} y \right) +$$

$$+ \sum_n \sum_s E^2_{rs} \cos \alpha_r x \cos \beta_s y \left(\underset{\overline{E^2_{rs}}}{\left\{\begin{matrix}\cosh\\ \sinh\end{matrix}\right.} \gamma_{rs} z + F^2_{rs} \underset{\overline{F^2_{rs}}}{\left\{\begin{matrix}\sinh\\ \cosh\end{matrix}\right.} \gamma_{rs} z \right), \tag{2}$$

$$\tau_{xy} = \sum_n \sum_s A^3_{ns} \cos k_n z \sin \beta_s y \left(\underset{\overline{A^3_{ns}}}{\left\{\begin{matrix}\sinh\\ \cosh\end{matrix}\right.} l_{ns} x + E^3_{ns} x \underset{\overline{B^3_{ns}}}{\left\{\begin{matrix}\cosh\\ \sinh\end{matrix}\right.} l_{ns} x \right) +$$

$$+ \sum_n \sum_r C^3_{nr} \cos k_n z \sin \alpha_r x \left(\underset{\overline{C^3_{nr}}}{\left\{\begin{matrix}\sinh\\ \cosh\end{matrix}\right.} m_{nr} y + D^3_{nr} y \underset{\overline{D^3_{nr}}}{\left\{\begin{matrix}\cosh\\ \sinh\end{matrix}\right.} m_{nr} y \right) +$$

$$+ \sum_r \sum_s E^3_{rs} \sin \alpha_r x \sin \beta_s y \left(\underset{\overline{E^3_{rs}}}{\left\{\begin{matrix}\cosh\\ \sinh\end{matrix}\right.} \gamma_{rs} z + F^3_{rs} z \underset{\overline{F^3_{rs}}}{\left\{\begin{matrix}\sinh\\ \cosh\end{matrix}\right.} \gamma_{rs} z \right), \tag{3}$$

$$\sigma_z = \sum_u \sum_s A_{ns} \cos k_n z \cos \beta_s y \left(\underset{\overline{A_{ns}}}{\left\{\begin{matrix}\cosh\\ \sinh\end{matrix}\right.} l_{ns} x + B_{ns} x \underset{\overline{B_{ns}}}{\left\{\begin{matrix}\sinh\\ \cosh\end{matrix}\right.} l_{ns} x \right) +$$

$$+ \sum_n \sum_r C_{nr} \cos k_n z \cos \alpha_r x \left(\underset{\overline{C_{nr}}}{\left\{\begin{matrix}\cosh\\ \sinh\end{matrix}\right.} m_{nr} y + D_{nr} y \underset{\overline{D_{nr}}}{\left\{\begin{matrix}\sinh\\ \cosh\end{matrix}\right.} m_{nr} y \right) +$$

$$+ \sum_r \sum_s E_{rs} \cos \alpha_r x \cos \beta_s y \left(\underset{\overline{E_{rs}}}{\left\{\begin{matrix}\cosh\\ \sinh\end{matrix}\right.} \gamma_{rs} z + F_{rs} z \underset{\overline{F_{rs}}}{\left\{\begin{matrix}\sinh\\ \cosh\end{matrix}\right.} \gamma_{rs} z \right), \tag{4}$$

$$\tau_{xz} = \sum_n \sum_s G^1_{ns} \sin k_n z \cos \beta_s y \left(\underset{G^{1'}_{ns}}{\left\{\begin{matrix}\sinh\\ \cosh\end{matrix}\right.} l_{ns} x + \overline{G^1_{ns}} x \underset{\overline{G^{1'}_{ns}}}{\left\{\begin{matrix}\cosh\\ \sinh\end{matrix}\right.} l_{ns} x \right) +$$

$$+ \sum_n \sum_r H^1_{nr} \sin k_n z \sin \alpha_r x \left(\underset{H^{1'}_{nr}}{\left\{\begin{matrix}\cosh\\ \sinh\end{matrix}\right.} m_{nr} y + \overline{H^1_{nr}} y \underset{\overline{H^{1'}_{nr}}}{\left\{\begin{matrix}\sinh\\ \cosh\end{matrix}\right.} m_{nr} y \right) +$$

$$+ \sum_r \sum_s I^1_{rs} \sin \alpha_r x \cos \beta_s y \left(\underset{\overline{I^1_{rs}}}{\left\{\begin{matrix}\sinh\\ \cosh\end{matrix}\right.} \gamma_{rs} z + J^1_{rs} z \underset{\overline{J^1_{rs}}}{\left\{\begin{matrix}\cosh\\ \sinh\end{matrix}\right.} \gamma_{rs} z \right), \tag{5}$$

$$\tau_{yz} = \sum_n\sum_s G^2_{ns}\sin k_n z\sin\beta_s y\left(\underset{G^{2'}_{ns}}{\left[\begin{matrix}\cosh\\ \sinh\end{matrix}\right.} l_{ns}x + \overline{G^2_{ns}}x\underset{\overline{G^{2'}_{ns}}}{\left[\begin{matrix}\sinh\\ \cosh\end{matrix}\right.} l_{ns}x\right) +$$

$$+\sum_n\sum_r H^2_{nr}\sin k_n z\cos\alpha_r x\left(\underset{H^{2'}_{nr}}{\left[\begin{matrix}\sinh\\ \cosh\end{matrix}\right.} m_{nr}y + \overline{H^2_{nr}}y\underset{\overline{H^{2'}_{nr}}}{\left[\begin{matrix}\cosh\\ \sinh\end{matrix}\right.} m_{nr}y\right) +$$

$$+\sum_r\sum_s I^2_{rs}\cos\alpha_r x\sin\beta_s y\left(\underset{\overline{I^2_{rs}}}{\left[\begin{matrix}\sinh\\ \cosh\end{matrix}\right.} \gamma_{rs}z + J^2_{rs}z\underset{\overline{J^2_{rs}}}{\left[\begin{matrix}\cosh\\ \sinh\end{matrix}\right.} \gamma_{rs}z\right), \qquad (6)$$

上記表現に於いて例えば σ_z 中の

$$\left(\left[\begin{matrix}\cosh\\ \sinh\end{matrix}\right. \gamma_{rs}z + F_{rs}z\underset{\overline{F_{n_s}}}{\left[\begin{matrix}\sinh\\ \cosh\end{matrix}\right.} \gamma_{rs}z\right)$$ の如き式は次のものをあらわす.

$$\cosh\gamma_{rs}z + \bar{E}_{rs}\sinh\gamma_{rs}z + F_{rs}z\sinh\gamma_{rs}z + F_{rs}\bar{F}_{rs}z\cosh\gamma_{rs}z$$

そして上記応力表現中 $\cosh\gamma_{rs}z + F_{rs}z\sinh\gamma_{rs}z$ は第一行のものと名づけ他のものは第二行の表現と名づけることにする. 第一行のもののみとり x, y, z をば図中の x', y', z' に夫々等置すればsurface tractions が直方体に許される限りの対称性を有している場合である.

又上記表現（1）－（6）が重調和函数であるためには

$$k_n{}^2 + \beta_s{}^2 = l^2{}_{ns},\ \ k_n{}^2 + \alpha_r{}^2 = m^2{}_{nr},\ \ \alpha_r{}^2 + \beta_s{}^2 = \gamma^2{}_{rs}, \qquad (7)$$

の関係が必要である.

$$k_n = \frac{n\pi}{2h},\qquad \alpha_2 = \frac{r\pi}{2a},\qquad \beta_s = \frac{s\pi}{2b}, \qquad (8)$$

$n,\ r,\ s$ は正整数とする.

但し surface tractions の分布の対称性に依り $k_n,\ \alpha_r,\ \beta_s$ の分母の 2 を外し原点を 0 以外の $0'$ やその他に適当に移し又その場合に第二行の表現を適当に外し得ること明かである. 例えば $x'=0$ 面と $y'=0$ 面に関して対称に surface traction が分布し $z'=0$ 面に関しては対称的に分布していない場合は

$$k_n = \frac{n\pi}{2h},\qquad \alpha_r = \frac{r\pi}{a},\qquad \beta_s = \frac{s\pi}{b},$$

として図中の $0''$ に原点がある様な座標を選ぶことになる. そして上記応力表現中重級数記号 $\sum\limits_r\sum\limits_s$ 以外の記号下の summand 中の第二行の表現を外し (x, y, z) を (x'', y'', z'') に変更せしめて解の形を得る.

以上 72 個の係数列を設定し釣合式と適合条件を考慮して，函数記号を決め，釣合式と適合条件式は（1）−（6）表現中の係数列間に適当な関係を与えることにより満足せしめ得る様に (1)−(6) の表現を一応決定した．此等の表現に於いて x, y, z の三変数は全く対等に扱われている．而して normal stress の表現より出発し，勿論 Furier 級数の特性を利用した．

係数列間の関係式を求めるに当り係数列の記号の変更を次の如くに行う．

例えば

$$
\begin{aligned}
&E_{rs}\bar{E}_{rs} \to \bar{E}_{rs}, \quad E_{rs}F_{rs} \to F_{rs}, \quad E_{rs}F_{rs}\bar{F}_{rs} \to \bar{F}_{rs}, \\
&E_{rs} \to E_{rs}, \quad A_{ns}B_{ns} \to B_{ns}, \quad C_{nr}D_{nr} \to D_{nr}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

係数列間の性質を調べるのに便利である様に，（1）−（6）表現に於いて係数列を分解しておいたものである．

先づ適合条件式を考慮する．（4）の σ_z より出発することにする．

適合条件式

$$
\nabla^2\sigma_z + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} = 0, \quad \left(\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,\ \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)
$$

と（4）式より積分を行って次式を得る．

$$
\begin{aligned}
\Theta = -(1+\nu)\iint^{(z)} \nabla^2\sigma_z dz^2 = &-(1+\nu)\Big\{-\sum_n\sum_s \frac{2l_{ns}}{k_n^2}\cos k_n z \cos\beta_s y\,(B_{ns}\cosh l_{ns}x + \\
&+ \bar{B}_{ns}\sinh l_{ns}x) - \sum_n\sum_r \frac{2m_{nr}}{k_n^2}\cos k_n z\cos\alpha_r x\,(D_{nr}\cosh m_{nr}y + \bar{D}_{nr}\sinh m_{nr}y) + \\
&+ \sum_r\sum_s \frac{2}{\gamma_{rs}}\cos\alpha_r x\cos\beta_s y\,(F_{rs}\cosh\gamma_{rs}z + \bar{F}_{rs}\sinh\gamma_{rs}z)\Big\} + z\Theta''(x,y) + \Theta'(x,y).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

(10) 式中の最後の２項は積分に際し現れたとは云え（1）−（6）の応力表現より考えて又弾性学的に取り除くことが出来る．但し Θ'' と Θ' は $x \cdot y$ に関する平面調和函数である．以下残る５つの適合条件式中の Θ として (10) の式を $(z\Theta''+\Theta')$ だけ外して用いることにする．

簡単のために $\sum_n\sum_s$ を有するものを第一群の解，$\sum_n\sum_r$ を有する部分を第二群の解，$\sum_r\sum_s$ を有する解の部分を第三群の解と呼ぶことにする．異なる群に属する解は互いに独立であり，係数列間の関係式を求めるのに，群毎に切り離して独立に求めることが出来る訳である．又明かな様に同じ群に属する係数列間の関係式に於いて第一行に属するものの間の関係式は第二行に属する係数列の間の関係式とは全く同様なものであるから，第一行に関するものを求めれば第二行に関するもの直に書き下せる．

適合条件式

$$\nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = 0 ,$$

と (10), (1) 式より次のものが得られる.

$$\left(B^1{}_{ns} = \frac{-l^2{}_{ns}}{k_n{}^2} B_{ns},\ D^1{}_{nr} = \frac{\alpha_r{}^2}{k_n{}^2} D_{nr},\ F^1{}_{rs} = \frac{-\alpha_r{}^2}{\gamma^2{}_{rs}} F_{rs},\right)$$
$$\left(\bar{B}^1{}_{ns} = \frac{-l^2{}_{ns}}{k_n{}^2} \bar{B}_{ns},\ \bar{D}^1{}_{nr} = \frac{\alpha_r{}^2}{k_n{}^2} \bar{D}_{nr},\ \bar{F}^1{}_{rs} = \frac{-\alpha_r{}^2}{\gamma^2{}_{rs}} \bar{F}_{rs}.\right) \tag{11}$$

適合条件式　$\nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = 0$, と (10) と (2) より

$$\left(B^2{}_{ns} = \frac{\beta_s{}^2}{k_n{}^2} B_{ns},\ D^2{}_{nr} = \frac{-m^2{}_{nr}}{k_n{}^2} D_{nr},\ F^2{}_{rs} = \frac{-\beta_s{}^2}{\gamma^2{}_{rs}} F_{rs},\right)$$
$$\left(\bar{B}^2{}_{ns} = \frac{\beta_s{}^2}{k_n{}^2} \bar{B}_{ns},\ \bar{D}^2{}_{nr} = \frac{-m^2{}_{nr}}{k_n{}^2} \bar{D}_{nr},\ \bar{F}^2{}_{rs} = \frac{-\beta_s{}^2}{\gamma^2{}_{rs}} \bar{F}_{rs}.\right) \tag{12}$$

適合条件式　$\nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} = 0$, と (10), (3) より

$$\left(B^3{}_{ns} = \frac{\beta_s l_{ns}}{k_n{}^2} B_{ns},\ D^3{}_{nr} = \frac{m_{nr} \alpha_r}{k_n{}^2} D_{nr},\ F^3{}_{rs} = \frac{\alpha_r \beta_s}{\gamma^2{}_{rs}} F_{rs},\right)$$
$$\left(\bar{B}^3{}_{ns} = \frac{\beta_s l_{ns}}{k_n{}^2} \bar{B}_{ns},\ \bar{D}^3{}_{nr} = \frac{m_{nr} \alpha_r}{k_n{}^2} \bar{D}_{nr},\ \bar{F}^3{}_{rs} = \frac{\alpha_r \beta_s}{\gamma^2{}_{rs}} \bar{F}_{rs}.\right) \tag{13}$$

適合条件式　$\nabla^2 \tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z} = 0$, (10) と (5) より

$$\left(\bar{G}^1{}_{ns} = \frac{l_{ns}}{k_n} B_{ns},\ \bar{H}^1{}_{nr} = \frac{-\alpha_r}{k_n} D_{nr},\ J^1{}_{rs} = \frac{-\alpha_r}{\gamma_{rs}} F_{rs},\right)$$
$$\left(\bar{G}^{1'}{}_{ns} = \frac{l_{ns}}{k_n} \bar{B}_{ns},\ \bar{H}^{1'}_{nr} = \frac{-\alpha_2}{k_n} \bar{D}_{nr},\ \bar{J}^1{}_{rs} = \frac{-\alpha_r}{\gamma_{sr}} \bar{F}_{rs}.\right) \tag{14}$$

適合条件式　$\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} = 0$, (1) と (6) より

$$\left(\bar{G}^2{}_{ns} = \frac{-\beta_s}{k_n} B_{ns},\ \bar{H}^2{}_{nr} = \frac{m_{nr}}{k_n} D_{nr},\ J^2{}_{rs} = \frac{-\beta_s}{\gamma_{rs}} F_{rs},\right)$$
$$\left(\bar{G}^{2'}_{ns} = \frac{-\beta_s}{k_n} \bar{B}_{ns},\ \bar{H}^{2'}_{nr} = \frac{m_{nr}}{k_n} \bar{D}_{nr},\ \bar{J}^2{}_{rs} = \frac{-\beta_s}{\gamma_{rs}} \bar{F}_{rs}.\right) \tag{15}$$

以上の如く重調和函数に属する係数列は全べて一つの σ_z の重調和函数に属する係数列で表わせる.

次に三つの釣合方程式を満足せしめる様に, 係数列間の関係式を求めるのに, (1)−(6)の表現を代入して得られる式中, 重調和函数部分に対しては (11)−(15) の5種類の式により満足せ

られて新しい関係式は出て来ない．調和函数の部分より，一つの釣合式より第一行表現について3個の式，第二行の表現について3個の式，計6個の式が得られる．これは一つの特定の suffix $n. r, s$ について何個の意味である．

釣合式　$\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=0$，（1），（3），（5）より次式を得る．

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{ll}l_{ns}A^1{}_{ns}+\beta_sA^3{}_{ns}+k_nG^1{}_{ns}+B^1{}_{ns}=0\,, & \text{(a)}\\ -\alpha_rC^1{}_{nr}+m_{nr}C^3{}_{nr}+k_nH^1{}_{nr}+D^3{}_{nr}=0\,, & \text{(b)}\\ -\alpha_rE^1{}_{rs}+\beta_sE^3{}_{rs}+\gamma_{rs}I^1{}_{rs}+J^1{}_{rs}=0\,, & \text{(c)}\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{ll}l_{ns}\bar{A}^1{}_{ns}+\beta_s\bar{A}^3{}_{ns}+k_nG^{1\prime}_{ns}+\bar{B}^1{}_{ns}=0\,, & \text{(a}')\\ -\alpha_r\bar{C}^1{}_{nr}+m_{nr}\bar{C}^3{}_{nr}+k_nH^{1\prime}_{nr}+\bar{D}^3{}_{nr}=0\,, & \text{(b}')\\ -\alpha_r\bar{E}^1{}_{rs}+\beta_s\bar{E}^3{}_{rs}+\gamma_{rs}\bar{I}^1{}_{rs}+\bar{J}^1{}_{rs}=0\,, & \text{(c}')\end{array}\right.\end{array}\right\}\qquad(16)$$

釣合式　$\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}=0$，（3），（2），（6）より

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{ll}l_{ns}A^3{}_{ns}-\beta_sA^2{}_{ns}+k_nG^2{}_{ns}+B^3{}_{ns}=0\,, & \text{(a)}\\ \alpha_rC^3{}_{nr}+m_{nr}C^2{}_{nr}+k_nH^2{}_{nr}+D^2{}_{nr}=0\,, & \text{(b)}\\ \alpha_rE^3{}_{rs}-\beta_sE^2{}_{rs}+\gamma_{rs}I^2{}_{rs}+J^2{}_{rs}=0\,, & \text{(c)}\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{ll}l_{ns}\bar{A}^3{}_{ns}-\beta_s\bar{A}^2{}_{ns}+k_nG^{2\prime}_{ns}+\bar{B}^3{}_{ns}=0\,, & \text{(a}')\\ \alpha_r\bar{C}^3{}_{nr}+m_{nr}\bar{C}^2{}_{nr}+k_nH^{2\prime}_{nr}+\bar{D}^2{}_{nr}=0 & \text{(b}')\\ \alpha_r\bar{E}^3{}_{rs}-\beta_s\bar{E}^2{}_{rs}+\gamma_{rs}\bar{I}^2{}_{rs}+\bar{J}^2{}_{rs}=0\,, & \text{(c}')\end{array}\right.\end{array}\right\}\qquad(17)$$

又釣合式　$\dfrac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\dfrac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0$，（5），（6），（4）より次式を得る．

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{ll}l_{ns}G^1{}_{ns}+\beta_sG^2{}_{ns}-k_nA_{ns}+\bar{G}^1{}_{ns}=0\,, & \text{(a)}\\ \alpha_rH^1{}_{nr}+m_{nr}H^2{}_{nr}-k_nC_{nr}+\bar{H}^2{}_{nr}=0\,, & \text{(b)}\\ \alpha_rI^1{}_{rs}+\beta_sI^2{}_{rs}+\gamma_{rs}E_{rs}+F_{rs}=0\,, & \text{(c)}\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{ll}l_{ns}G^{1\prime}_{ns}+\beta_sG^{2\prime}_{ns}-k_n\bar{A}_{ns}+\bar{G}^{1\prime}_{ns}=0\,, & \text{(a}')\\ \alpha_rH^{1\prime}_{nr}+m_{nr}H^{2\prime}_{nr}-k_n\bar{C}_{nr}+\bar{H}^{2\prime}_{nr}=0\,, & \text{(b}')\\ \alpha_r\bar{I}^1{}_{rs}+\beta_s\bar{I}^2{}_{rs}+\gamma_{rs}\bar{E}_{rs}+\bar{F}_{rs}=0\,, & \text{(c}')\end{array}\right.\end{array}\right\}\qquad(18)$$

更に $\Theta=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$ であるから (10) 式と（1）と（2），（4）の表現を加えたものは一致しなければならぬから，次の関係式を得る．

$$\left\{\begin{array}{ll} A^1{}_{ns}+A^2{}_{ns}+A_{ns}=\dfrac{(1+\nu)}{k_n{}^2}\,2l_{ns}B_{ns}, & \text{(a)} \\ C^1{}_{nr}+C^2{}_{nr}+C_{nr}=\dfrac{(1+\nu)}{k_n{}^2}\,2m_{nr}D_{nr}, & \text{(b)} \\ E^1{}_{rs}+E^2{}_{rs}+E_{rs}=\dfrac{-(1+\nu)}{\gamma_{rs}}\,2F_{rs}, & \text{(c)} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \bar{A}^1{}_{ns}+\bar{A}^2{}_{ns}+\bar{A}_{ns}=\dfrac{(1+\nu)}{k_n{}^2}\,2l_{ns}\bar{B}_{ns}, & \text{(a')} \\ \bar{C}^1{}_{nr}+\bar{C}^2{}_{nr}+\bar{C}_{nr}=\dfrac{(1+\nu)}{k_n{}^2}\,2m_{nr}\bar{D}_{nr}, & \text{(b')} \\ \bar{E}^1{}_{rs}+\bar{E}^2{}_{rs}+\bar{E}_{rs}=\dfrac{-(1+\nu)}{\gamma_{rs}}\,2\bar{F}_{rs}. & \text{(c')} \end{array}\right\} \tag{19}$$

以上により利用し得る総ての関係式を得たのである．σ_x（1）式 σ_y（2）式 σ_z（4）式の三表現が係数を除き一致していることは一見平凡ながら当然且つ必要なことである．

次に係数列の整頓を行う．使用している全部の係数列を (19) 式の左辺にある ($A^1{}_{ns}$, $A^2{}_{ns}$, A_{ns}), ($C^1{}_{nr}$, $C^2{}_{nr}$, C_{nr}), ($E^1{}_{rs}$, $E^2{}_{rs}$, E_{rs}); ($\bar{A}^1{}_{ns}$, $\bar{A}^2{}_{ns}$, $\bar{A}_{ns}$), ($\bar{C}^1{}_{nr}$, $\bar{C}^2{}_{nr}$, $\bar{C}_{nr}$), ($\bar{E}^1{}_{rs}$, $\bar{E}^2{}_{rs}$, $\bar{E}_{rs}$). の 18 個の係数列であらわし得ることを述べる．

例えば (18·a)$\times k_n$ 中の $k_nG^1{}_{ns}$ と $k_nG^2{}_{ns}$ に (16 a) と (17 b) より求められる表式を代入して $G^1{}_{ns}$, $G^2{}_{ns}$ を消去し，その式中 $\bar{G}^1{}_{ns}$ は (14) 式より，B_{ns} は (19) 式より，$B^1{}_{ns}$ は (11) 式より，$B^3{}_{ns}$ は (13) 式より表式を求めて書き換えれば容易に次式を得る．

$$A^3{}_{ns}=\frac{1}{2(1+\nu)\,l_{ns}\beta_s}\left\{-(\beta_s{}^2+\nu l^2{}_{ns})A^1{}_{ns}+(\nu\beta_s{}^2+l^2{}_{ns})A^2{}_{ns}-\nu k_n{}^2A_{ns}\right\}, \tag{20}$$

$G^1{}_{ns}$ については (16 a), (19 a) と (20) より

$$G^1{}_{ns}=\frac{1}{2(1+\nu)\,l_{ns}k_n}\left\{\left(-(1+\nu)l^2{}_{ns}+\beta_s{}^2\right)A^1{}_{ns}-\nu\beta_s{}^2A^2{}_{ns}+(\nu k_n{}^2+l^2{}_{ns})\,A_{ns}\right\}, \tag{21}$$

$\bar{G}^1{}_{ns}$ は (14) と (19 a) より

$$\bar{G}^1{}_{ns}=\frac{l_{ns}}{k_n}B_{ns}=\frac{k_n}{2(1+\nu)}(A^1{}_{ns}+A^2{}_{ns}+A_{ns}), \tag{22}$$

次に (17 a), (19 a), (20) より

$$G^2{}_{ns}=\frac{1}{2(1+\nu)\,k_n\beta_s}\left\{\nu l^2{}_{ns}A^1{}_{ns}+\left((1+\nu)\,\beta_s{}^2-l^2{}_{ns}\right)A^2{}_{ns}+(\nu k_n{}^2-\beta_s{}^2)\,A_{ns}\right\}, \tag{23}$$

(15), (19 a) より

$$\bar{G}^2{}_{ns}=\frac{-\beta_s}{k_n}B_{ns}=\frac{-1}{2(1+\nu)}\frac{k_n\beta_s}{l_{ns}}(A^1{}_{ns}+A^2{}_{ns}+A_{ns}), \tag{24}$$

残るものを挙げれば，(11)，(12)，(13)，(19 a) より

$$B^1{}_{ns} = -\frac{l^2{}_{ns}}{k_n{}^2} B_{ns} = -\frac{l_{ns}}{2(1+\nu)} \bar{\bar{A}}_{ns}, \quad B^2{}_{ns} = \frac{\beta_s{}^2}{k_n{}^2} B_{ns} = \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\beta_s{}^2}{l_{ns}} \bar{\bar{A}}_{ns},$$

$$B^3{}_{ns} = \frac{\beta_s l_{ns}}{k_n{}^2} B_{ns} = \frac{\beta_s}{2(1+\nu)} \bar{\bar{A}}_{ns}, \quad B_{ns} = \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{k_n{}^2}{l_{ns}} \bar{\bar{A}}_{ns}, \tag{25}$$

但し　$\bar{\bar{A}}_{ns} = A^1{}_{ns} + A^2{}_{ns} + A_{ns}$.

以上は第一群の第一行の解に含まれる係数列 (A^3, $G^1{}_{ns}$, $G^2{}_{ns}$)，(B^3, $\bar{G}^1{}_{ns}$, $\bar{G}^2{}_{ns}$)，($B^1{}_{ns}$, $B^2{}_{ns}$, B_{ns}) を ($A^1{}_{ns}$, $A^2{}_{ns}$, A_{ns}) であらわしたものである．(11)－(19) の関係式の形を見れば第二行表現に属する係数列についても全く上記と同様な式を得ることが容易に分る．即ち bar か dash を附してそのまま書き下せる．

$$\left.\begin{aligned}
\bar{A}^3{}_{ns} &= \frac{1}{2(1+\nu) l_{ns}\beta_s} \left\{ -(\beta_s{}^2 + \nu l^2{}_{ns}) \bar{A}^1{}_{ns} + (\nu\beta_s{}^2 + l^2{}_{ns}) \bar{A}^2{}_{ns} - \nu k_n{}^2 \bar{A}_{ns} \right\}, \\
G^{1\prime}_{ns} &= \frac{1}{2(1+\nu) l_{ns} k_n} \left\{ \left(-(1+\nu)\, l^2{}_{ns} + \beta_s{}^2 \right) \bar{A}^1{}_{ns} - \nu\beta_s{}^2 \bar{A}^2{}_{ns} + (\nu k_n{}^2 + l^2{}_{ns}) \bar{A}_{ns} \right\}, \\
G^{2\prime}_{ns} &= \frac{1}{2(1+\nu) k_n \beta_s} \left\{ \nu l^2{}_{ns} \bar{A}^1{}_{ns} + \left((1+\nu)\, \beta_s{}^2 - l^2{}_{ns} \right) \bar{A}^2{}_{ns} + (\nu k_n{}^2 - \beta_s{}^2) \bar{A}_{ns} \right\},
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{B}^3{}_{ns} = \frac{\beta_s}{2(1+\nu)} \bar{\bar{A}}'_{ns}, \quad \bar{G}^{1\prime}_{ns} = \frac{k_n}{2(1+\nu)} \bar{\bar{A}}'_{ns}, \quad \bar{G}^{2\prime}_{ns} = \frac{-1}{2(1+\nu)} \frac{k_n \beta_s}{l_{ns}} \bar{\bar{A}}'_{ns}, \\
&\bar{B}^1{}_{ns} = \frac{-l_{ns}}{2(1+\nu)} \bar{\bar{A}}'_{ns}, \quad \bar{B}^2{}_{ns} = \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\beta_s{}^2}{l_{ns}} \bar{\bar{A}}'_{ns}, \quad \bar{B}_{ns} = \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{k_n{}^2}{l_{ns}} \bar{\bar{A}}'_{ns}, \\
&\text{但し}\quad \bar{\bar{A}}^1{}_{ns} = \bar{A}\ {}_{ns} + \bar{A}^2{}_{ns} + \bar{A}_{ns}.
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

次に第二群の解について，上記と全く同様な計算により類似の結果を得ることが出来る．その結果のみを記する．

第一行の表現に属するものとして

$$\left.\begin{aligned}
C^3{}_{nr} &= \frac{1}{2(1+\nu) m_{nr} \alpha_r} \left\{ (\nu\alpha_r{}^2 + m^2{}_{nr}) C^1{}_{nr} - (\alpha_r{}^2 + \nu m^2{}_{nr}) C^2{}_{nr} - \nu k_n{}^2 C_{nr} \right\}, \\
H^1{}_{nr} &= \frac{1}{2(1+\nu) \alpha_r k_n} \left\{ (\nu\alpha_r{}^2 - k_n{}^2) C^1{}_{nr} + \nu m^2{}_{nr} C^2{}_{nr} + (\nu k_n{}^2 - \alpha_r{}^2)\, C_{nr} \right\}, \\
H^2{}_{nr} &= \frac{1}{2(1+\nu) m_{nr} k_n} \left\{ -\nu\alpha_r{}^2 C^1{}_{nr} - (k_n{}^2 + \nu m^2{}_{nr})\, C^2{}_{nr} + (\nu k_n{}^2 + m^2{}_{nr})\, C_{nr} \right\},
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$\left.\begin{aligned}
&D^3{}_{nr} = \frac{\alpha_r}{2(1+\nu)} \bar{\bar{C}}_{nr}, \quad \bar{H}^1{}_{nr} = \frac{-1}{2(1+\nu)} \frac{k_n \alpha_r}{m_{nr}} \bar{\bar{C}}_{nr}, \quad \bar{H}^2{}_{nr} = \frac{1}{2(1+\nu)} k_n \bar{\bar{C}}_{nr}, \\
&D^1{}_{nr} = \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\alpha_r{}^2}{m_{nr}} \bar{\bar{C}}_{nr}, \quad D^2{}_{nr} = \frac{-1}{2(1+\nu)} m_{nr} \bar{\bar{C}}_{nr}, \quad D_{nr} = \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{k_n{}^2}{m_{nr}} \bar{\bar{C}}_{nr},
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

但し $\bar{\bar{C}}_{nr} = C^1{}_{nr} + C^2{}_{nr} + C_{nr}$.

第二行表現に属するものを参考のために書き下せば

$$\left.\begin{aligned}
\bar{C}^3{}_{nr} &= \frac{1}{2(1+\nu)m_{nr}\alpha_r}\Big\{(\nu\alpha_r{}^2+m^2{}_{nr})\bar{C}^1{}_{nr}-(\alpha_r{}^2+\nu m^2{}_{nr})\bar{C}^2{}_{nr}-\nu k_n{}^2\bar{C}_{nr}\Big\},\\
H^{1\prime}_{nr} &= \frac{1}{2(1+\nu)\alpha_r k_n}\Big\{(\nu\alpha_r{}^2-k_n{}^2)\bar{C}^1{}_{nr}+\nu m^2{}_{nr}\bar{C}^2{}_{nr}+(\nu k_n{}^2-\alpha_r{}^2)\bar{C}_{nr}\Big\},\\
H^{2\prime}_{nr} &= \frac{1}{2(1+\nu)k_n m_{nr}}\Big\{-\nu\alpha_r{}^2\bar{C}^1{}_{nr}-(k_n{}^2+\nu m^2{}_{nr})\bar{C}^2{}_{nr}+(\nu k_n{}^2+m^2{}_{nr})\bar{C}_{nr}\Big\},
\end{aligned}\right\}\quad(30)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{D}^3{}_{nr} = \frac{\alpha_r}{2(1+\nu)}\bar{\bar{C}}'_{nr},\quad \bar{H}^{1\prime}_{nr} = \frac{-1}{2(1+\nu)}\frac{k_n\alpha_r}{m_{nr}}\bar{\bar{C}}'_{nr},\quad \bar{H}^{2\prime}_{nr} = \frac{1}{2(1+\nu)}k_n\bar{\bar{C}}'_{nr},\\
&\bar{D}^1{}_{nr} = \frac{1}{2(1+\nu)}\frac{\alpha_r{}^2}{m_{nr}}\bar{\bar{C}}'_{nr},\quad \bar{D}^2{}_{nr} = \frac{-1}{2(1+\nu)}m_{nr}\bar{\bar{C}}'_{nr},\quad \bar{D}_{nr} = \frac{1}{2(1+\nu)}\frac{k_n{}^2}{m_{nr}}\bar{\bar{C}}'_{nr},
\end{aligned}\right\}\quad(31)$$

但し $\bar{\bar{C}}'_{nr} = \bar{C}^1{}_{nr} + \bar{C}^2{}_{nr} + \bar{C}_{nr}$.

第三群の解中に含まれる係数列に関し

第一行表現については

$$\left.\begin{aligned}
E^3{}_{rs} &= \frac{1}{2(1+\nu)\alpha_r\beta_s}\Big\{(\nu\alpha_r{}^2-\beta_s{}^2)E^1{}_{rs}+(\nu\beta_s{}^2-\alpha_r{}^2)E^2{}_{rs}+\nu\gamma^2{}_{rs}E_{rs}\Big\},\\
I^1{}_{rs} &= \frac{1}{2(1+\nu)\alpha_r\gamma_{rs}}\Big\{(\gamma^2{}_{rs}+\nu\alpha_r{}^2)E^1{}_{rs}-\nu\beta_s{}^2E^2{}_{rs}-(\nu\gamma^2{}_{rs}+\alpha_r{}^2)E_{rs}\Big\},\\
I^2{}_{rs} &= \frac{1}{2(1+\nu)\beta_s\gamma_{rs}}\Big\{-\nu\alpha_r{}^2E^1{}_{rs}+(\gamma^2{}_{rs}+\nu\beta_s{}^2)E^2{}_{rs}-(\nu\gamma^2{}_{rs}+\beta_s{}^2)E_{rs}\Big\},
\end{aligned}\right\}\quad(32)$$

$$\left.\begin{aligned}
&F^3{}_{rs} = \frac{-1}{2(1+\nu)}\frac{\alpha_r\beta_s}{\gamma_{rs}}\bar{\bar{E}}_{rs},\quad J^1{}_{rs} = \frac{\alpha_r}{2(1+\nu)}\bar{\bar{E}}_{rs},\quad J^2{}_{rs} = \frac{\beta_s}{2(1+\nu)}\bar{\bar{E}}_{rs},\\
&F^1{}_{rs} = \frac{1}{2(1+\nu)}\frac{\alpha_r{}^2}{\gamma_{rs}}\bar{\bar{E}}_{rs},\quad F^2{}_{rs} = \frac{1}{2(1+\nu)}\frac{\beta_s{}^2}{\gamma_{rs}}\bar{\bar{E}}_{rs},\quad F_{rs} = \frac{-1}{2(1+\nu)}\gamma_{rs}\bar{\bar{E}}_{rs},
\end{aligned}\right\}\quad(33)$$

但し $\bar{\bar{E}}_{rs} = E^1{}_{rs} + E^2{}_{rs} + E_{rs}$.

第二行表現については

$$\left.\begin{aligned}
\bar{E}^3{}_{rs} &= \frac{1}{2(1+\nu)\alpha_r\beta_s}\Big\{(\nu\alpha_r{}^2-\beta_s{}^2)\bar{E}^1{}_{rs}+(\nu\beta_s{}^2-\alpha_r{}^2)\bar{E}^2{}_{rs}+\nu\gamma^2{}_{rs}\bar{E}_{rs}\Big\},\\
\bar{I}^1{}_{rs} &= \frac{1}{2(1+\nu)\alpha_r\gamma_{rs}}\Big\{(\gamma_{rs}{}^2+\nu\alpha_r{}^2)\bar{E}^1{}_{rs}-\nu\beta_s{}^2\bar{E}^2{}_{rs}-(\nu\gamma^2{}_{rs}+\alpha_r{}^2)\bar{E}_{rs}\Big\},\\
\bar{I}^2{}_{rs} &= \frac{1}{2(1+\nu)\beta_s\gamma_{rs}}\Big\{-\nu\alpha_r{}^2\bar{E}^1{}_{rs}+(\gamma^2{}_{rs}+\nu\beta_s{}^2)\bar{E}^2{}_{rs}-(\nu\gamma^2{}_{rs}+\beta_s{}^2)\bar{E}_{rs}\Big\},
\end{aligned}\right\}\quad(34)$$

$$\left.\begin{aligned}\bar{F}^3{}_{rs}&=\frac{-1}{2(1+\nu)}\frac{\alpha_r\beta_s}{\gamma_{rs}}\bar{\bar{E}}'_{rs},\quad \bar{J}^1{}_{rs}=\frac{\alpha_r}{2(1+\nu)}\bar{\bar{E}}'_{rs},\quad \bar{J}^2{}_{rs}=\frac{\beta_s}{2(1+\nu)}\bar{\bar{E}}'_{rs},\\ \bar{F}^1{}_{rs}&=\frac{1}{2(1+\nu)}\frac{\alpha_r{}^2}{\gamma_{rs}}\bar{\bar{E}}'_{rs},\quad \bar{F}^2{}_{rs}=\frac{1}{2(1+\nu)}\frac{\beta_s{}^2}{\gamma_{rs}}\bar{\bar{E}}'_{rs},\quad \bar{F}_{rs}=\frac{-1}{2(1+\nu)}\gamma_{rs}\bar{E}'_{rs},\end{aligned}\right\}\quad(35)$$

但し $\bar{\bar{E}}'_{rs}=\bar{\bar{E}}_{rs}{}^1+\bar{\bar{E}}^2{}_{rs}+\bar{\bar{E}}_{rs}$.

以上 (20) 式より (35) 式迄で係数列の表現の簡単化したものを全て述べてある．前述の通り $A^1{}_{ns}-\bar{\bar{E}}_{rs}$ の未定の 18 個の係数列が残されており，この 18 個の数は境界条件を満足せしめるのに過不足ない数である．即ち

$x=2a,\ 0$ の二面で $\sigma_x,\ \tau_{xy},\ \tau_{xz}$ に対する境界条件

$y=2b,\ 0$ の二面での $\sigma_y,\ \tau_{xy},\ \tau_{yz}$ に対する境界条件

$z=2h,\ 0$ の二面に於ける $\sigma_z,\ \tau_{xz},\ \tau_{yz}$ に対する境界条件

で合計 18 個の量に対する境界条件が必要であるから過不足ないわけである．前述の通り 18 個は $x'=0$, 或いは $y'=0$ 面, $z'=0$ 面に関する surface tractions の分布の対称性が全くない場合であり，一つの面に関する surface tractions 分布の対称性があれば，18 個中 3 個だけ不要になる．即ち $x'=0$ 面がそれであれば（1）から（6）迄の応力表現中の第一群の解の第二行表現を落し $x\to x'$, $\alpha_r=\dfrac{r\pi}{2a}\to\dfrac{r\pi}{a}$, の修正を行い，(26), (27) 式は不要となり，18 個の未定係数列中 ($\bar{A}^1{}_{ns}$, $\bar{A}^2{}_{ns}$, $\bar{A}_{ns}$) が不要となるのである．（9）式で示した様な係数列の記号の変更を行ってあり，(20−(35) の関係式により（1)−(6）の応力表現を書き直して置く可きではあるが，余りにもその表現は冗長になるのでその儘とした．（9）式は（1)−(6）の応力表現使用の際注意されなければならない．

次にこの解法に依る変位表現を求める．

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{E}\Big\{\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)\Big\}$ の右辺に上記の応力表現を代入して之を x に関して積分し，所謂積分常数は取り去ることが出来るので，容易に x 方向変位 u の表現を得る．(20)−(35) の係数列の表現を使用して簡単化すれば次式を得る．

$$\begin{aligned}Eu=&\sum_n\sum_s\cos k_nz\cos\beta_sy\left[\frac{1}{2l_{ns}}\left\{3\begin{bmatrix}A^1{}_{ns}\\ \bar{A}^1{}_{ns}\end{bmatrix}+(1-2\nu)\left(\begin{bmatrix}A^2{}_{ns}\\ \bar{A}^2{}_{ns}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}A_{ns}\\ \bar{A}_{ns}\end{bmatrix}\right)\right\}\begin{Bmatrix}\sinh\\ \cosh\end{Bmatrix}l_{ns}x+\right.\\ &\left.-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\bar{\bar{A}}_{ns}\\ \bar{\bar{A}}'_{ns}\end{bmatrix}\cdot x\begin{bmatrix}\cosh\\ \sinh\end{bmatrix}l_{ns}x\right]+\\ &+\sum_n\sum_r\cos k_nz\sin\alpha_rx\left[\frac{1}{\alpha_r}\left\{\begin{bmatrix}C^1{}_{nr}\\ \bar{C}^1{}_{nr}\end{bmatrix}-\nu\begin{bmatrix}C^2{}_{nr}\\ \bar{C}^2{}_{nr}\end{bmatrix}-\nu\begin{bmatrix}C_{nr}\\ \bar{C}_{nr}\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}\cosh\\ \sinh\end{bmatrix}m_{nr}y+\frac{1}{2}\frac{\alpha_r}{m_{nr}}\begin{bmatrix}\bar{\bar{C}}_{nr}\\ \bar{\bar{C}}'_{nr}\end{bmatrix}\cdot y\begin{bmatrix}\sinh\\ \cosh\end{bmatrix}m_{nr}y\right]+\\ &+\sum_r\sum_s\sin\alpha_rx\cos\beta_sy\left[\frac{1}{\alpha_r}\left\{\begin{bmatrix}E^1{}_{rs}\\ \bar{E}^1{}_{rs}\end{bmatrix}-\nu\begin{bmatrix}E^2{}_{rs}\\ \bar{E}^2{}_{rs}\end{bmatrix}-\nu\begin{bmatrix}E_{rs}\\ \bar{E}_{rs}\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}\cosh\\ \sinh\end{bmatrix}\gamma_{rs}z+\frac{1}{2}\frac{\alpha_r}{\gamma_{rs}}\begin{bmatrix}\bar{\bar{E}}_{rs}\\ \bar{\bar{E}}'_{rs}\end{bmatrix}\cdot z\begin{bmatrix}\sinh\\ \cosh\end{bmatrix}\gamma_{rs}z\right]\end{aligned}\quad(36)$$

但し，例えば

$$\left\{\begin{bmatrix}E^1{}_{rs}\\ \bar{E}^1{}_{rs}\end{bmatrix}-\nu\begin{bmatrix}E_{rs}\\ \bar{E}_{rs}\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}\cosh\\ \sinh\end{bmatrix}\gamma_{rs}z\equiv(E^1{}_{rs}-\nu E_{rs})\cosh\gamma_{rs}z+(\bar{E}^1{}_{rs}-\nu\bar{E}_{rs})\sinh\gamma_{rs}z)\ ,$$

を表わす．又 y 方向変位 v については上記と同様に計算出来て

$$\begin{aligned}Ev=&\sum_n\sum_s\cos k_nz\sin\beta_sy\left[\frac{1}{\beta_s}\left\{\begin{bmatrix}A^2{}_{ns}\\ \bar{A}^2{}_{ns}\end{bmatrix}-\nu\begin{bmatrix}A^1{}_{ns}\\ \bar{A}^1{}_{ns}\end{bmatrix}-\nu\begin{bmatrix}A_{ns}\\ \bar{A}_{ns}\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}\cosh\\ \sinh\end{bmatrix}l_{ns}x+\frac{1}{2}\frac{\beta_s}{l_{ns}}\begin{bmatrix}\bar{\bar{A}}_{ns}\\ \bar{\bar{A}}'_{ns}\end{bmatrix}\cdot x\begin{bmatrix}\sinh\\ \cosh\end{bmatrix}l_{ns}x\right]+\\&+\sum_n\sum_r\cos k_nz\cos\alpha_rx\left[\frac{1}{2m_{nr}}\left\{3\begin{bmatrix}C^2{}_{nr}\\ \bar{C}^2{}_{nr}\end{bmatrix}+(1-2\nu)\left(\begin{bmatrix}C^1{}_{nr}\\ \bar{C}^1{}_{nr}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}C_{nr}\\ \bar{C}_{nr}\end{bmatrix}\right)\right\}\begin{bmatrix}\sinh\\ \cosh\end{bmatrix}m_{nr}y+\right.\\&\left.-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\bar{\bar{C}}_{nr}\\ \bar{\bar{C}}'_{nr}\end{bmatrix}\cdot y\begin{bmatrix}\cosh\\ \sinh\end{bmatrix}m_{nr}y\right]+\\&+\sum_r\sum_s\cos\alpha_rx\sin\beta_sy\left[\frac{1}{\beta_s}\left\{\begin{bmatrix}E^2{}_{rs}\\ \bar{E}^2{}_{rs}\end{bmatrix}-\nu\begin{bmatrix}E^1{}_{rs}\\ \bar{E}^1{}_{rs}\end{bmatrix}-\nu\begin{bmatrix}E_{rs}\\ \bar{E}_{rs}\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}\cosh\\ \sinh\end{bmatrix}\gamma_{rs}z+\frac{1}{2}\frac{\beta_s}{\gamma_{rs}}\begin{bmatrix}\bar{\bar{E}}_{rs}\\ \bar{\bar{E}}'_{rs}\end{bmatrix}\cdot z\begin{bmatrix}\sinh\\ \cosh\end{bmatrix}\gamma_{rs}z\right],\end{aligned}\tag{37}$$

z 方向変位 w に対しては

$$\begin{aligned}Ew=&\sum_n\sum_s\sin k_nz\cos\beta_sy\left[\frac{1}{k_n}\left\{\begin{bmatrix}A_{ns}\\ \bar{A}_{ns}\end{bmatrix}-\nu\begin{bmatrix}A^1{}_{ns}\\ \bar{A}^1{}_{ns}\end{bmatrix}-\nu\begin{bmatrix}A^2{}_{ns}\\ \bar{A}^2{}_{ns}\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}\cosh\\ \sinh\end{bmatrix}l_{ns}x+\frac{1}{2}\frac{k_n}{l_{ns}}\begin{bmatrix}\bar{\bar{A}}_{ns}\\ \bar{\bar{A}}'_{ns}\end{bmatrix}\cdot x\begin{bmatrix}\sinh\\ \cosh\end{bmatrix}l_{ns}x\right]+\\&+\sum_n\sum_r\sin k_nz\cos\alpha_rx\left[\frac{1}{k_n}\left\{\begin{bmatrix}C_{nr}\\ \bar{C}_{nr}\end{bmatrix}-\nu\begin{bmatrix}C^1{}_{nr}\\ \bar{C}^1{}_{nr}\end{bmatrix}-\nu\begin{bmatrix}C^2{}_{nr}\\ \bar{C}^2{}_{nr}\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}\cosh\\ \sinh\end{bmatrix}m_{nr}y+\frac{1}{2}\frac{k_n}{m_{n\cdot}}\begin{bmatrix}\bar{\bar{C}}_{nr}\\ \bar{\bar{C}}'_{nr}\end{bmatrix}\cdot y\times\right.\\&\left.\times\begin{bmatrix}\sinh\\ \cosh\end{bmatrix}m_{nr}y\right]+\\&+\sum_r\sum_s\cos\alpha_rx\cos\beta_sy\left[\frac{1}{2\gamma_{rs}}\left\{3\begin{bmatrix}E_{rs}\\ \bar{E}_{rs}\end{bmatrix}+(1-2\nu)\left(\begin{bmatrix}E_{rs}{}^1\\ \bar{E}_{rs}{}^1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}E_{rs}{}^2\\ \bar{E}_{rs}{}^2\end{bmatrix}\right)\right\}\begin{bmatrix}\sinh\\ \cosh\end{bmatrix}\gamma_{\cdot s}z+\right.\\&\left.-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\bar{\bar{E}}_{rs}\\ \bar{\bar{E}}'_{rs}\end{bmatrix}\cdot z\begin{bmatrix}\cosh\\ \sinh\end{bmatrix}\gamma_{rs}z\right].\end{aligned}\tag{38}$$

但し以上の変位表現は，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{E}\left\{\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)\right\}$ の型の三つの式より積分して得たものではあるが，上記 (36)，(37)，(38) の変位表現と剪断応力表現を

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{\mu}\tau_{xy}\,,\qquad(\text{但し }\mu\text{ は，剪断弾性係数})$$

の型の三つの式に代入しても，この三つの式は満足せられることは容易に検証せられる．

この (36)，(37)，(38) の変位の表現は全く応力の表現と同様な形であり，之を見ても明かな様に，境界条件が直六面体の幾面かで変位により与えられていても容易に問題が解けることは surface tractions が指定せられている場合と同様である．その場合無論一つの面で u, v, w の 3 個の量が指定せられているわけである．

斯の様にして直六面体に関する surface tractions の一般的な問題は微小変位理論内で三次元的に完全に解かれていることと考えられる．この解を S. Woinowsky-Krieger[6] の厚板の解と比較して見れば後者が不完全な事は一見して明瞭の様である．勿論解の形より見ても surface tractions が任意な分布をとって 18 個の係数列を必要とする様な場合はその計算の労苦が多大である事が分るが，分布の対称性が増したり，又簡単な条件が課されれば係数列の箇数は著しく減り，解の形が示す程の解の使用の上の困難はない．

又此処に得られた解が H. Neuber[2] の解法より導出せられることが三次元応力問題より見て望ましいことは最初に述べたことより明かなことである．即ち筆者の得た解が正しいものであるならば，この解をば H. Neuber の 4 つの基本的な調和函数 Φ_0，Φ_1，Φ_2，Φ_3 を適当に選んで H. Neuber の応力並に変位表現より求め得ることが考えられる．然し元来この調和函数の選択は難しいものであり，現在迄この選択は出来ていないが，今後ともこの点についてはよく研究して見たい．

次に，矢張り座標系を前に記した図の通りに取り，一般化平面応力条件即ち物体内の全ての点で $\sigma_z=0$，上下両表面で $\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$ に最も近い条件

$$\sigma_z=0,\quad \tau_{xz}=0,\quad \tau_{yz}=0,\quad \text{at } z=0,\ 2h \tag{42}$$

に対して上記の解を使用して見ることにする．

即ち第三群に属する 6 個の未定の係数列 ($E^1{}_{rs}$, $E^2{}_{rs}$, E_{rs}) と ($\bar{E}^1{}_{rs}$, $\bar{E}^2{}_{rs}$, $\bar{E}_{rs}$) とが τ_{xz} と τ_{yz} に就いての上下両表面に於ける条件に依り 2 個の未定の係数列であらわされることを述べる．今二つの式を考える．

$$h\cosh\gamma_{rs}h\sinh\gamma_{rs}(z-h)-(z-h)\sinh\gamma_{rs}h\cosh\gamma_{rs}(z-h), \tag{43}$$

$$h\sinh\gamma_{rs}h\cosh\gamma_{rs}(z-h)-(z-h)\cosh\gamma_{rs}h\sinh\gamma_{rs}(z-h), \tag{44}$$

この二式は $z=2h, 0$ で消える．

$$\left\{(43)+J'_{rs}(44)\right\}\frac{1}{(J'_{rs}+1)h}=\sinh\gamma_{rs}z+\frac{(J'_{rs}-1)}{(J'_{rs}+1)}\cosh\gamma_{rs}h\cdot\sinh\gamma_{rs}h\cdot z\cosh\gamma_{rs}z+$$
$$+\frac{(\sinh^2\gamma_{rs}h-J'_{rs}\cosh^2\gamma_{rs}h)}{(J'_{rs}+1)h}\cdot z\sinh\gamma_{rs}z. \tag{45}$$

以下において

$$\Gamma^1{}_{rs}=\frac{(J'_{rs}-1)\sinh 2\gamma_{rs}h}{(J'_{rs}+1)2h},\quad \Gamma^2{}_{rs}=\frac{\sinh^2\gamma_{rs}h-J'_{rs}\cosh^2\gamma_{rs}h}{(J'_{rs}+1)h}, \tag{45'}$$

とす．J'_{rs} は混合比である．

而して (45) の表式は例えば τ_{xz} (5) 式の第三群の解の括弧の中に使用出来ること明白である．而して (5) 式と (6) 式とにおいてそこに使用した係数列記号即ち (9) 式の如き記号の変更を行う以前の記号を使用して

$$\bar{J}^1{}_{rs} = \bar{J}^2{}_{rs} = \bar{F}_{rs}$$

なる関係がある故，同じ混合比 J_{rs} を使用して即ち矢張り (45) 式を (6) 式の τ_{yz} の第三群の解の括弧の中の部分とすることが出来る．このことより次式を得る．

$$\left.\begin{array}{lll} J^1{}_{rs} = \Gamma^1{}_{rs} I^1{}_{rs}, & \bar{J}^1{}_{rs} = \Gamma^2{}_{rs} I^1{}_{rs}, \ \bar{I}^1{}_{rs} = 0, & \text{(a)} \\ J^2{}_{rs} = \Gamma^1{}_{rs} I^2{}_{rs}, & \bar{J}^2{}_{rs} = \Gamma^2{}_{rs} I^2{}_{rs}, \ \bar{I}^2{}_{rs} = 0, & \text{(b)} \end{array}\right\} \tag{46}$$

(46·a) と (33), (35), (34) より

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma^1{}_{rs} I^1{}_{rs} = \dfrac{\alpha_r}{2(1+\nu)} \bar{E}_{rs}, \ \text{(a)} \quad \Gamma^2{}_{rs} I^1{}_{rs} = \dfrac{\alpha_r}{2(1+\nu)} \bar{E}'_{rs}, \ \text{(b)} \\ (\gamma^2{}_{rs}+\nu\alpha_r^2)\bar{E}^1{}_{rs} - \nu\beta_s^2 \bar{E}^2{}_{rs} - (\nu\gamma^2{}_{rs}+\alpha_r^2)\bar{E}_{rs} = 0, \ \text{(c)} \end{array}\right\} \tag{47}$$

(46) の $J^1{}_{rs}$ と $J^2{}_{rs}$ の式より容易に $\dfrac{I^1{}_{rs}}{I^2{}_{rs}} = \dfrac{\alpha_r}{\beta_s}$ を得る．

この式があれば (46·b) の最初の二式は不要，故にこの式と (46·b) の最後の式と (34) より

$$I^2{}_{rs} = \frac{\beta_s}{\alpha_r} I^1{}_{rs}, \ \text{(a)} \quad -\nu\alpha_r^2 \bar{E}^1{}_{rs} + (\gamma^2{}_{rs} + \nu\beta_s^2)\bar{E}^2{}_{rs} - (\nu\gamma^2{}_{rs} + \beta_s^2)\bar{E}_{rs} = 0, \ \text{(b)} \tag{48}$$

(47·c)+(48·b) より

$$\bar{E}^1{}_{rs} + \bar{E}^2{}_{rs} - (2\nu+1)\bar{E}_{rs} = 0, \tag{49}$$

を得て，これと (47·b) とより

$$\left.\begin{array}{l} \bar{E}_{rs} = \dfrac{1}{\alpha_r} \Gamma^2{}_{rs} I^1{}_{rs}, \\ \text{(49) と (47·b) とより} \quad \bar{E}^1{}_{rs} = \dfrac{(2\nu\beta_s^2 + \alpha_r^2)}{\gamma^2{}_{rs}\alpha_r} \Gamma^2{}_{rs} I^1{}_{rs}, \\ \therefore \quad \bar{E}^2{}_{rs} = \dfrac{(\beta_s^2 + 2\nu\alpha_r^2)}{\gamma^2{}_{rs}\alpha_r} \Gamma^2{}_{rs} I^1{}_{rs}, \ \text{又} \ \bar{E}'_{rs} = \dfrac{2(1+\nu)}{\alpha_r} \Gamma^2{}_{rs} I^1{}_{rs}. \end{array}\right\} \tag{50}$$

次に (48·a) と (32) とより

$$2(1+\nu)\beta_s\gamma_{rs} I^2{}_{rs} = \frac{2(1+\nu)\beta_s^2\gamma_{rs}}{\alpha_r} I^1{}_{rs} = \left\{-\nu\alpha_r^2 E^1{}_{rs} + (\gamma^2{}_{rs}+\nu\beta_s^2)E^2{}_{rs} - (\nu\gamma^2{}_{rs}+\beta_s^2)E_{rs}\right\}, \ \text{と}$$

$$2(1+\nu)\alpha_s\gamma_{rs} I^1{}_{rs} = \{(\gamma^2{}_{rs} + \nu\alpha_r^2)E^1{}_{rs} - \nu\beta_s^2 E^2{}_{rs} - (\nu\gamma^2{}_{rs} + \alpha_r^2)E_{rs}\},$$

を辺々相い加算することにより次式を得る．

$$2(1+\nu)\frac{\gamma_{rs}}{\alpha_r}I^1_{rs}=E^1_{rs}+E^2_{rs}-(2\nu+1)\,E_{rs}, \tag{51}$$

(51) と (47·a) より

$$E_{rs}=\frac{I^1_{rs}}{\alpha_r}(\Gamma^1_{rs}-\gamma_{rs}), \tag{52}$$

(32) の I^1_{rs} の式と (47·a) と (52) より

$$E^1_{rs}=\frac{1}{\alpha_r\gamma_{rs}}\left\{\alpha_r^2+\frac{(\alpha_r^2+2\nu\beta_s^2)}{\gamma_{rs}}\cdot\Gamma^1_{rs}\right\}I^1_{rs}, \tag{53}$$

又容易に

$$E^2_{rs}=\frac{1}{\alpha_r\gamma_{rs}}\left\{\beta_s^2+\frac{(\beta_s^2+2\nu\alpha_r^2)}{\gamma_{rs}}\Gamma^1_{rs}\right\}I^1_{rs}, \tag{54}$$

又 (47·a) より

$$\bar{E}_{rs}=E^1_{rs}+E^2_{rs}+E_{rs}=\frac{2(1+\nu)}{\alpha_r}\Gamma^1_{rs}I^1_{rs}, \tag{55}$$

よって第3群の解中の未定の6個の係数列 ($E^1_{rs}, E^2_{rs}, E_{rs}$), ($\bar{E}^1_{rs}, \bar{E}^2_{rs}, \bar{E}_{rs}$) は ($I^1_{rs}$, J'_{rs}) の2個の未定の係数列により表わすことが出来て以上の様に I^1_{rs} と J'_{rs} で第3群の係数列をすべてあらわせば τ_{xz}, τ_{yz} の境界条件は第3群の解に対して満たされるのである．而して τ_{xz}, τ_{yz} の (5), (6) の表式中の第1群と第2群の解には $\sin k_n z$ の型の項を含み必ずそれ等は上下両表面で消えるので，第3群の係数列に対する処理のみで充分である．結局 (19) 式の左辺の係数列で他の総ての係数列を表わす様に計算して，形を整えておいたが，この例では I^1_{rs} と混合比 J_{rs} で第3群に属する係数列を表わす様にして尤も都合のよい様にしたわけである．τ_{xz}, τ_{yz} についての境界条件により第3群の解に大きな変化があったから，第3群の応力並に変位の表現を書き下しておく．

第3群の解即ち $\sum_r\sum_s$ 記号を有するもののみ書く．応力表現に対して係数列記号に注意して (1)−(6) 式と (45')−(55) 式より

$$\sigma_x=\sum_r\sum_s\cos\alpha_r x\cos\beta_s y\frac{I^1_{rs}}{\alpha_r\gamma_{rs}}\left[\left\{\alpha_r^2+\frac{(\alpha_r^2+2\nu\beta_s^2)}{\gamma_{rs}}\Gamma^1_{rs}\right\}\cosh\gamma_{rs}z+\right.$$
$$\left.+\frac{(2\nu\beta_s^2+\alpha_r^2)}{\gamma_{rs}}\Gamma^2_{rs}\sinh\gamma_{rs}z+\alpha_r^2\Gamma^1_{rs}z\sinh\gamma_{rs}z+\alpha^2_{rs}\Gamma^2_{rs}z\cosh\gamma_{rs}z\right], \tag{56·a}$$

$$\sigma_y=\sum_r\sum_s\cos\alpha_r x\cos\beta_s y\cdot\frac{I_{rs}^1}{\alpha_r\gamma_{rs}}\left[\left\{\beta_s^2+\frac{(\beta_s^2+2\nu\alpha_r^2)}{\gamma_{rs}}\Gamma^1_{rs}\right\}\cos\gamma_{rs}z+\right.$$
$$\left.+\frac{(\beta_s^2+2\nu\alpha_r^2)}{\gamma_{rs}}\Gamma^2_{rs}\sinh\gamma_{rs}z+\beta_s^2\Gamma^1_{rs}z\sinh\gamma_{rs}z+\beta_s^2\Gamma^2_{rs}z\cosh\gamma_{rs}z\right], \tag{56·b}$$

$$\sigma_z=\sum_r\sum_s\cos\alpha_r x\cos\beta_s y\cdot\frac{I^1_{rs}}{\alpha_r}\left\{(-\gamma_{rs}+\Gamma^1_{rs})\cosh\gamma_{rs}z+\Gamma^2_{rs}\sinh\gamma_{rs}z+\right.$$
$$\left.-\gamma_{rs}\Gamma^1_{rs}z\sinh\gamma_{rs}z-\gamma_{rs}\Gamma^2_{rs}z\cosh\gamma_{rs}z\right\}, \tag{56·c}$$

$$\tau_{xy}=\sum_r\sum_s \sin\alpha_r x\sin\beta_s y\cdot\frac{\Gamma^1{}_{rs}\beta_s}{\gamma_{rs}{}^2}\left[\frac{1}{(1+\nu)}\left\{(\nu-1)\gamma_{rs}-(\nu+1)\Gamma^1{}_{rs}\right\}\cosh\gamma_{rs}z+\right.$$
$$\left.+(2\nu-1)\,\Gamma^2{}_{rs}\sinh\gamma_{rs}z-\gamma_{rs}\Gamma^1{}_{rs}z\sinh\gamma_{rs}z-\gamma_{rs}\Gamma^2{}_{rs}z\cosh\gamma_{rs}z\right],\tag{56·d}$$

$$\tau_{xz}=\sum_r\sum_s \sin\alpha_r x\cos\beta_s y\cdot\Gamma^1{}_{rs}(\sinh\gamma_{rs}z+\Gamma^1{}_{rs}z\cosh\gamma_{rs}z+\Gamma^2{}_{rs}z\sinh\gamma_{rs}z),\tag{56·e}$$

$$\tau_{yz}=\sum_r\sum_s \cos\alpha_r x\sin\beta_s y\cdot\Gamma^1{}_{rs}\frac{\beta_s}{\alpha_r}\left(\sinh\gamma_{rs}z+\Gamma^1{}_{rs}z\cosh\gamma_{rs}z+\Gamma^2{}_{rs}z\sinh\gamma_{rs}z\right),\tag{56·f}$$

次に変位表現に対して (36), (37), (38) 式と (45′)−(55) 式とより

$$Eu=\sum_r\sum_s \sin\alpha_r x\cos\beta_s y\cdot\frac{(1+\nu)\Gamma^1{}_{rs}}{\gamma^2{}_{rs}}\left[\left\{\gamma_{rs}+(1-2\nu)\Gamma^1{}_{sr}\right\}\cosh\gamma_{rs}z+\right.$$
$$\left.+(1-2\nu)\Gamma^2{}_{rs}\sinh\gamma_{rs}z+\gamma_{rs}\Gamma^1{}_{rs}z\sinh\gamma_{rs}z+\gamma_{rs}\Gamma^2{}_{rs}z\cosh\gamma_{rs}z\right],\tag{57·a}$$

$$Ev=\sum_r\sum_s \cos\alpha_r x\sin\beta_s y\cdot\frac{(1+\nu)\Gamma^1{}_{rs}\beta_s}{\alpha_r\gamma^2{}_{rs}}\left[\{\gamma_{rs}+(1-2\nu)\Gamma^1{}_{rs}\}\cosh\gamma_{rs}z+\right.$$
$$\left.+(1-2\nu)\Gamma^2{}_{rs}\sinh\gamma_{rs}z+\gamma_{rs}\Gamma^1{}_{rs}z\sinh\gamma_{rs}z+\gamma_{rs}\Gamma^2{}_{rs}z\cosh\gamma_{rs}z\right],\tag{57·b}$$

$$Ew=\sum_r\sum_s \cos\alpha_r x\cos\beta_s y\cdot\frac{(1+\nu)\Gamma^1{}_{rs}}{\alpha_r}\left[\left\{-\gamma_{rs}+2(1-\nu)\Gamma^1{}_{rs}\right\}\sinh\gamma_{rs}z+\right.$$
$$\left.+2(1-\nu)\Gamma^2{}_{rs}\cosh\gamma_{rs}z-\gamma_{rs}\Gamma^1{}_{rs}z\cosh\gamma_{rs}z-\gamma_{rs}\Gamma^2{}_{rs}z\sinh\gamma_{rs}z\right],\tag{57·c}$$

但しEはヤング係数, ν はポアッソン比である.

次に $z=2h, 0$ に於いて $\sigma_z=0$ の条件を課さねばならぬが剪断応力に対する様に簡単に行かず, 普通に行われる様に計算する. 今 $x'=0$, $y'=0$ の二面に関して表面荷重が対称に分布しているとする. その時は応力表現の第1群と第2群の第2行の表現は不要となる. 但し x'', y'' の $''$ は除く. (4) 式より又 (56·c) をも使用し $z=2h$ 面に於いては

$$\sigma_z|_{z=2h}=\sum_n\sum_s\cos\beta_s y\cdot(-1)^n(A_{ns}\cosh l_{ns}x+B_{ns}x\sinh l_{ns}x)+$$
$$+\sum_n\sum_r\cos\alpha_r x\cdot(-1)^n(C_{nr}\cosh m_{nr}y+D_{nr}y\sinh m_{nr}y)+$$
$$+\sum_r\sum_s\cos\alpha_r x\cos\beta_s y\cdot\frac{\Gamma^1{}_{rs}}{\alpha_r}\left\{(-\gamma_{rs}+\Gamma^1{}_{rs})\cosh 2\gamma_{rs}h+\Gamma^2{}_{rs}\sinh 2\gamma_{rs}h+\right.$$
$$\left.-2\gamma_{rs}h\Gamma^1{}_{rs}\sinh 2\gamma_{rs}h-2\gamma_{rs}h\Gamma^2{}_{rs}\cosh 2\gamma_{rs}h\right\}=0,\tag{58}$$

又 $z=0$ 面に於いては

$$\sigma_z|_{z=0}=\sum_n\sum_s\cos\beta_s y\cdot(A_{ns}\cosh l_{ns}x+B_{ns}x\sinh l_{ns}x)+$$
$$+\sum_u\sum_r\cos\alpha_r x\cdot(C_{nr}\cosh m_{nr}y+D_{nr}y\sinh m_{nr}y)+$$
$$+\sum_r\sum_s\cos\alpha_r x\cos\beta_s y\frac{\Gamma^1{}_{rs}}{\alpha_r}(-\gamma_{rs}+\Gamma^1{}_{rs})=0,\tag{59}$$

但し上記係数列は（9）の変更がなされているものであり

$$k_n=\frac{n\pi}{2h},\qquad \alpha_r=\frac{r\pi}{a},\qquad \beta_s=\frac{s\pi}{b},$$

$l^2_{ns}=k_n^2+\beta_s^2$, $m^2_{nr}=k_n^2+\alpha_r^2$, $\gamma^2_{rs}=\alpha_r^2+\beta_s^2$, 原点は図中 $0''$ にあり (x'', y'', z'') 座標系に依るのであるが，$''$ は省いた．(58)，(59) 式の右辺の双曲線函数を含む部分を Fourier cosine 級数に展開し合算して $\sum_r\sum_s A_{rs}\cos\alpha_r x\cos\beta_s y$ の形をつくりその係数を 0 として (58) (59) の 2 式より指定せられた (r, s) に対して 2 箇の関係式を得ること明かである．この 2 条件により未定係数列が 2 箇減少したことと同等となるが，形の綺麗な関係を得た訳でないので最後的な処理は逐次近似法で係数列の値を求める．然しこの様な境界条件の扱い方はこの方法では普通のことであり已むを得ない．

以上希望する応力表現より出発して三次元的解を求め釣合式適合条件式を満足させ，これ等の解が境界条件を満足するのに過不足のない箇数の係数列を有していることを示し，併わせて一般化平面応力条件に最も近い三次元的応力問題の条件に依り得た解を使用して見た．この解により単一連結の直方面体型の物体の弾性問題は原理的に解かれている事になると考えられる．一般の表面荷重の場合は与えられている荷重分布函数を考えている面で二重 Fourier 級数に展開してその展開係数を例えば前記の $\sum_r\sum_s A_{rs}\cos\alpha_r x\cos\beta_s y$ の型の相い応ずる係数と等置する手続きを行うことは勿論である．物体力や熱応力等が働いていなければ，弾性問題は全べて surface tractions や surface dispacements の問題であり，内部の一部の応力や変形の様子を最初から指定することは全く近似的な考えに基くものであり，そのために得られる解が整頓され計算が簡便になっても種々の不都合が生ずることは已むを得ないことである．此処に得られた解には欠点もあるかも知れないが，直角座標系に依って表面条件の処理の仕方に重点を置けば，応用数学の範囲内で凡そこの様なものになると思われる．此処での解では平面応力状態と一般化平面応力状態に近い境界条件を区別出来る筈もなく，前に後者の意味のことを云ったのは便宜的のものであるに過ぎない．解の形そのものは比較的簡単であり，双曲線函数を Fourier 級数に展開することも容易で，直角座標系によるこの解法はこの種の解法中最も使用し易いものである．他の座標系に依るこの解法の解の形を定めることは，使用する函数やその座標系に依る釣合式，殊に適合条件式の形等のために些か困難である．

最後に当り種々有益な御注意を頂いた久野教授，この覚書の原稿を読んで下った藤井教授に感謝の意を表する．

文献及び注意

1) A. E. H. Love: "The Mathematical Theory of Elasticity", Cambridge University Press, London, 1934, p. 16 and Chapter X.

　澁谷　巖: "三次元応力の一般解について", 日本機械学会論文集, 第14巻第48号, 昭23年, 25頁.

澁谷 巖: "三次元応力の一般解の諸性質について", 日本機械学論文集, 第16巻第55号, 昭25年, 104頁.

宮本 博: 第4回応用力学連合講演会, 前刷第1部, 41頁.

2) H. Neuber: "Kerbspannungslehre", Julius Springer, 1937.

3) 牟岐鹿楼: 第4回応用力学連合講演会, 前刷第1部, 43頁.

4) A. Nadai: "Elastische Platten", Julius Springer, S. 315.

5) A.E.H. Love: "The Mathematical Theory of Elasticity", Chapter XXII, Sec. 299 to Sec. 312c.

6) S. Woinowsky-Krieger: Ing. Archiv, IV. Band, Heft 3 und 4, 1933.

此の報告の内容は昭和 29 年9月2日第4回応用力学連合講演会に於いて講演.