HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	集中荷重による正方形板の撓み
Author(s)	久野, 陸夫; Kuno, Rokuo
Citation	北海道大學工學部研究報告, 11, 91-96
Issue Date	1954-12-10
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40554
Type	departmental bulletin paper
File Information	11_91-96.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

集中荷重による正方形板の撓み

久　野　陸　夫

(September 30, 1954)

Bending of Thin Square Plate `by a concentrated Load

Rokuo KUNO

Abstract

The solution of the bending of the thin rectangular clamped plate by a concentrated load at its center is well known, but when a concentrated load is out of center, the solution is very complex and an approximate brief formula for the deflection and the fixing moment are not yet known.

In such a case as a concentrated load is near the corners, it resembles a quadrantal infiniteplate, the edges of which are clamped. Therefore I get a correct solution of the deflection and the fixing moment of the clamped quadrantal infinite plate loaded by a concentrated load at the bisect line as (11) & (12).

Considering the solution of a clamped square plate loaded at its center by Dana Young, the deflection of the loaded position and the max. fixing moment of the clamped squere plate loaded by a concentrated load at its diagonal are approximated as (16) & (17).

周辺が固定された矩形板の集中荷重による撓み，およびそれによつて生ずる応力の計算はすでに知られているが[1)]，集中荷重が板の中央にかかつている場合についてのみ解かれている様である．中央から離れている所に集中荷重のある場合の計算は勿論同じ様な方法で出来る筈であるが，しかしその計算は甚しく複雑である．故に簡単な近似式を求める目的で，まづ集中荷重が割合に角度部に近く存在する場合には，荷重から遠い他の２辺の影響を無視して４分の１無限板と考えて，この板に集中荷重がかかつている場合で近似出来るとして計算し，次に中央に集中荷重がかかつている場合については既に正確に計算された値が知られているからこの値を用い，この両極端の二つの場合を適当に考慮して近似式を求めることとする．

計　　算

薄い平板の撓み W は分布荷重がない場合には次の微分方程式を満足しなければならない．

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)W=0 \tag{1}$$

4分の1無限板に対しこの微分方程式（1）を満足する解として次の如く置く．

$$
\begin{aligned}
W = & Ar^{ik+1}\sin(ik-1)\theta + Br^{-(ik-1)}\sin(ik+1)\theta \\
& + Cr^{ik+1}\cos(ik-1)\theta + Dr^{-(ik-1)}\cos(ik+1)\theta \\
& + Er^{ik+1}\sin(ik+1)\theta + Fr^{-(ik-1)}\sin(ik-1)\theta \\
& + Gr^{ik+1}\cos(ik+1)\theta + Gr^{-(ik-1)}\cos(ik-1)\theta
\end{aligned} \qquad (2)
$$

集中荷重Pが (R,ϕ) なる位置に有るときはこの4分の1無限板を2つの部分に分けて $\theta<\phi$ の部分の撓みを W_1, $\theta>\phi$ の部分の撓みを W_2 とすれば第1の部分に対しては $\theta=0$ で

$$W_1 = 0 \qquad \frac{\partial W_1}{\partial\theta} = 0 \qquad (3)$$

第2の部分に対しては $\theta=\pi/2$ で

$$W_2 = 0 \qquad \frac{\partial W_2}{\partial\theta} = 0 \qquad (4)$$

更に第1の部分と第2の部分の境界，即ち $\theta=\phi$ では撓み，傾斜，モーメントが一致していなければならないから

$$W_1 = W_2, \quad \frac{\partial W_1}{\partial\theta} = \frac{\partial W_2}{\partial\theta}, \quad \frac{\partial^2 W_1}{\partial\theta^2} = \frac{\partial^2 W_2}{\partial\theta^2} \qquad (5)$$

尚その上に更に一つの条件を満足しなければならない．剪断力QはPの加る点 (R,ϕ) を除いては2つの部分の境界で等しくなければならぬし，点 (R,ϕ) では集中荷重Pのために不連続でなければならぬ．この集中荷重のために生ずる $\theta=\phi$ に於ける剪断力の差を次の様な積分の形であらわす．

$$\frac{PR}{\pi r^2}\int_0^\infty \cos\left(k\log\frac{r}{R}\right)dk^{(2)}$$

故に $\theta=\phi$ における剪断力の条件式は

$$D\frac{\partial(\varDelta W_1)}{r\partial\theta} - D\frac{\partial(\varDelta W_2)}{r\partial\theta} = \frac{PR}{\pi r^2}\int_0^\infty \cos\left(k\log\frac{r}{R}\right)dk \qquad (6)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

（2）式で示される W_1, W_2 に含まれている8つの未知数は上の様な（3),（4),（5),（6）なる8つの条件式で決定することが出来る．

特別な1例として $\phi=\pi/4$ の場合，即ち集中荷重が4分の1無限板の2等分線上に存在する場合について上の様な計算を行うことによつて求めた W_1 の値を示すと次の如くである．

$$W_1=\frac{PRr}{4\sqrt{2}\,\pi D}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{\sin ik\frac{\pi}{4}\cos(ik-1)\theta}{ik\left(ik+\sin ik\frac{\pi}{2}\right)}\right.$$

$$\left.-\frac{\left(ik\cos ik\frac{\pi}{4}+\sin ik\frac{\pi}{4}\right)\sin(ik-1)\theta}{ik(ik-1)\left(ik+\sin ik\frac{\pi}{2}\right)}\right\}\cos\left(k\log\frac{r}{R}\right)dk \qquad (7)$$

この積分は $k=x+iy$ と置いて複素函数の積分として積分値を求めることが出来る．但しその極，即ち $k+\sinh k\frac{\pi}{2}=0$ を満足する値は次の表に示す．

n	x_n	y_n	n	x_n	y_n
0	1, 119	2, 740	4	2, 317	18, 922
1	1, 682	6, 845	5	2, 439	22, 933
2	1, 970	10, 885	6	2, 547	26, 940
3	2, 167	14, 908			

$\theta=\pi/4$, 即ち2等分線上の撓みは

$$W_1=\frac{-PRr}{4\pi D}\int_0^{\infty}\frac{\left(k^2-2\sinh^2 k\frac{\pi}{4}\right)\cos k\log\frac{r}{R}}{k(k^2+1)\left(k+\sinh k\frac{\pi}{2}\right)}dk \qquad (8)$$

の様な積分で示されその積分値は

$$\left.\begin{aligned}
X_n&=\cosh x_n\pi\,\sin y_n\pi\left\{\frac{2}{\pi}+\cosh x_n\frac{\pi}{2}\cos y_n\frac{\pi}{2}\right\}\\
&\qquad+\sinh x_n\pi\cos y_n\pi\sinh x_n\frac{\pi}{2}\sin y_n\frac{\pi}{2}\\
Y_n&=\sinh x_n\pi\,\cos y_n\pi\left\{\frac{2}{\pi}+\cosh x_n\frac{\pi}{2}\cos y_n\frac{\pi}{2}\right\}\\
&\qquad-\cosh x_n\pi\sin y_n\pi\sinh x_n\frac{\pi}{2}\sin y_n\frac{\pi}{2}\\
U_n&=\cosh x_n\frac{\pi}{2}\cos y_n\frac{\pi}{2}-1\\
V_n&=\sinh x_n\frac{\pi}{2}\cos y_n\frac{\pi}{2}
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

と置けば

$$W_1=\frac{2PRr}{\pi}\sum e^{-y_n\frac{\log r}{R}}\frac{\cos\left(x_n\log\frac{r}{R}\right)\{U_nX_n-Y_nV_n\}-\sin\left(x_n\log\frac{r}{R}\right)\{V_nX_n+U_nY_n\}}{X_n^2+Y_n^2} \qquad (10)$$

但し上の値は $r>R$ の場合であり $r<R$ の場合は複素積分の積分路を変えなければならぬから y_n の代りに $-y_n$ を代入しなければならぬ.

同様に固定辺に於ける固定モーメントを求めると

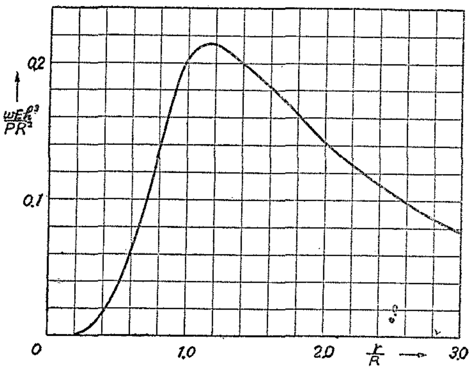
$$M_{\theta=0}=\frac{PR}{\sqrt{2}\,\pi r}\int_0^\infty \frac{\sinh k\frac{\pi}{4}\cos\left(k\log\frac{r}{R}\right)}{k+\sinh k\frac{\pi}{2}}dk$$

この値を上と同様に複素函数の積分として求めると

$$M_{\theta=0}=\frac{PR\pi}{\sqrt{2}\,r}\sum e^{-y_n\log\frac{r}{R}}\left[\frac{\cos\left(x_n\log\frac{r}{R}\right)\cosh x_n\frac{\pi}{4}\sin y_n\frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{\pi}+1-\cosh x_n\frac{\pi}{2}+\cos y_n\frac{\pi}{2}\right)}{1+\pi\cosh x_n\frac{\pi}{2}\cos y_n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}\left(\cosh^2 x_n\frac{\pi}{2}+\cos^2 y_n\frac{\pi}{2}-1\right)}\right.$$
$$\left.+\frac{\sin\left(x_n\log\frac{r}{R}\right)\sinh x_n\frac{\pi}{4}\cos y_n\frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{\pi}+1+\cosh x_n\frac{\pi}{2}-\cos y_n\frac{\pi}{2}\right)}{1+\pi\cosh x_n\frac{\pi}{2}\cos y_n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}\left(\cosh^2 x_n\frac{\pi}{2}+\cos^2 y_n\frac{\pi}{2}-1\right)}\right] \tag{11}$$

(10) 式即ち $\theta=\pi/4$ に於ける撓み W_1 を第1図は示している. 集中荷重が4分の1無限板の辺が固定されている時に2等分上にかかる時の2等分線の撓みである. 図の如く最大撓みは荷重点よりも遠い所に生じ荷重点がRの距離にある時は約 1.15R 頂点から離れた所に生ずる. その大きさは

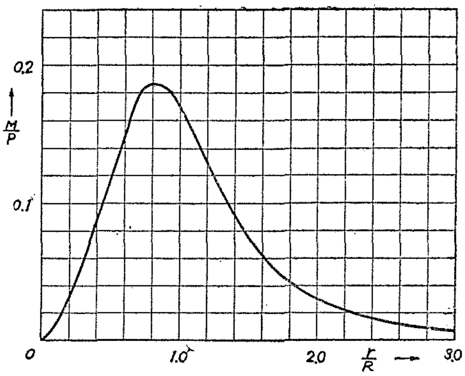
$$W_{1\max}=\frac{PR^2}{Eh^3}0.215 \tag{12}$$



第 1 図

又 (11) 式即ち固定辺の固定モーメントは第2図の如くである. 最大の固定モーメントは頂点から 0.8R の所に生じ, その値は

$$M_{\max}=0.187P \tag{13}$$



第 2 図

以上は4分の1無限板の場合であるから正方形板に集中荷重がかかつている時, 集中荷重が角度部の極めて近くに有る場合は殆どこれと同じ撓み及び固定モーメントを示すものと考えることが出来る. 集中荷重が正方形板の対角線上で更に中心に近い位置にある場合には当然最大

撓みの生ずる点は荷重点に近づき，中心荷重の場合には最大撓みを生ずる点と荷重点とは一致する．周辺上の最大固定モーメントの生ずる点も集中荷重が頂点の附近にある時は，荷重点から辺に下した垂線の足の点よりも遠い所にあるが集中荷重が正方形板の中心に近づくにしたがつて集中荷重点から周辺に下した垂線の足に近づき，中心荷重では固定モーメント最大は周辺の中央即ち $R/\sqrt{2}=0.707R$ で生ずる．

周辺を固定した正方形板の中央に集中荷重のある場合の正確な解は Dana Young[1] が示しているが，この場合の中央の撓みは

$$W=0.0611\frac{Pa^2}{Eh^3} \tag{14}$$

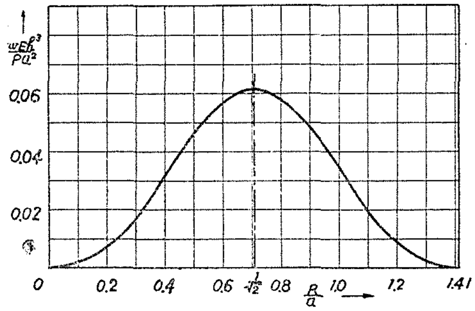
又周辺の中央の最大固定モーメントは

$$M=0.1257P \tag{15}$$

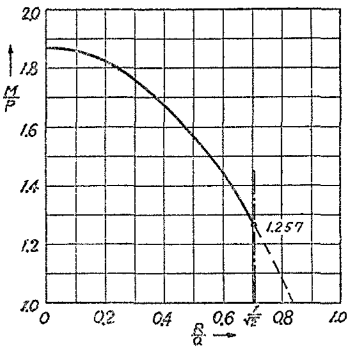
a は正方形板の辺の長さである．正方形板の対角線上に集中荷重がある場合，以上述べた様に荷重が頂点近くにある時，即ち R/a が割合小さい時は4分の1無限板の解 (12) が近似解を与え，R が $a/\sqrt{2}$，即ち中心荷重の場合には (14) が正確な解であるとするならばこの両極端の値を満足する様な2項式を求めると次の様になる．但しこの場合 W_{max} は (12) 式で示される値よりも大きな値を示すことはあり得ないので3次の項を用いないこととした．

$$W_{max}=\frac{Pa^2}{Eh^3}\left\{0.107\frac{R^2}{a^2}\left(\frac{R}{a}-\sqrt{2}\right)^2-0.550\frac{R^4}{a^4}\left(\frac{R}{a}-\sqrt{2}\right)^4\right\} \tag{16}$$

これが周辺を固定した正方形板の対角線上に集中荷重がある時の最大撓みの第1近似式である．



第 3 図



第 4 図

同様に頂点に近い所に集中荷重のある場合は固定モーメント最大か (13) 式で示され，中央の場合は (15) 式が正確な値を与えているならば

$$M_{max}=\left(0.187-0.123\frac{R^2}{a^2}\right)P \tag{17}$$

が最大固定モーメントの近似式と考えることが出来る．この関係を示したのが第3図，第4図である．

附　　録

剪断力の差が

$$\frac{PR}{\pi r^2}\int_0^\infty \cos\left(k\log\frac{r}{R}\right)dk$$

で示される事は $r=a$ から $r=b$ 迄積分する

$$\int_a^b \frac{PR}{\pi r^2}dr\int_0^\infty \cos\left(k\log\frac{r}{R}\right)dk$$

この式の積分の順序をかえて r で積分すれば

$$\int_0^\infty \frac{P}{\pi}\left[\frac{e^{\log\frac{b}{R}}\left\{\cos\left(k\log\frac{b}{R}\right)+k\sin\left(k\log\frac{b}{R}\right)\right\}-e^{\log\frac{a}{R}}\left\{\cos\left(k\log\frac{a}{R}\right)+k\sin\left(k\log\frac{a}{R}\right)\right\}}{1+k^2}\right]dk$$

この積分値は

$$\log\frac{b}{R}>0,\ \log\frac{a}{R}>0 \quad \text{のときは常に} \quad =0$$

$$\log\frac{b}{R}>0,\ \log\frac{a}{R}<0 \quad \text{のときは常に} \quad =P$$

$$\log\frac{b}{R}<0,\ \log\frac{a}{R}<0 \quad \text{のときは常に} \quad =0$$

故に荷重点をはさんで積分した時にのみ一定値 P になり，荷重点をはさまないで積分した時は常に0になるから条件を満足する．

文　　献

(1) Timoshenko: Theory of Plates and Shells p. 229.
(2) 附録参照.