



Title	バイト材料の振動減衰. 第1報 : 切削時と無負荷時との差異
Author(s)	星野, 悟; Hoshino, Satoru; 山下, 良雄 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 12, 11-23
Issue Date	1955-06-15
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/40559">https://hdl.handle.net/2115/40559</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	12_11-24.pdf



# バイト材料の振動減衰 (第1報)

— 切削時と無負荷時との差異 —

星 野 悟  
山 下 良 雄

(昭和30年3月1日 受理)

## Damping of Tool Materials (1st. Report)

— Damping Difference between Cutting and Free Vibrations —

Satoru HOSHINO  
Yoshio YAMASHITA

### Abstract

In chatter vibration of a lathe tool, most of the energy is dissipated for a damping of a lathe tool. In spite of that the neutral position of the vibrating lathe tool is deflected by cutting force, damping of a free vibration has been generally used. In order to ensure the difference between damping of above two cases, we did experiments which was based on a Randomized Block Design. As a result of statistical analysis, the difference denoted significance at the 1% level and we obtained its estimates.

Our experimental apparatus is a vibrating system that combines a cantilever, fixing a inertia mass, with two helical springs at the inertia mass.

### 1 緒 言

切削加工中のバイトの振動が、或限度内で大凡定常状態に達していることは明らかにバイトの振動減衰エネルギーと自励振動エネルギーとの平衡が保たれるからである。然し、現今までに知られている様に、バイト材料の振動減衰を単に速度に比例するものと考えたのでは<sup>1)</sup>、自励振動源の性質にもよるが、一般的に定常状態を得ることは不可能であり、双先が被削材と離れたり、双先速度が被削材速度を超えて摩擦減衰を生じたりして或振巾に落ち付くか、或は振巾の増大によりバイトの破壊にまで到達するとはしか想像されない。

ここで、我々は Föppl<sup>2)</sup>、Zener<sup>3)</sup> 等の減衰に関する研究結果から、振動の振巾即ち表面の応力が増大すれば対数減衰率も単調に増大する性質に着目して、この傾向を近似的に速度に比例する減衰力と速度の3乗に比例する減衰力との和として表わし、上述の欠陥を補足した<sup>4)</sup>。

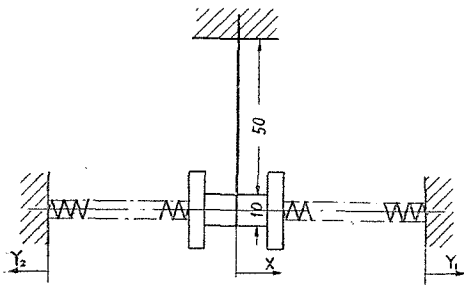
然しながら、Föppl、Zener 等の実験は、振動中心における応力が0の場合の自由減衰振動の結果であり、バイトの場合には、切削抵抗により振動中心の位置が下に撓んで居り、決して両者

の振動減衰の大きさが同等であると即断することは出来ない。

そこで特にバイト材料について、切削中に相当する自由振動と、切削していない時に相当する自由振動とにおける減衰の様相に差異があるかどうかを実験により確かめる。更に、バイト材料の振動履歴による減衰の変化等をも続けて実験して行きたい。

## 2 実験の計画

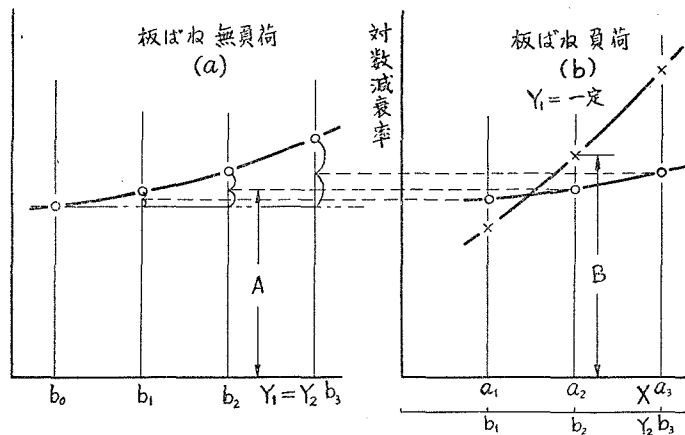
板ばねに予め負荷があるとき、ないときの自由減衰振動を記録するため、第1図の様な蔓巻ばねを加えた振動系として実験した。



第 1 図

左右の蔓巻ばねの伸びを同一にするならば、板ばねには負荷がなく振動中心は左右何れにも撓まない。左右の蔓巻ばねのどちらかをより多く伸ばすことにより、板ばねは負荷状態即ち振動中心がどちらかに撓んだ形で自由振動をする。

この様な振動系では、理論的には板ばねの撓み、蔓巻ばねの伸びの大小により固有振動数に



第 2 図

変化を生じないので、次の方法によつて負荷、無負荷状態に対する減衰の比較を行いうる。即ち、板ばねに負荷が与えられない場合、蔓巻ばねに種々の伸びを与えて減衰を求め、振巾をパラメーターとして曲線を第2図(a)の様に求める。蔓巻ばねの不平等伸びによる板ばねの撓みは、蔓巻ばねの一方の伸びを一定にすれば一意的に決定されるから、板ばねの撓みを与えることにより残り1ヶの蔓巻ばねの伸びは決定され、この様な状態にある蔓巻ばねの振動減衰と無負荷

状態にある板ばねの振動減衰との和が、第2図(a)におけるAで与えられ、一方現実に行われる板ばねの撓んだ状態における系全体の振動減衰は第2図(b)のBで与えられるから、板ばねの負荷、無負荷状態による振動減衰の差異は  $A-B$  である。

この場合、板ばねの振動減衰は相対的に求められるのみで、絶対値は求められない。これを求めるためには、板ばねと蔓巻ばねとの減衰エネルギーを分離し、更に空気の抵抗等をも考慮する必要がある。

金属材料の場合、振動履歴により振動減衰の大きさが変化することは<sup>5)</sup>既に緒言においても述べた通りであるが、今回は一般的に、負荷時、無負荷時の相違の有無を指摘することを目的としているので、実験結果をこの目的に適合させるため上記の影響を出来るだけ除くような実験計画を必要とする。

第1図の様に板ばねの初期撓み量を  $X$ 、2本の蔓巻ばねの初期伸び量を  $Y_1$ 、 $Y_2$  とし、 $X$ 、 $Y_1$ 、 $Y_2$  に相当する最大応力を夫々  $\sigma_X$ 、 $\tau_{Y_1}$ 、 $\tau_{Y_2}$  とする。最初の振巾を約 2 mm として、第1表の様な7ケの実験を行うことにより、負荷時、無負荷時における減衰の比較を求めることが出来る。振動履歴による減衰の大きさの変化は、実験の順序により表われてくることは明らかであり、この様な実験条件の変化は出来るだけ層別してデータの精密化を図る必要がある。このため7ケの実験を1ブロックとして数ブロックの実験を反覆することにより、ブロック間の変動即ち振動履歴の影響の大半を分離することが出来る。更に、1ブロック中での実験順序による減衰の大きさの変化も十分想像されるが、この場合順序の任意化により統計的に取扱える様にした。勿論、この影響は誤差変動の中に含まれる。

第1表

	$X$	$Y_1$	$Y_2$
1	0	$b_0$	$b_0$
2	0	$b_1$	$b_1$
3	0	$b_2$	$b_2$
4	0	$b_3$	$b_3$
5	$a_1$	$b_0$	$b_1$
6	$a_2$	$b_0$	$b_2$
7	$a_3$	$b_0$	$b_3$

### 3 実験装置

実験装置は第3図(a)、(b)の写真に示してある。第3図(a)は振動系の方であり、(b)は装置全体を写してある。光源Iから出る光線は、慣性質量Bに取り付けてある振動記録用レンズミラーDと1/60秒毎のタイムマークをするためのスリット(1/10秒毎に太いスリットをもつ)とレンズミラーEより反射して、オッシロペーパーを捲いてあるドラムHに入る。Aは板ばね(今回は炭素工具鋼製で油焼入したものとししないものの2種)であり、Cは夫々50巻きの蔓巻ばねである。蔓巻ばねの伸びを正確に与えるため、スケールFを取付けてある。又振動を与えるためにGの様な装置で予めBを変位させ、実験の始まりと共にピンを外す。二重撮影を防止するため光源Iの前方にシャッターを取付けてある。

尚、板ばねの寸法は

厚さ 1.45 mm, 巾 10 mm

ばね常数 1000 gr/mm

慣性質量をつけた一次振動数 46.0 c/s

蔓巻ばねの寸法は

素線径 1.2 mm, コイル径 6 mm

巻数 50, ばね常数 200 gr/mm

一次固有振動数 119.7 c/s

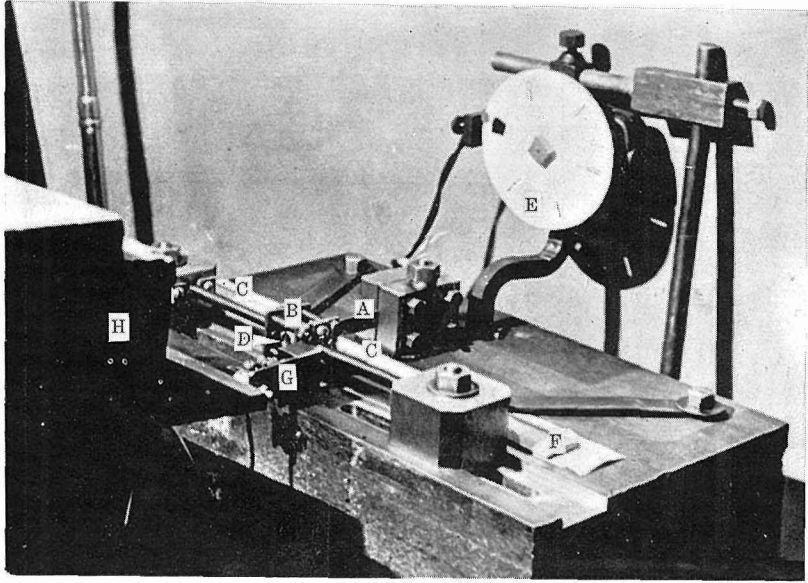
実験装置に取付けた時の主要寸法は第1図に示してある。

## 4 実 験

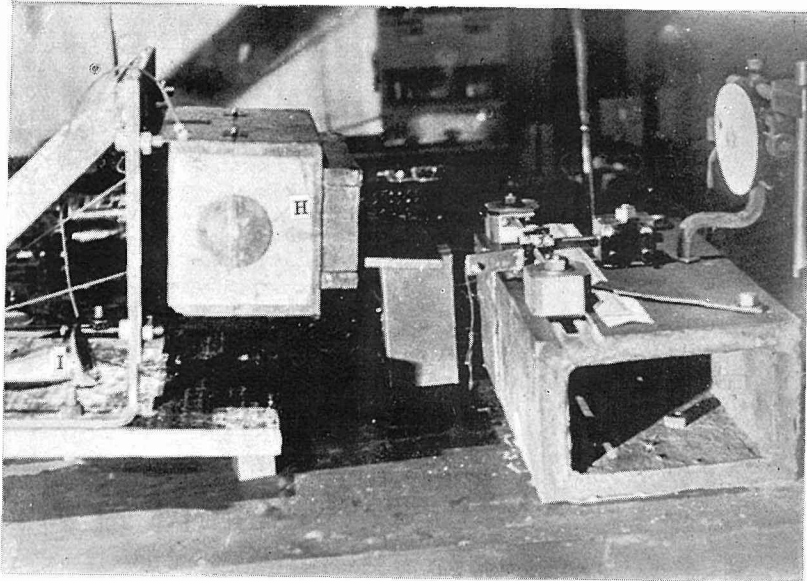
以上の実験計画, 実験装置で行った実験結果は, 第2, 3表に示す. 更にデータ写真の一部を第4, 5図に示す.

第2表 油焼入炭素工具鋼

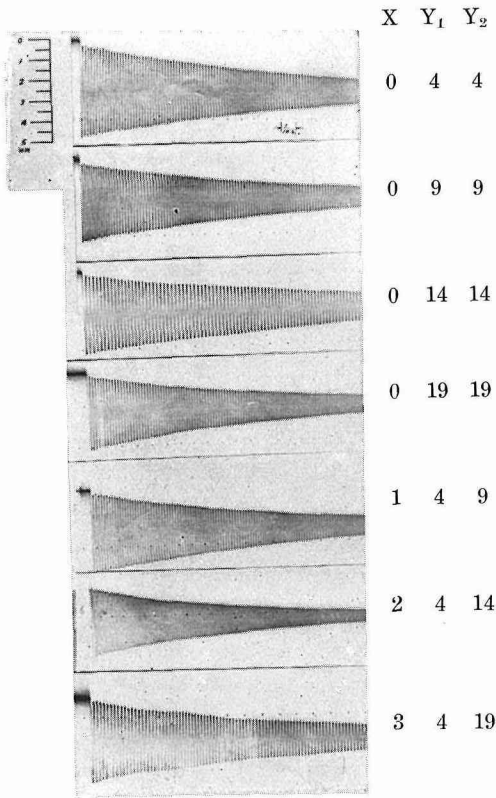
実験 順序 (R)	処 理 (T)						対 数 減 衰 率 $\delta$					振動数 $f$ c/s	
	X	mm		$\sigma_x$	kg/mm <sup>2</sup>		振 巾 mm				1.6~0.5 平 均		
		Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>		$\tau_{r1}$	$\tau_{r2}$	1.5	1.2	0.9	0.6			
1	1	0	4	4	0	7.1	7.1	0.0128	0.0135	0.0130	0.0126	<b>0.0130</b>	50.6
	2	0	9	9	0	15.9	15.9	134	124	130	126	<b>129</b>	51.6
	3	0	14	14	0	24.8	24.8	148	134	128	126	<b>134</b>	51.6
	4	0	19	19	0	33.6	33.6	148	143	143	148	<b>145</b>	52.2
	5	1	4	9	16.2	7.1	15.9	130	130	138	134	<b>132</b>	51.4
	6	2	4	14	32.4	7.1	24.8	138	122	126	126	<b>128</b>	52.4
	7	3	4	19	48.6	7.1	33.6	160	155	174	160	<b>164</b>	53.6
2	1	0	4	4	0	7.1	7.1	138	130	126	136	<b>132</b>	51.0
	2	0	9	9	0	15.5	15.9	130	124	124	128	<b>127</b>	51.4
	3	0	14	14	0	24.8	24.8	148	138	126	126	<b>136</b>	51.8
	4	0	19	19	0	33.6	33.6	138	138	130	124	<b>132</b>	52.0
	5	1	4	9	16.2	7.1	15.9	115	118	116	122	<b>118</b>	51.4
	6	2	4	14	32.4	7.1	24.8	148	148	126	123	<b>134</b>	52.4
	7	3	4	19	48.6	7.1	33.6	150	157	136	130	<b>142</b>	53.4
3	1	0	4	4	0	7.1	7.1	126	130	138	142	<b>136</b>	51.0
	2	0	9	9	0	15.9	15.9	128	130	130	138	<b>132</b>	51.4
	3	0	14	14	0	24.8	24.8	123	123	129	129	<b>127</b>	51.6
	4	0	19	19	0	33.6	33.6	148	144	135	130	<b>137</b>	52.4
	5	1	4	9	16.2	7.1	15.9	130	130	130	138	<b>134</b>	51.4
	6	2	4	14	32.4	7.1	24.8	148	138	130	138	<b>139</b>	52.6
	7	3	4	19	48.6	7.1	33.6	130	155	142	138	<b>141</b>	53.4



第 3 図 (a)

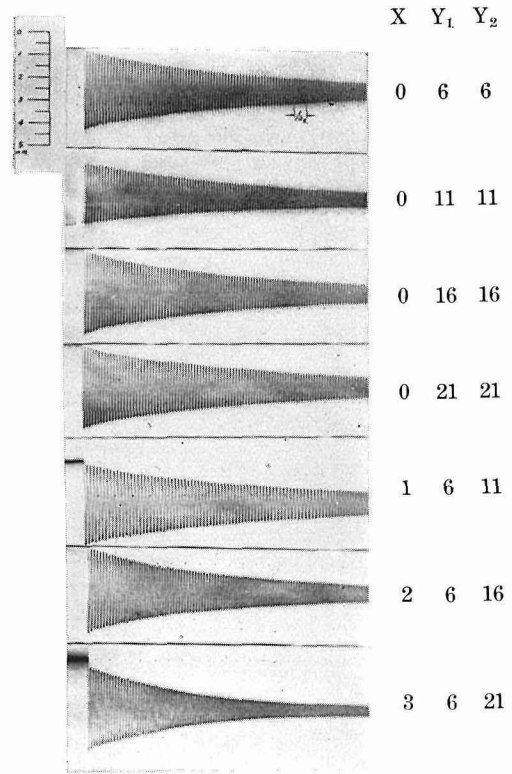


第 3 図 (b)



第 4 図

油焼入炭素工具鋼 (第3回)



第 5 図

炭素工具鋼 (第3回)

第3表 炭素工具鋼

実験 順序 (R)	処 理 (T)						対 数 減 衰 率 $\delta$					振動数  f c/s	
	X	mm		$\sigma_X$	kg/mm <sup>2</sup>		振 巾 mm						
		Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>		$\tau_{Y_1}$	$\tau_{Y_2}$	1.5	1.2	0.9	0.6	1.6~0.5 平均		
1	1	0	6	6	0	10.6	10.6	0.0127	0.0126	0.0120	0.0118	<b>0.0122</b>	50.4
	2	0	11	11	0	19.5	19.5	122	120	116	115	<b>117</b>	50.4
	3	0	16	16	0	28.3	28.3	115	112	115	115	<b>114</b>	51.6
	4	0	21	21	0	37.2	37.2	109	105	109	104	<b>106</b>	51.6
	5	1	6	11	16.2	10.6	19.2	130	114	111	106	<b>112</b>	51.6
	6	2	6	16	32.4	10.6	28.3	160	160	148	132	<b>144</b>	52.4
	7	3	6	21	48.6	10.6	37.2	231	230	230	210	<b>226</b>	53.4
2	1	0	6	6	0	10.6	10.6	160	165	150	130	<b>141</b>	50.2
	2	0	11	11	0	19.5	19.5	171	150	134	130	<b>141</b>	50.4
	3	0	16	16	0	28.3	28.3	186	156	143	131	<b>146</b>	51.0
	4	0	21	21	0	37.2	37.2	160	148	139	118	<b>134</b>	51.6
	5	1	6	11	16.2	10.6	19.5	165	144	138	118	<b>134</b>	51.2
	6	2	6	16	32.4	10.6	28.3	208	189	160	134	<b>157</b>	52.2
	7	3	6	21	48.6	10.6	37.2	231	239	248	235	<b>239</b>	53.2
3	1	0	6	6	0	10.6	10.6	189	166	158	149	<b>160</b>	50.2
	2	0	11	11	0	19.5	19.5	180	154	143	138	<b>149</b>	50.8
	3	0	16	16	0	28.3	28.3	173	160	148	138	<b>151</b>	51.2
	4	0	21	21	0	37.2	37.2	170	152	140	120	<b>142</b>	51.4
	5	1	6	11	16.2	10.6	19.5	181	160	144	128	<b>145</b>	51.2
	6	2	6	16	32.4	10.6	28.3	207	189	166	141	<b>161</b>	52.2
	7	3	6	21	48.6	10.6	37.2	260	230	253	260	<b>253</b>	53.4

これからの計算は、振巾 1.6~0.5 mm の平均対数減衰率  $\delta$  について行う。

先づ油焼入した炭素工具鋼製板ばねに対する分散分析表<sup>6)</sup>は第4表の通りである。

第4表

要因	SS	自由度	MS	F	判定
R	0.000001220	2	0.000000610	1.24	
T	8996	6	1499	3.04	*
E	5907	12	492		
計	0.000016123	20			

ここで、R、Tは第2、3表における実験順序、処理を表わす。Eは、上記2要因以外の凡てのファクターを含み誤差として評価される。又、\*印は危険率5%以下で要因として有意であると言うことを示す。

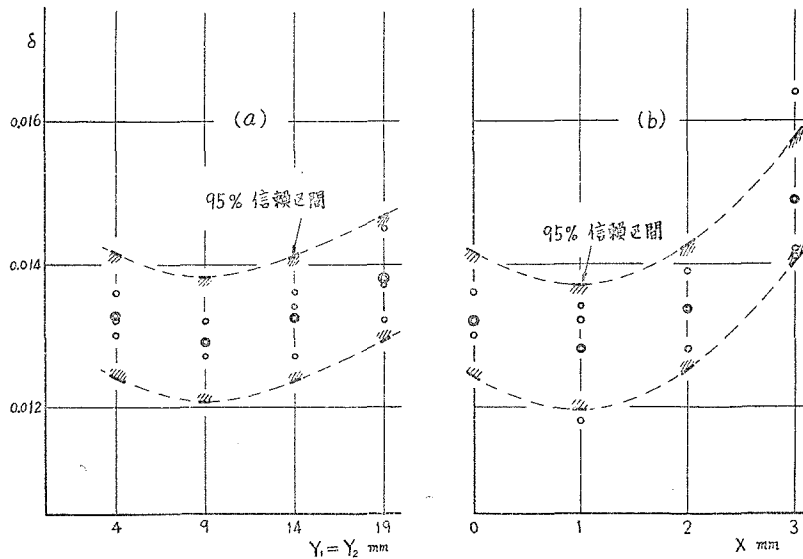
実験誤差の標準偏差  $\sigma$  の推定値  $\hat{\sigma}$  は

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{0.000005907}{12}} = 0.000702$$

板ばね，巻ばねの撓みに基く減衰の大きさの変動が可成りあることになったので，更にこの処理と対数減衰率との関係を求めなければならない．推定値は算術平均により求まるが，果してこれらの推定値と真の値との喰違いはどの程度かを知る必要がある．95%の確率で真の値の存在する区間即ち95%信頼区間を求めると良い．それは推定値を中心として上下に次の値の中をもたしたもとなる．即ち

$$\begin{aligned} \pm \frac{t_{0.05}(12)}{\sqrt{NR}} \hat{\sigma} &= \pm \frac{2.18}{\sqrt{3}} \times 0.000702 \\ &= \pm 0.000885 \end{aligned}$$

これらの推定値，信頼区間及び実験値を図示したのが第6図(a)，(b)である．



第 6 図

次に炭素工具鋼の実験結果第3表の分散分析表を求めれば，第5表の様になる．

第 5 表

要因	SS	自由度	MS	F	判定
R	0.000036172	2	0.000018086	81.1	**
T	279651	6	46608	209.0	**
E	2675	12	223		
計	318498	20			

ここで \*\* の印は危険率 1% 以下で有意であることを示す．

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{0.000002675}{12}} = 0.000473$$

2 要因共著しく影響が出ているが、振動履歴 (R), ばねの撓み (T) と対数減衰率  $\delta$  との関係は、第7図、第8図 (a), (b) に示してある。图中 95% の信頼区間は次式より与えられる。

$$(R) \pm \frac{t_{0.05}(12)}{\sqrt{NR}} \hat{\sigma} = \pm \frac{2.18}{\sqrt{7}} \times 0.000473$$

$$= \pm 0.000390$$

$$(T) \pm \frac{t_{0.05}(12)}{\sqrt{NR}} \hat{\sigma} = \pm \frac{2.18}{\sqrt{3}} \times 0.000473$$

$$= \pm 0.000596$$

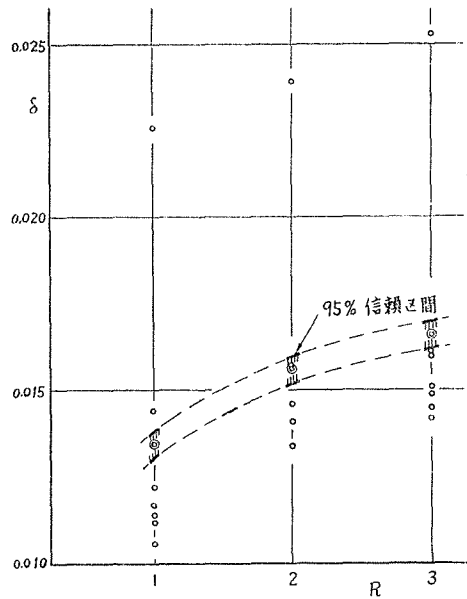
以上で大雑把な判断は下せたのであるが、研究の目的である、板ばねの撓みによる振動減衰の差について、これから計算を進める。

今

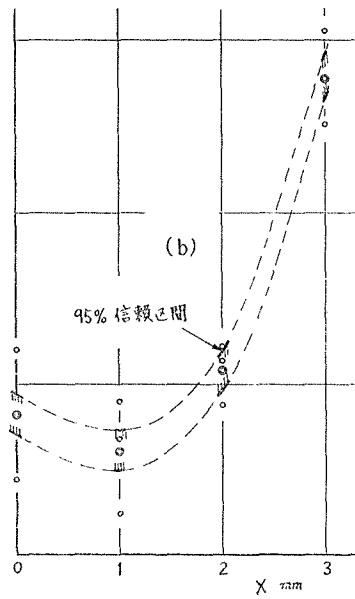
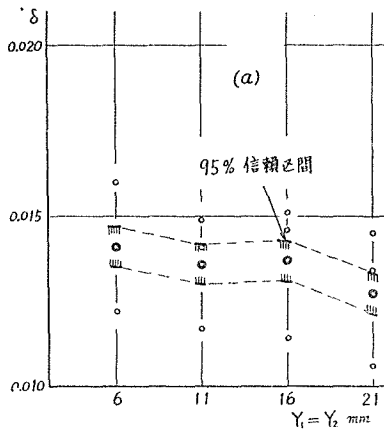
$$\bar{x}_1 = \frac{1}{6}(T_1 + T_2), \quad \bar{y}_1 = \frac{1}{3}T_5$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{6}(T_1 + T_3), \quad \bar{y}_2 = \frac{1}{3}T_6$$

$$\bar{x}_3 = \frac{1}{6}(T_1 + T_4), \quad \bar{y}_3 = \frac{1}{3}T_7$$



第 7 図



第 8 図

とおく。ここで  $T_i$  とは処理の種類の中  $i$  番目のものについての実験値の総和であり、このときは夫々 3 ケの和となる。要するに  $\bar{x}_i - \bar{y}_i$  の推定値と信頼区間、この値に有意性があるか、と言うことを見出さなければならない。

先づ、2つの平均値の比較をする上で、差の有意性検定を行うと

$$t_i = (\bar{x}_i - \bar{y}_i) \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \bigg/ \sqrt{\frac{w^2}{m+n-2}}$$

とおいて、この場合には

$$|t_i| > 2.37 \quad \text{ならば 5\% 以下で有意}$$

$$|t_i| > 3.52 \quad \text{ならば 1\% 以下で有意}$$

となる。ここで

$$m = \bar{x}_i \text{ の実験数} = 6$$

$$n = \bar{y}_i \text{ の実験数} = 3$$

$$w^2 = (m-1)\hat{\sigma}^2 + (n-1)\hat{\sigma}^2 = 7\hat{\sigma}^2$$

油焼入炭素工具鋼製板ばねのときは

$$\hat{\sigma} = 0.000702$$

であるから、第 6 表の様にも最も撓ました時に初めて差を認めうる程度である。

第 6 表

$i$	$\bar{x}_i - \bar{y}_i$	$ t_i $	判定
1	-0.000300	0.60	
2	0.000117	0.24	
3	0.001366	2.95	*

一方、炭素工具鋼では

$$\hat{\sigma} = 0.000473$$

を代入して、第 7 表の通り板ばねの撓み  $X = 1 \text{ mm}$  の場合から差を認めうる。

次に信頼区間の推定は

第 7 表

$i$	$\bar{x}_i - \bar{y}_i$	$ t_i $	判定
1	-0.000801	2.40	*
2	0.001500	4.48	**
3	0.010516	31.45	**

$$\theta_i = (\bar{x}_i - \bar{y}_i) \pm \lambda \sqrt{\frac{w^2}{m+n}} \bigg/ \sqrt{\frac{mn}{m+n}}$$

より求められるが、危険率 5% のときは

$$\lambda = 2.37$$

であるから

$$\theta_i = (\bar{x}_i - \bar{y}_i) \pm 0.00118 \quad (\text{焼入炭素工具鋼})$$

$$\pm 0.00079 \quad (\text{炭素工具鋼})$$

これらの値を図示すれば第 9 図の様になる。

## 5 考 察

実験結果について

### A. 二本の板ばねの比較

1) 誤差変動の差が可成り違い、後に行つた炭素工具鋼の方が良い。これは、前半の実験に於ては他の要因、特に蔓巻ばねの伸ばし方の不足から横振動が表われ、これが蔓巻ばねの縦振動にも影響するし、減衰の方にも影響を与えている。この現象は、 $T_1$ 、 $T_7$  の振動実験列において特に発生している様に思われる。そこで、後半の実験では全般的に蔓巻ばねの伸びを更に 2mm 宛増加させたので、この影響による誤差変動が減少したと考えられる。

更に変化を与えたものは板ばねの固定であるが、この点については今後定量的に測定した上でなければ推量も不可能である。

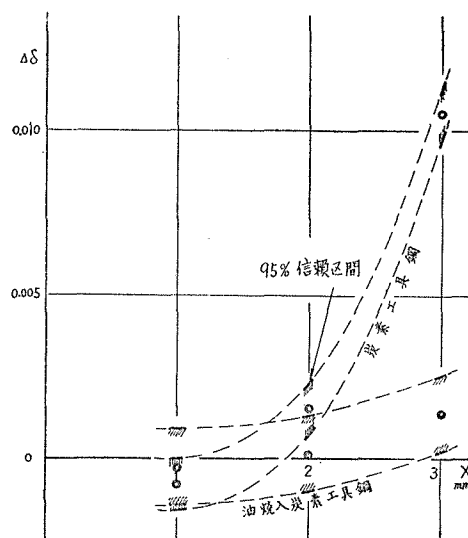
その他には、実験の具体的変化を与えなかつたが、熟練等も幾分加味されているかも知れない。

2) 減衰曲線の形状の違いも表われた。勿論板ばね材料の弾性限の相違も原因であろうが、1) におけると同様に、蔓巻ばねの伸び不足により密着スプリングであるための Coulomb 減衰も附加されて振巾の大小に関せず殆んど一定の対数減衰率を生じたのではないかと思う。炭素工具鋼では振巾の増大と共に可成り対数減衰率の増大を見た。

3) 振動履歴による差異。今回の実験では、実験順序の影響は前半では余り表われず、後半で明瞭に表われている。これは、データを取る前に装置の調整等で、油焼入をした板ばねに大凡 5000 サイクルの振動を与えてあるため、減衰の傾向が定常的になつた<sup>5)</sup>のに反し、無処理の板ばね材料の方は、試片製作後振動履歴なしで直ちに実験に入つたので過渡的な現象を生じたものと思う。然しながら、一般に振動履歴により減衰が減少して定常状態になるものと予想していたにも拘らず、結果からは全く逆の傾向を見せられ、今後各種材料についても系統的に研究する必要がある。

### B. 振動数の変化

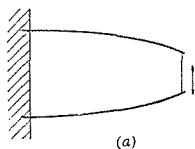
振動数は、ばねを伸ばしたり撓ませたりすることにより可成り増大しているが、これは全く実験装置の欠陥と言える。即ち第3図で示されている様に蔓巻ばねの固定は4ヶ所共凡て板で止められて居るので、板にかかる力が大きくなると伸び率が減少し、全体の系としてのばね常



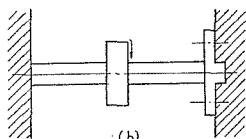
第 9 図

数が高まる傾向をもつ。又板ばねの撓みは蔓巻ばねを幾分こちる形となり、振動数に影響する。然し、振動数の変化は予め想定していなかつたため、振動数と減衰との関係について追及し得なかつた。今後は、この点を考えて実験を進めて行くつもりである。

更に実験の方法については、この様な装置以外にも種々考えられようが、今2つの方法について本実験装置と比較しよう。



(a)



(b)

第 10 図

A. 撓み振動減衰では、第 10 図 (a) の様に 2 本の板ばねを同一材料、同一寸法にして一端を細線で引張り（この引張力で撓みを与える）自由振動を与える。工作上、2 本の板ばねは同一振動数にはならないから、振動を加える初期条件が面倒になり、同一位相になる様な始動装置を必要とする。この始動が成功すれば、今回の装置より遙かに有効であろう。

B. 振り振動では比較的容易に、初期応力を与えた自由振動が実現される。第 10 図 (b) はその略図であり、これから求まる減衰と撓み振動減衰との関係が明瞭になれば、推論も可能となる。

第 10 図 (b) において右側で振り（初期応力）を与え、中央の銜は、振動を始めるための爪等を装置するために設けてある。

又、実験の計画についても、推計学の知識を深め誤差の少ない実験に進めたいと思つている。今回の分析において各実験値に対する標準偏差を同等としてあるが、この点も十分検討の要があるう。

## 6 結 言

工具のびびり振動の抑制は、殆んど工具の振動減衰に依存されている訳であるから、これを出来る丈大きくすることが機械工作上緊要なことであるが、最近まで現場では種々勘等に基いた考案がなされていても、これの理論的解明は二三<sup>7)</sup>を数えるのみである。

工作機械の高速化、重切削の傾向により、工具刃先は超硬質合金を用いねばならないとしても、工具の柄の部分には、弾性係数が高く且つ減衰能力の大きいものを用いる事により、可成りの抑制をなしうるものと考え、第一着手として工具材料の固有の減衰を求めることを目的とした。

今回の実験結果からも推量される様に

- (1) 撓みを大きくすることにより、振動数の低下を見ることなく、減衰をさせうること。
- (2) 以前の振動履歴により減衰能力が変化すること。
- (3) 材質による変化も皆無とは言えないこと。

等は明瞭である。殊に (2)、(3) については、各種の材料について実験を進め、バイトの処理の適正化、材質の選定に指向を与えたいと思う。

内面削りをする時に生ずる振り振動, 撓み振動は工具の突出しを短くして振動数を高めることが空間的に制約されるため, 殊に振り振動減衰も研究して行かなければならない。

今回の実験研究にあたり, 御批判を下さつた久野教授, 並びに実験装置製作から実験に協力し且つ各種の助言を与えて下さつた工作実験室栃内信男氏に深く感謝します。

## 文 献

- (1) 妹沢, 久保: 棒の屈曲振動による固体粘性の測定, 応用物理, **30**, No. 3.
- (2) Föppl und Schaaf: Die Werkstoffdämpfung bei Dreh- und Biegeschwingsbeanspruchung, Forschungsarbeiten auf die Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 335, **30**; Föppl: The Damping Capacity of Metals, especially Steels, Journal of Iron & Steel Institute, **36**.
- (3) Zener: Internal Friction in Solids, The Proceedings of the Physical Society, **40**, No. 289, pp. 152.
- (4) 星野: 前歴効果がない場合のバイトの振動 第1,2報, 北大工報告, No. 10, 11, **54**.
- (5) Föppl: The Damping Capacity of Metals, especially Steels-Discussion, Journal of Iron & Steel Institute, **36**, p. 430, 433.
- (6) 実験計画法, 分散分析法に関しては次の文献を参照.  
河田, 丸山: 数理統計; 増山: 実験計画法大要.  
Cockran & Cox: Experimental Design; 田口: 推計学による寿命実験と推定法.
- (7) 土井: 工作機械の振動, 第1章第5節.  
Hahn: Design of Lanchester Damper for Elimination of Metal-Cutting Chatter, Trans. A. S.M.E. Vol. 73 p. 331~335, **51**.