任意の三角形又は四辺形断面を持つ棒の捩りについての一解法（第1報）

半　沢　　宏

（昭和30年3月3日　受理）

One Method of Solution of Torsion of the Straight Bars Having Any Triangular and Quadrilateral Cross-Sections

(1 st Report)

Hiroshi HANZAWA

Abstract

In the torsion problems of the straight bars having the cross-sections of the rectilinear polygons, the exact solutions have been obtained only for few particular cases, such as the equilateral polygns, the rectangles and the right-angled triangles.

In this report, one method of solution of torsion for any triangles are obtained. Using the stress functions in rectangular coordinates and expanding them in double Fourier's series, the boundary conditions are satisfied. I intend to develop this method of solution to the cases of the bars having any quadrilateral cross-sections.

緒　　言

直線軸を有する棒の捩りの問題は古くから多くの人々によつて理論的及び実験的に研究されている．理論的解法としては，捩り函数（ϕ）及びその共軛数（ψ）又は応力函数（F）等を断面の形状に応じて適当にとり，座標も直角或いは極座標以外に直交曲線座標等を採用して解かれている．又個々の断面形によつてその手段を区別する不便を除くための試みもある[1)]．然し何れの場合にもその正解が得られているのは限定された形状の断面についてであり，如何なる断面についても一般に用いられる様な解法ではない．断面境界が不連続な線から成る場合には 2, 3 の特例[2)]を除いては正解を得ることが仲々困難で種々の近似解法が行われている．

本論に於ては任意の三角形断面を有する棒の捩りの解法を示し，更に任意の四辺形断面の場合えの展開を試みたい．此の種問題の解法としての一示唆ともなれば幸いである．

1 基　礎　式

捩りを受ける棒る横断面内に直角座標軸 x, y をとり，応力函数として $F_{(x,y)}$〔以後 F と略記

する〕をとればこの函数 F は断面境界内に於て

$$\varDelta F=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=-2G\theta \tag{1-1}$$

但し　$G=$ 剛性率

$\theta=$ 単位長さの捩れ角

を満足し，且つ断面周辺上で

$$dF=0$$

即ち周辺上で F は常数でなければならない．この常数は多連結断面ではその周辺毎に値を異にするが，本報で考える様な単一連結断面では0とすることが出来るから，結局周辺上では

$$F=0 \tag{1-2}$$

とならねばならぬ．

この2条件を満足する応力函数 F が求められたとすれば断面内の任意の点の剪断応力 τ_x 及び τ_y は

$$\tau_x=\frac{\partial F}{\partial x},\qquad \tau_y=\frac{\partial F}{\partial y} \tag{1-3}$$

で与えられ，合成捩り応力 τ は

$$\tau=\sqrt{\tau_x{}^2+\tau_y{}^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}, \tag{1-4}$$

捩りモーメント M は

$$M=2\iint F\,dx\,dy \tag{1-5}$$

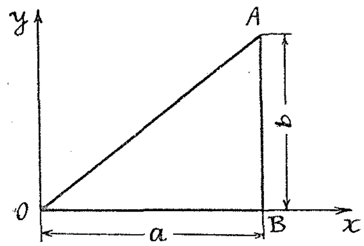
で与えられる，但しこの積分は断面全域について行う．

2　直角三角形断面の場合

三角形断面を有する棒の場合は，正三角形又は直角二等辺三角形については既に正解が得られて居るが，任意の三角形断面の場合については未だ正解が無い様である．直角三角形及び二等辺三角形断面については近藤政市及び石橋正両氏の論文[2)]があり級数展開によつて解いて居られるが，周辺に於ける条件を満足すべき応力函数の求め方に於て本報と少しく異なるので，任意の三角形及び四辺形断面に対する解法を論ずる便宜上本節及び次節に於て先づ直角及び二等辺三角形断面を取扱い本解法の基礎を示したい．前述の正三角形及び直角二等辺三角形断面を有する場合は本論の特別の場合として包含されることは論を俟たない．

座標軸を第1図の如くとり断面は 0AB で表わされるとする．この周辺を形成する三直線の方程式は

$$\left.\begin{aligned} & y=0,\ \ x=a,\ \ y=\lambda x \\ & 但し\quad \lambda=\frac{b}{a} \end{aligned}\right\} \tag{2-1}$$



第 1 図

今（1–1）式の特別解を次の様に選ぶ．

$$F_0 = G\theta y(\lambda x - y) \tag{2-2}$$

この F_0 は明らかに（1–1）を満足する．然し周辺に於ては

$$(F_0)_{y=0}=0,\qquad (F_0)_{y=\lambda x}=0$$

であるが，$x=a$ に於ては0とならない．そこで今1つの函数即ち（1–1）式の右辺を0とした

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=0 \tag{2-3}$$

の一般解を考え，これを F_1 とし次の様にとる．

$$F_1 = G\theta\cdot a^2\sum_{m=1}^{\infty}\left[A_m\frac{\sinh\frac{m\pi y}{a}}{\sinh m\pi\lambda}\sin\frac{m\pi x}{a}+B_m\frac{\sinh\frac{m\pi x}{b}}{\sinh\frac{m\pi}{\lambda}}\sin\frac{m\pi y}{b}\right] \tag{2-4}$$

$$但し\qquad m=1,2,3,\cdots\cdot$$

A_m, B_m は周辺の条件によつて決定される未知係数である．(2–4) は (2–3) の解であることは容易に証明出来る．従つて周辺の条件は

$$(F_0+F_1)_{y=0}=0 \tag{2-5}$$

$$(F_0+F_1)_{y=\lambda x}=0 \tag{2-6}$$

$$(F_0+F_1)_{x=a}=0 \tag{2-7}$$

となりこれを満足する様に A_m, B_m が決定されればよいことになる．F_0 及び F_1 は $y=0$ で 0となり（2–5）の条件を満足する．$y=\lambda x$ に於ては（F_0）は0となるが F_1 は

$$F_1 = G\theta\cdot a^2\sum_{m=1}^{\infty}\left[A_m\frac{\sinh\frac{m\pi\lambda x}{a}}{\sinh m\pi\lambda}\sin\frac{m\pi x}{a}+B_m\frac{\sinh\frac{m\pi x}{\lambda a}}{\sinh\frac{m\pi}{\lambda}}\sin\frac{m\pi x}{a}\right] \tag{2-8}$$

次に $x=a$ に於ける条件式（2–6）を導けば次の様になる．

$$y(b-y)+a^2\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin\frac{m\pi y}{b}=0 \tag{2-9}$$

玆で $y(b-y)$ を Fourier's series に展開して書直せば

$$\frac{4b^2}{\pi^3}\sum_m \frac{1-\cos m\pi}{m^3}\sin\frac{m\pi y}{b}+a^2\sum_m B_m \sin\frac{m\pi y}{b}=0$$

$$\therefore \quad B_m=-\frac{4\lambda^2}{\pi^3}\frac{1-\cos m\pi}{m^3} \tag{2-10}$$

従つて B_m は決定出来るが，残る問題は (2-8) が 0 となる様に A_m が決定出来ればよい．即ち

$$\sum_m\left[A_m\frac{\sinh\frac{m\pi\lambda x}{a}}{\sinh m\pi\lambda}\sin\frac{m\pi x}{a}+B_m\frac{\sinh\frac{m\pi x}{\lambda a}}{\sinh\frac{m\pi}{\lambda}}\sin\frac{m\pi x}{a}\right]=0 \tag{2-11}$$

今直二等辺三角形の場合即ち $a=b$, $\lambda=1$ の場合は簡単に

$$A_m+B_m=0$$

従つて

$$\left.\begin{aligned} A_m&=\frac{4}{\pi^3}\frac{1-\cos m\pi}{m^3}\\ B_m&=-\frac{4}{\pi^3}\frac{1-\cos m\pi}{m^3}\end{aligned}\right\} \tag{2-12}$$

となるから

$$\left.\begin{aligned} F_0&=G\theta\cdot y(x-y)\\ F_1&=\frac{4G\theta a^2}{\pi^3}\sum_m\frac{1-\cos m\pi}{m^3\sinh m\pi}\left[\sinh\frac{m\pi y}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}-\sinh\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{a}\right]\end{aligned}\right\} \tag{2-13}$$

$\lambda=1$ の場合は以上の様に容易に求められるが，$\lambda\neq 1$ の場合には (2-11) を変形して

$$\sinh\frac{m\pi\lambda x}{a}\quad 及び \quad \sinh\frac{m\pi x}{\lambda a}$$

を Fourier's series に展開する．即ち

$$\left.\begin{aligned} \sinh\frac{m\pi\lambda x}{a}&=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sinh m\pi\lambda\cdot\cos n\pi}{\lambda^2m^2+n^2}\sin\frac{n\pi x}{a}\\ \sinh\frac{m\pi x}{\lambda a}&=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot\sinh\frac{m\pi}{\lambda}\cos n\pi}{\lambda^{-2}m^2+n^2}\sin\frac{n\pi x}{a}\end{aligned}\right\} \tag{2-14}$$

従つて (2-11) は次の様に書換えられる．

$$-\frac{2}{\pi}\sum_m\sum_n\left(\frac{A_m}{\lambda^2 m^2+n^2}+\frac{B_m}{\lambda^{-2}m^2+n^2}\right)\cdot n\cdot\cos n\pi\cdot\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}=0 \quad (2\text{–}15)$$

又

$$\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{(m-n)\pi x}{a}-\cos\frac{(m+n)\pi x}{a}\right]$$

であるから (2–10) の B_m を上式に代入することにより

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_m\sum_n\left\{A_m\alpha_1(m,n)-\beta_1(m,n)\right\}\left\{\cos\frac{(m-n)\pi x}{a}-\cos\frac{(m+n)\pi x}{a}\right\}=0\\
&\alpha_1(m,n)=\frac{n\cos n\pi}{\lambda^2 m^2+n^2}\\
&\beta_1(m,n)=\frac{4\lambda^2}{\pi^3}\cdot\frac{(1-\cos m\pi)\,n\cdot\cos n\pi}{m^3(\lambda^{-2}m^2+n^2)}
\end{aligned}\right\}(2\text{–}16)$$

今計算を簡単にするため A_m を次の様におく.

$$A_m=\frac{4\lambda^2}{\pi^3}C_m \quad (2\text{–}17)$$

従つて

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_m\sum_n\left\{c_m\alpha(m,n)-\beta(m,n)\right\}\left\{\cos\frac{(m-n)\pi x}{a}-\cos\frac{(m+n)\pi x}{a}\right\}=0\\
&a(m,n)=\frac{n\cos n\pi}{\lambda^2 m^2+n^2}\\
&\beta(m,n)=\frac{(1-\cos m\pi)\,n\cdot\cos n\pi}{m^3(\lambda^{-2}m^2+n^2)}
\end{aligned}\right\}(2\text{–}18)$$

これを展開すると const の項及び cosine の項とに整理出来るから，その総和が 0 となるためには各項の係数が 0 となる必要がある．従つて $C_1, C_2, \cdots\cdot$ を含む n ケの聯立方程式を得るからこれを解けば C_m が求められる．結局 $\lambda\fallingdotseq 1$ のときは応力函数 F は次の様になる.

$$F=G\theta\cdot y(\lambda x-y)+\frac{4G\theta\cdot b^2}{\pi^3}\sum_m\left\{C_m\frac{\sinh\frac{m\pi y}{a}}{\sinh m\pi\lambda}\sin\frac{m\pi x}{a}-\frac{1-\cos m\pi}{m^3}\frac{\sinh\frac{m\pi x}{b}}{\sinh\frac{m\pi}{\lambda}}\sin\frac{m\pi y}{b}\right\}(2\text{–}19)$$

次にこの応力函数により剪断応力及び捩りモーメントを求めてみる.

(i) 直角二等辺三角形 ($\lambda=1$) の場合

$$
\left.
\begin{aligned}
\tau_x &= -\frac{\partial F}{\partial x} = -G\theta a\Biggl\{\frac{y}{a} \\
&\quad + \frac{4}{\pi^2}\sum_m \frac{1-\cos m\pi}{m^2 \sinh m\pi}\left[\sinh\frac{m\pi y}{a}\cos\frac{m\pi x}{a} - \cosh\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{a}\right]\Biggr\} \\
\tau &= \frac{\partial F}{\partial y} = G\theta a\Biggl\{\frac{x-2y}{a} \\
&\quad + \frac{4}{\pi^2}\sum_m \frac{1-\cos m\pi}{m^2 \sinh m\pi}\left[\cosh\frac{m\pi y}{a}\sin\frac{m\pi x}{a} - \sinh\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{a}\right]\Biggr\}
\end{aligned}
\right\}\quad (2\text{-}20)
$$

$$
\begin{aligned}
M &= 2\iint F\,dx\,dy \\
&= \frac{G\theta a^4}{12} + \frac{8G\theta a^4}{\pi^5}\sum_m \frac{(1-\cos m\pi)(\cos m\pi - \cosh m\pi)}{m^5 \sinh m\pi} \\
&= G\theta a^4\left\{\frac{1}{12} + \frac{8}{\pi^5}\sum_\infty \left(1-\frac{\cos m\pi}{\cosh m\pi}\right)\frac{1-\cos m\pi}{m^5 \tanh m\pi}\right\} \qquad (2\text{-}21)
\end{aligned}
$$

(ii)′ 一般の直角形（$\lambda \neq 1$）の場合

$$
\left.
\begin{aligned}
\tau_x &= -G\theta b\Biggl\{\lambda\frac{y}{b} + \frac{4}{\pi^2}\sum_m\Biggl[C_m \frac{m\lambda}{\sinh m\pi\lambda}\sinh\frac{m\pi y}{a}\cos\frac{m\pi x}{a} \\
&\qquad - \frac{1-\cos m\pi}{m^2 \sinh\dfrac{m\pi}{\lambda}}\cosh\frac{m\pi x}{b}\sin\frac{m\pi y}{b}\Biggr]\Biggr\} \\
\tau_y &= G\theta b\Biggl\{\frac{\lambda x - 2y}{b} + \frac{4}{\pi^2}\sum_m\Biggl[C_m \frac{m\lambda}{\sinh m\pi\lambda}\cosh\frac{m\pi y}{a}\sin\frac{m\pi x}{a} \\
&\qquad - \frac{1-\cos m\pi}{m^2 \sinh\dfrac{m\pi}{\lambda}}\sinh\frac{m\pi x}{b}\cos\frac{m\pi y}{b}\Biggr]\Biggr\}
\end{aligned}
\right\}\quad (2\text{-}22)
$$

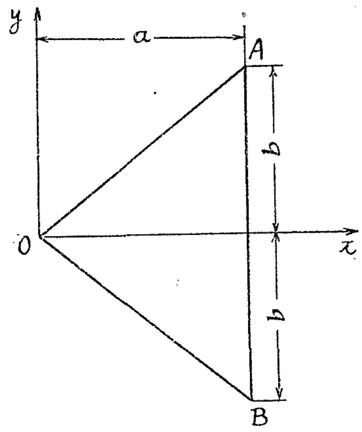
$$
\begin{aligned}
M &= \frac{G\theta a b^3}{12} \\
&\quad + \frac{8}{\pi^5}G\theta a^2 b^2 \sum_m \Biggl\{\frac{C_m}{m^2 \sinh m\pi\lambda}\cdot\frac{(1-\cosh m\pi\lambda)\{\cos m\pi + \lambda^2(\cos m\pi - 1)}{1+\lambda^2} \\
&\qquad - \frac{\lambda^2(1-\cos m\pi)}{m^5 \sinh\dfrac{m\pi}{\lambda}}\cdot\frac{\cosh\dfrac{m\pi}{\lambda}(\cos m\pi - 1) + \lambda^2\left(1-\cosh\dfrac{m\pi}{\lambda}\right)}{1+\lambda^2}\Biggr\} \qquad (2\text{-}23)
\end{aligned}
$$

3 二等辺三角形断面の場合

この場合は第2図の如く座標軸をとり，断面は 0AB で表わされるとする．この断面を形成す

る直線の方程式は

$$\left.\begin{array}{l} y=+\lambda x,\ \ y=-\lambda x,\ \ x=a \\ \text{但し}\qquad \lambda=\dfrac{b}{a} \end{array}\right\} \tag{3-1}$$



第 2 図

前節の方針に従い応力函数を次の様に選ぶ．即ち

$$F_0 = G\theta x(a-x) \tag{3-2}$$

$$\left.\begin{array}{l} F_1 = G\theta a^2 \displaystyle\sum_m A_m \frac{\cosh \dfrac{m\pi y}{a}}{\cosh m\pi\lambda} \sin \frac{m\pi x}{a} \\ \text{但し}\qquad m=1,2,3,\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{3-3}$$

而して周辺の条件はこの場合

$$(F_0+F_1)_{x=a}=0 \tag{3-4}$$

$$(F_0+F_1)_{y=\lambda x}=0 \tag{3-5}$$

$$(F_0+F_1)_{y=-\lambda x}=0 \tag{3-6}$$

F_0 及び F_1 は夫々（1-1）及び（2-3）の解であることは明らかであり，$x=a$ に於ては共に 0 となるから（3-4）は満足する．従つて $y=\pm\lambda x$ に於て（3-5），（3-6）を満足する様に A_m が決定出来ればよい．

$y=\pm\lambda x$　に於て

$$F_1 = G\theta a^2 \sum_m A_m \frac{\cosh \dfrac{m\pi\lambda x}{a}}{\cosh m\pi\lambda} \sin \frac{m\pi x}{a} \tag{3-7}$$

然るに $\cosh \dfrac{m\pi\lambda x}{a}$ を $\sin \dfrac{n\pi x}{a}$ の Fourier's series に展開すると

$$\left.\begin{array}{l} \cosh \dfrac{m\pi\lambda x}{a} = -\dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_n \frac{n\cosh m\pi\lambda\cdot\cos n\pi - n}{m^2\lambda^2+n^2} \sin \frac{n\pi x}{a} \\ \text{但し}\qquad m \text{ の各値に対して } n \text{ は } 1,2,3,\cdots\cdots \text{ をとる.} \end{array}\right\} \tag{3-8}$$

従つて

$$F_1 = -\frac{2G\theta a^2}{\pi} \sum_m \sum_n A_m \frac{n\cosh m\pi\lambda\cdot\cos n\pi - n}{(m^2\lambda^2+n^2)\cosh m\pi\lambda} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \tag{3-9}$$

次に　$x(a-x) = \dfrac{4a^2}{\pi^3} \displaystyle\sum_m \frac{1-\cos m\pi}{\pi^3} \sin \frac{m\pi x}{a}$　と書けるから

$$F_0 = \frac{4a^2 G\theta}{\pi^3} \sum_m \frac{1-\cos m\pi}{m^3} \sin \frac{m\pi x}{a} \tag{3-10}$$

更に

$$1=\frac{2}{\pi}\sum_{n}\frac{1-\cos n\pi}{n}\sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$n=1,2,3,\cdots\cdot$$

であるから (3-10) の各 m の値に対して n を夫々 $1,2,3,\cdots\cdot$ と変化させるものとせば

$$F_0=\frac{8G\theta a^2}{\pi^4}\sum_{m}\sum_{n}\frac{(1-\cos m\pi)(1-\cos n\pi)}{m^3 n}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x}{a} \tag{3-11}$$

故に $y=\pm\lambda x$ に於て $F=F_0+F_1=0$ の条件式を導けば (3-9) 及び (3-11) より

$$\sum_{m}\sum_{n}\left\{\frac{4}{\pi^3}\frac{(1-\cos m\pi)(1-\cos n\pi)}{m^3 n}\right.$$
$$\left.-A_m\frac{n\cosh m\pi\lambda\cos n\pi-n}{(m^2\lambda^2+n^2)\cosh m\pi\lambda}\right\}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}=0 \tag{3-12}$$

茲で簡単のため次の様におく.

$$\left.\begin{aligned}\alpha(m,n)&=\frac{n\cdot\cos n\pi}{m^2\lambda^2+n^2}-\frac{n}{(m^2\lambda^2+n_2)\cosh m\pi\lambda}\\ \beta(m,n)&=\frac{4}{\pi^3}\frac{(1-\cos m\pi)(1-\cos n\pi)}{m^3 n}\end{aligned}\right\} \tag{3-13}$$

従つて $$\sum_{m}\sum_{n}\Big\{A_m\alpha(m,n)-\beta(m,n)\Big\}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}=0$$

更に $$\sum_{m}\sum_{n}\left\{\begin{aligned}&+[A_m\alpha(m,n)-\beta(m,n)]\cos\frac{(m-n)\pi x}{a}\\ &-[A_m\alpha_1(m,n)-\beta(m,n)]\cos\frac{(m+n)\pi x}{a}\end{aligned}\right\}=0 \tag{3-15}$$

又は $$\sum_{m}\sum_{n}\Big[A_m\alpha(m,n)-\beta(m,n)\Big]\Big[\cos\frac{(m-n)\pi x}{a}-\cos\frac{(m+n)\pi x}{a}\Big]=0 \tag{3-16}$$

結局 (2-18) 式と同様の式が得られるから前節と同様にして係数 A_m が求められる.

これによつて剪断応力及び捩りモーメントを求めれば

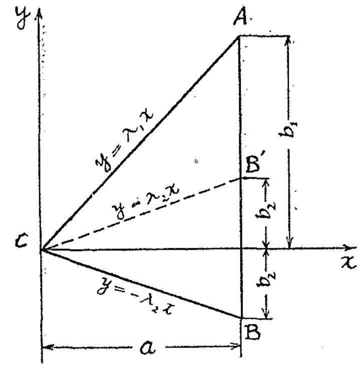
$$\left.\begin{aligned}\tau_x&=-G\theta a\left\{\left(1-2\frac{x}{a}\right)+\pi\sum_{m}\frac{mA_m}{\cosh m\pi\lambda}\cosh\frac{m\pi y}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\right\}\\ \tau_y&=G\theta a\pi\sum_{m}\frac{mA_m}{\cosh m\pi\lambda}\sinh\frac{m\pi y}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\end{aligned}\right\} \tag{3-17}$$

$$M = G\theta a^4 \left\{ \frac{\lambda}{3} - \frac{4}{(1+\lambda^2)\pi^2} \sum_m A_m \frac{\tanh m\pi\lambda \cdot \cos m\pi}{m^2} \right\} \tag{3-18}$$

4　任意の三角形断面の場合

第3図の如く座標軸をとり断面は OAB 若しくは OAB′ で表わされるとすると，断面の周辺を形成する直線の方程式は

$$\left.\begin{aligned} & y = \lambda_1 x, \quad y = \pm \lambda_2 x, \quad x = a \\ & \text{但し} \qquad \lambda_1 = \frac{b_1}{a}, \\ & \qquad\qquad \lambda_2 = \frac{b_2}{a}, \\ & \qquad\qquad b_1 > b_2 \end{aligned}\right\} \tag{4-1}$$



第 3 図

この場合 F_0 及び F_1 は次の様にとる．

$$F_0 = G\theta x(a-x) \tag{4-2}$$

$$F_1 = G\theta a^2 \sum_m \left\{ \frac{A_m}{\sinh m\pi\lambda_1} \sinh \frac{m\pi y}{a} + \frac{B_m}{\cosh m\pi\lambda_1} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \tag{4-3}$$

この F_0 及び F_1 は夫々 (1-1) 及び (2-3) の解であることは明らかであるが，周辺に於ては次の如くなる．

$y = \lambda_1 x$　に於て

$$F_0 = G\theta a^2 \frac{4}{\pi^3} \sum_m \frac{1-\cos m\pi}{m^3} \sin \frac{m\pi x}{a} \tag{4-4}$$

$$\begin{aligned} (F_1)_{\lambda_1 x} = G\theta a^2 \sum_m \Bigg\{ & \frac{A_m}{\sinh m\pi\lambda_1} \sinh \frac{m\pi\lambda_1 x}{a} \\ & + \frac{B_m}{\cosh m\pi\lambda_1} \cosh \frac{m\pi\lambda_1 x}{a} \Bigg\} \sin \frac{m\pi x}{a} \end{aligned} \tag{4-5}$$

$y = \pm \lambda_2 x$　に於て

$$F_0 = G\theta a^2 \frac{4}{\pi^3} \sum_m \frac{1-\cos m\pi}{m^3} \sin \frac{m\pi x}{a} \tag{4-6}$$

$$\begin{aligned} (F_1)_{\pm\lambda_2 x} = G\theta a^2 \sum_m \Bigg\{ & \pm \frac{A_m}{\sinh m\pi\lambda_1} \sinh \frac{m\pi\lambda_2 x}{a} \\ & + \frac{B_m}{\cosh m\pi\lambda_1} \cosh \frac{m\pi\lambda_2 x}{a} \Bigg\} \sin \frac{m\pi x}{a} \end{aligned} \tag{4-7}$$

(4–4) 又は (4–6) を前節と同様に書き換えて

$$F_0 = G\theta a^2 \frac{8}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{(1-\cos m\pi)(1-\cos n\pi)}{m^3 n} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi x}{a} \tag{4–8}$$

更に (4–5) 及び (4–7) を書換えて

$$(F_1)_{\lambda_1 x} = -G\theta a^2 \frac{2}{\pi} \sum_m \sum_n \left\{ A_m \frac{n\cos n\pi}{\lambda_1{}^2 m^2 + n^2} + B_m \left(\frac{n\cos n\pi}{\lambda_1{}^2 m^2 + n^2} - \frac{n\cdot\cosh^{-1} m\pi\lambda_1}{\lambda_1{}^2 m^2 + n^2} \right) \right\} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi x}{a} \tag{4–9}$$

$$(F_1)_{\pm\lambda_2 x} = -G\theta a^2 \cdot \frac{2}{\pi} \sum_m \sum_n \left\{ \pm A_m \frac{\sinh m\pi\lambda_2}{\sinh m\pi\lambda_1} \cdot \frac{n\cos n\pi}{\lambda_2{}^2 m^2 + n^2} + B_m \left(\frac{\cosh m\pi\lambda_2}{\cosh m\pi\lambda_1} \cdot \frac{n\cos n\pi}{\lambda_2{}^2 m^2 + n^2} - \frac{n\cdot\cosh^{-1} m\pi\lambda_1}{\lambda_2{}^2 m^2 + n^2} \right) \right\} \sin\frac{mn\pi}{a} \sin\frac{n\pi x}{a} \tag{4–10}$$

故に周辺に於て $F=0$ の条件を求めると, $y=\lambda_1 x$ に於ては (4–8) 及び (4–9) より

$$-\sum_m \sum_n \left\{ A_m \frac{n\cos n\pi}{\lambda_1{}^2 m^2 + n^2} + B_m \frac{n\cosh^{-1} m\pi\lambda_1}{\lambda_1{}^2 m^2 + n^2} \right\} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi x}{a} + \frac{4}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{(1-\cos m\pi)(1-\cos n\pi)}{m^3 n} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi x}{a} = 0$$

書き直して

$$\sum_m \sum_n \left\{ A_m \alpha_1(m,n) + B_m \beta_1(m,n) - \gamma(m,n) \right\} \left\{ \cos\frac{(m-n)\pi x}{a} \cos\frac{(m+n)\pi x}{a} \right\} = 0 \tag{4–11}$$

但し

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1(m,n) &= \frac{n\cos n\pi}{\lambda_1{}^2 m^2 + n^2} \\ \beta_1(m,n) &= \frac{n\cos n\pi}{\lambda_1{}^2 m^2 + n^2} - \frac{n\cosh^{-1} m\pi\lambda_1}{\lambda_1{}^2 m^2 + n^2} \\ \gamma(m,n) &= \frac{4}{\pi^3} \frac{(1-\cos m\pi)(1-\cos n\pi)}{m^3 n} \end{aligned} \right\} \tag{4–12}$$

$y=\pm\lambda_2 x$ に於ては (4–8) 及び (4–10) より

$$-\sum_m \sum_n \left\{ \pm A_m \frac{\sinh m\pi\lambda_2}{\sinh m\pi\lambda_1} \cdot \frac{n\cos n\pi}{\lambda_2{}^2 m^2 + n^2} + B_m \left(\frac{\cosh m\pi\lambda_2}{\cosh m\pi\lambda_1} \cdot \frac{n\cos n\pi}{\lambda_2{}^2 m^2 + n^2} - \frac{n\cosh^{-1} m\pi\lambda_1}{\lambda_2{}^2 m^2 + n^2} \right) \right\} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi x}{a} + \frac{4}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{(1-\cos m\pi)(1-\cos n\pi)}{m^3 n} \sin\frac{mn\pi}{a} \sin\frac{n\pi x}{a} = 0$$

書き直して

$$\sum_m \sum_n \left\{\pm A_m \alpha_2(m,n) + B_m \beta_2(m,n) - \gamma(m,x)\right\}\left\{\cos\frac{(m-n)\pi x}{a} - \cos\frac{(m+n)\pi x}{a}\right\} = 0 \qquad (4\text{-}13)$$

但し

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2(m,n) &= \frac{\sinh m\pi\lambda_2}{\sinh m\pi\lambda_1}\cdot\frac{n\cos n\pi}{\lambda_2{}^2 m^2+n^2} \\ \beta_2(m,n) &= \frac{\cosh m\pi\lambda_2}{\cosh m\pi\lambda_1}\cdot\frac{n\cos n\pi}{\lambda_2{}^2 m^2+n^2} - \frac{n\cosh^{-1} m\pi\lambda_1}{\lambda_2{}^2 m^2+n^2} \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}14)$$

故に (4–11) 及び (4–13) の聯立方程式を解けば未知係数 A_m 及び B_m が決定されるから，剪断応力及び捩りモーメントは前述の式より簡単に求まる．

結局手数はかかるが任意の三角形断面についても本解法により解くことが出来る．

結　　言

以上本報では直線状周辺を有する断面の棒の中，三角形断面のものにつき級数展開によつて解を求める方法を述べた．この級数は収斂性が比較的良いから次報以後にその数値計算結果並びに四辺形断面えの展開について報告したい．なお，この様な断面に対して実験を行い従来与えられている結果と比較するがそれについては次の機会にゆづる．

終りに終始御指導頂いた藤井教授に感謝の意を表する．

文　　献

1) Stevenson が提案した複素座標による解法もその一つである．倉西正嗣：弾性学 153 頁参照．
2) 石橋　正：機械学会誌，34 巻 176 号．
津村利光：　同　上　36 巻 196 号．
近藤政市：　同　上　36 巻 194 号．
大久保　肇：機械学会論文集，16 巻 55 号．
等が直線縁を有する断面についての代表的のものであろう．