



Title	導波管内に誘導体を挿入した場合の伝播定数の近似解について
Author(s)	上村, 正雄; Kamimura, Masao
Citation	北海道大學工學部研究報告, 12, 107-115
Issue Date	1955-06-15
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/40564">https://hdl.handle.net/2115/40564</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	12_107-116.pdf



# 導波管内に誘電体を挿入した場合の伝播定数の近似解について

上 村 正 雄  
(昭和 30 年 2 月 28 日 受理)

## Approximate Solutions of Propagation Constant in Composite Guide

Masao KAMIMURA

### Abstract

Let us consider the case of a rectangular waveguide with dielectric slabs parallel or perpendicular to  $E$ , and only the rectangular waveguide in the lowest  $H$ -mode.

Equation that determines the propagation constant is a transcendental equation and it is difficult to solve generally.

Author find that the equation can be solved in the method of a successive approximation.

For a particular case, the slab of dielectric of thickness  $h$  is placed in the edge or the center section of the rectangular guide, the result are shown in Fig 7 and Fig 8, for the values  $\epsilon_2' = 10 \tan \delta = 0.01$ , and at the same time the approximate solutions which is introduced from the other method are shown in this paper.

### 緒 言

導波管内に誘電体が図の如く挿入された場合は、伝播定数を決定する関係式は超越方程式となり、一般に解くのは困難である事はよく知られている<sup>1)</sup>。この近似解として逐次近似法により求めた結果を報告する。

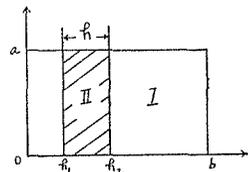
## 1 誘電体が電界に平行に挿入された場合

### (a) 超越方程式

第1図の如く厚さ  $h$  なる誘電体が、電界に平行に挿入された場合、界は  $H$  型ベクトルポテンシアルの成分より導かれる。

境界条件より、伝播定数を決定する関係式は、

$$\frac{1}{q_1 q_2} [\tan q_1 (b - h_2) + \tan q_1 h_1] + \tan q_2 (h_2 - h_1) \left[ \frac{1}{q_2^2} - \frac{1}{q_1^2} \tan q_1 h_1 \tan q_1 (b - h_2) \right] = 0 \quad (1)$$



第 1 図

$$q_1 = (K_1^2 - \Gamma^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$q_2 = (K_2^2 - \Gamma^2)^{\frac{1}{2}}$$

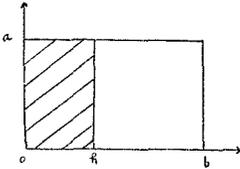
$$\Gamma = \beta + j\alpha$$

$$K_1^2 = K^2 \varepsilon_1, \quad K_2^2 = K^2 \varepsilon_2, \quad K^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$$

として与えられる。

第2図の如く、 $h_1=0$ ,  $h_2=h$  とすると、(1)式は

$$\frac{\tan q_1(b-h)}{q_1} + \frac{\tan q_2 h}{q_2} = 0 \quad (2)$$



第 2 図

となる。又第3図の如く、中心に對称に挿入した場合は、

$$h_1 = \frac{b-h}{2}, \quad h_2 = \frac{b+h}{2}$$

なる故、(1)式は次の如くなる。

$$\frac{\tan \frac{(b-h)}{2} q_1}{q_1} - \frac{\cot \frac{h}{2} q_2}{q_2} = 0 \quad (3)$$

### (b) 近似式

上記の関係式は何んらの近似なく成立するが、伝播定数は一般に複素数であるから、これらの関係式を数値解法に於いても解くのは容易でない。誘電体が、第2図、第3図の如く挿入された場合について近似解を求めているが、第1図の如く、一般の場合についても、関係式がより複雑となるだけである。

領域1を空気として、 $\varepsilon_1=1$ 、領域2を誘電体として、 $\varepsilon_2=\varepsilon_2'(1-j\tan\delta)$

$$k_1^2 = K^2, \quad k_2^2 = K^2 \varepsilon_2'$$

とする。位相定数  $\beta$  と減衰定数  $\alpha$  との間で、普通成立する条件、 $\beta \gg \alpha$  を考慮して、 $q_1, q_2$  の近似値として、次の如く

$$\left. \begin{aligned} q_1 &\doteq (k_1^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} - j \frac{\alpha\beta}{(k_1^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \\ q_2 &\doteq (k_2^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} - j \frac{2\alpha\beta + k_2^2 \tan\delta}{2(k_2^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

展開する。(4)式を(2)及び(3)式に適用して、実数部と虚数部に分離し、 $\alpha$ の2次以上の項を省略するならば、(2)式より

$$\frac{\tan \{(b-h)\varphi\}}{\varphi} + \frac{\tan h\theta}{\theta} = 0 \quad (5)$$

$$\alpha = -\frac{B_1 k_2^2 \tan \delta}{2\beta[A_1 + B_1]} \quad (6)$$

が得られ、又(3)式よりは

$$\frac{1}{\varphi} \tan \frac{b-h}{2}\varphi - \frac{1}{\theta} \tan h\theta = 0 \quad (7)$$

$$\alpha = -\frac{B_2 k_2^2 \tan \delta}{2\beta[A_2 + B_2]} \quad (8)$$

が得られる。

$$\varphi = (k_1^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta = (k_2^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$A_1 = \theta^3 [\tan (b-h)\varphi - (b-h)\varphi \{1 + \tan^2 (b-h)\varphi\}]$$

$$B_1 = \varphi^3 [\tan (h\theta) - h\theta \{1 + \tan^2 (h\theta)\}]$$

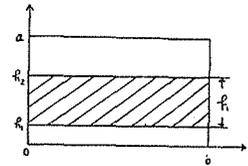
$$A_2 = \theta^2 \tan^2 \frac{h\theta}{2} \left[ \frac{b-h}{2} \left\{ 1 + \tan^2 \frac{b-h}{2}\varphi \right\} - \frac{1}{\varphi} \tan \frac{b-h}{2} \right]$$

$$B_2 = \varphi^2 \left[ \frac{1}{\theta} \tan \frac{h\theta}{2} + \frac{h}{2} \left\{ 1 + \tan^2 \frac{h\theta}{2} \right\} \right]$$

## 2 誘電体が電界に垂直に挿入された場合

### (a) 超越方程式

第4図の如く誘電体が挿入された場合は、界はE型ベクトルポテンシャルのx成分より導かれる。伝播定数を決定する関係式は、境界面上に於ける一組の接線成分の連続性より、次の如く与えられる。



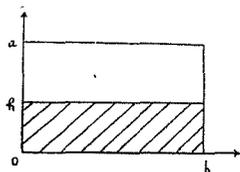
第4図

$$\frac{p_1 p_2}{\epsilon_1 \epsilon_2} [\tan p_1(a-h_2) + \tan p_1 h_1]$$

$$+ \tan S_2(h_2-h_1) \left[ \frac{p_2^2}{\epsilon_2^2} - \frac{p_1^2}{\epsilon_1^2} \tan p_1 h_1 \tan p_1(a-h_2) \right] = 0 \quad (9)$$

$$p_1 = \left[ K_1^2 - \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 - \Gamma^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$p_2 = \left[ K_2^2 - \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 - \Gamma^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$



第 5 図

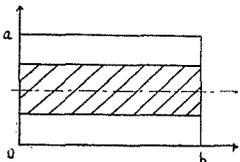
第5図の如くに挿入された場合は(9)式は次の如く簡単になる。

$$\frac{p_1}{\varepsilon_1} \tan p_1(a-h) + \frac{p_2}{\varepsilon_2} \tan p_2 h = 0 \quad (10)$$

又第6図の如く中心に對称に挿入された場合は

$$\frac{p_1}{\varepsilon_1} \tan p_1 \frac{a-h}{2} + \frac{p_2}{\varepsilon_2} \tan p_1 \frac{h}{2} = 0 \quad (11)$$

となる。



第 6 図

(b) 近似式

電界に平行に挿入された場合と同様に、 $p_1, p_2$  を次の如く展開する。

$$\left. \begin{aligned} p_1 &\doteq \left\{ k_1^2 - \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 - \beta^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - j \frac{\alpha \beta}{\left\{ k_1^2 - \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 - \beta^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \\ p_2 &\doteq \left\{ k_2^2 - \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 - \beta^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - j \frac{(2\alpha\beta + k_2^2 \tan \delta)}{2 \left\{ k_2^2 - \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 - \beta^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

この  $p_1, p_2$  を(10)及び(11)式に代入して、平行に挿入された場合と同様に、 $\alpha$  の2次以上の項を省略すると(10)式よりは、

$$\varphi' \tan(a-h)\varphi' + \frac{\theta'}{\varepsilon_2'} \tan(h\theta') = 0 \quad (13)$$

$$\alpha = - \frac{k_2^2 B_1' - 2\theta' \tan(h\theta')}{2\beta[A_1' + B_1']} \tan \delta \quad (14)$$

が得られる。

又(11)式よりは、

$$\varphi' \tan \frac{a-h}{2} \varphi' + \frac{\theta'}{\varepsilon_2'} \tan \frac{h}{2} \theta' = 0 \quad (15)$$

$$\alpha = - \frac{k_2^2 B_2' - 2\theta' \tan \frac{h}{2} \theta'}{2\beta(A_2' + B_2')} \tan \delta \quad (16)$$

こゝで

$$\varphi' = \left\{ k_1^2 - \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 - \beta^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta' = \left\{ k_2^2 - \left( \frac{\pi}{b} \right) - \beta^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$A_1' = \varepsilon_2' \left[ (a-h) \tan^2 (a-h) \varphi' + \frac{1}{\varphi'} \tan (a-h) \varphi' + (a-h) \right]$$

$$B_1' = h \{ 1 + \tan^2 h\theta' \} + \frac{1}{\theta'} \tan (h\theta')$$

$$A_2' = \varepsilon_2' \left[ \frac{a-h}{2} \tan^2 \frac{a-h}{2} \varphi' + \frac{1}{\varphi'} \tan \frac{a-h}{2} \varphi' + \frac{a-h}{2} \right]$$

$$B_2' = \frac{1}{\theta_2'} \tan \frac{h}{2} \theta' + \frac{h}{2} \left\{ 1 + \tan^2 \frac{h}{2} \theta' \right\}$$

である。

### 3 逐次近似法

斯くの如く位相定数、減衰定数を決定する近似式もやはり超越方程式である。而し位相定数を決定する関係式は、 $x \tan x$ 、或は  $\frac{\tan x}{x}$  を含む形にて表す事が出来る。

例へば、 $(b-h)\varphi = x$ 、 $h\theta = y$  とおくときは、(5)式については

$$(b-h) \frac{\tan x}{x} + h \frac{\tan y}{y} = 0 \quad (17)$$

又(7)式については

$$\frac{b-h}{2} \cdot \frac{\tan \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} - \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{\frac{y}{2} \tan \frac{y}{2}} = 0 \quad (18)$$

にて表わされる。

(13) 及び (14) 式に於ても同様な表示をなし得る。この  $x \tan x$ 、 $\frac{\tan x}{x}$  の値は、数表より簡単に求められる点に着目して、逐次近似法により位相定数を求め、これより減衰定数を決定して、伝播定数を決定する。

今誘電体を挿入しない場合を考えると、基本波に対しては、 $\varphi = \frac{\pi}{b}$ 、 $\varphi' = 0$  で、位相定数は

$$\beta_{10} = \left\{ k_1^2 - \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

である。又導波管内を誘電体で完全に満たした場合は、 $\theta = \frac{\pi}{b}$ 、 $\theta' = 0$  で位相定数  $\beta_{20}$  は、

$$\beta_{20} = \left\{ k_2^2 - \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

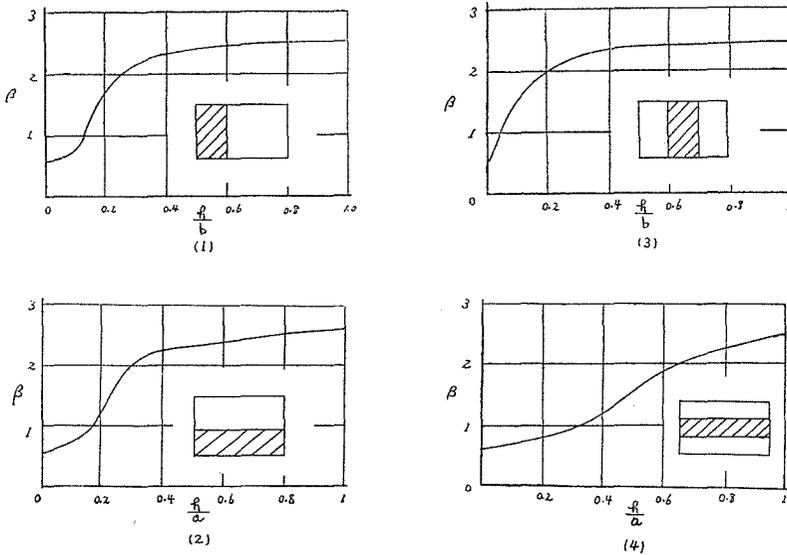
である。誘電体の挿入する厚さが、 $0 < h < b$ の間では位相定数は、 $\beta_{10} < \beta < \beta_{20}$  であると考えられる。位相定数  $\beta$  は、 $h$  が極めて小なる範囲では直線

$$\beta_0 = \left[ \left\{ k_2^2 - \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - \left\{ k_1^2 - \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \frac{h}{b} + \left\{ k_1^2 - \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

に沿つて増加し、それより急激に直線  $\beta_0$  を離れて増加して飽和状態となり、 $h$  の増加と共に、 $\left\{ k_2^2 - \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$  に近づく。

計算に当つては、位相定数の第零次近似値として  $\beta_0$  をとり、これより  $\varphi$  或は  $\theta$  のいずれかの第零次近似値を求めて関係式に適用して、逐次近似を行うのである。

この場合  $\varphi$  は常に虚数となるが、 $\varphi$  は  $h$  が極めて小なる場合は、実数であり  $h$  がすこし大きくなると虚数になる。従つて  $\varphi$  の実虚に注意して関係式を適用しなければならない。



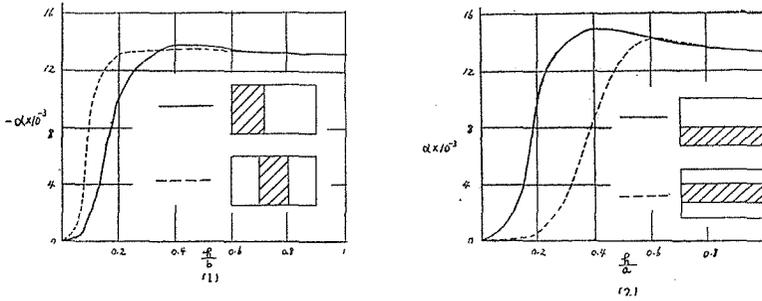
第7図 逐次近似法による位相定数 ( $\epsilon_2' = 10, \tan \delta = 10^{-2}$ )

斯くの如くして、逐次近似を行つて求めた場合の一例を第7図に示してある。

これらの図に見られる様に、位相定数は誘電体が挿入された場合、 $h$  の小なる間は傾斜はゆるやかで直線  $\beta_0$  に沿つて増加している。又  $\varphi$  の実数の範囲もこの部分に属する。

それより  $h$  のわずかの増加で位相定数は急激に立上つて飽和点に達している。この傾向は  $\epsilon$  が大なる程著しく、立上り点も  $h$  の小なる方向に移動している。又誘電体の挿入方法が異つても大体同様な傾向を示している。

第7図に示す位相定数より、減衰定数を求めたものを第8図に示してある。此の場合も位相定

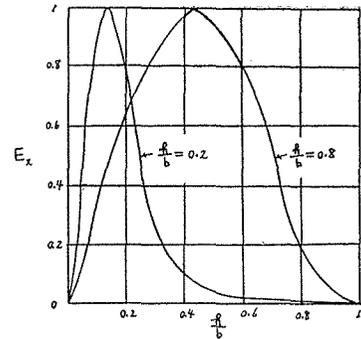


第8図 逐次近似法による減衰定数 ( $\epsilon_2' = 10, \tan \delta = 10^{-2}$ )

数と同様に誘電体が、僅か挿入されても減衰定数は急激に増加して、挿入される誘電体がある厚さの時に、ピーク値を示している。

この傾向は誘電体の挿入方法及び  $\epsilon$  が異つても変わらない。

第9図は第2図の如くに誘電体を挿入した場合の電界分布であり、その大部分は誘電体に集中している。又第10図は各領域を伝送する、エネルギーを示している。伝送エネルギーの大部分は誘電体内を伝送している点からも、位相定数及び減衰定数の誘電体挿入による急激な増加を考える事が出来る。



第9図 誘電体を第2図の如く挿入した場合の電界分布

#### 4 超越方程式によらない近似解

超越方程式によらない近似解としては、変分法による解法<sup>2)</sup>を發表してあるが、こゝでは線型微分方程式の全体的近似を求める問題に帰着せしめて、位相定数を決定する事が出来る事を示そう。第2図の如く誘電体が挿入された場合についてのみ論ずるが、他の場合についても同様に考えられる。

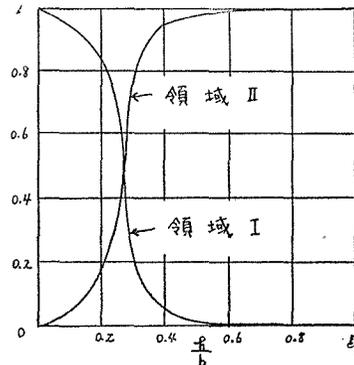
領域1及び2に於て電界  $E_x$  が満足さるべき関係式は

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + K^2(y) E_x = 0 \quad (20)$$

但し

$$K^2(y) = k_1^2 \{1 + g(y)\}$$

$$g(y) = \begin{cases} 0 & h > y > b \\ \frac{k_2^2}{k_1^2} - 1 & 0 > y > h \end{cases}$$



第10図 伝送エネルギー

である。

今  $E_x$  として

$$E_x = Y(y) e^{-j\Gamma z} \tag{21}$$

とおくと (20) 式は

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \{k_1^2 - \Gamma^2 + k_1^2 g(y)\} Y = 0 \tag{22}$$

となる。従つてこれを満足する解  $Y$  を求めれば良い事になる。

(22) 式を満足する函数として

$$Y = \sum_1^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi}{b} y \tag{23}$$

の如くおこなれば (21) 式は、 $y=0$  及び  $b$  に於て  $E_x=0$  となり境界条件を満足する。

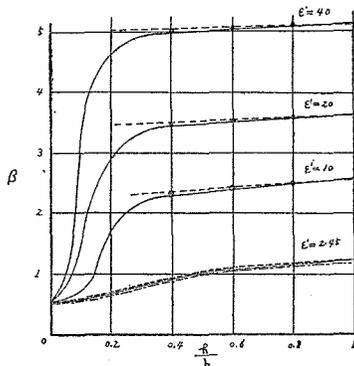
(i) 選 点 法

(23) 式に於て、 $\sum_1^{\infty}$  の代りに、 $\sum_1^n$  なる有限な値をとり、(22) 式に代入した時に得られる値を  $\varepsilon(y)$  とせば、これは微分方程式に誘導される誤差で、 $n$  が有限なる為を生ずるものである。従つて正確解の場合は  $\varepsilon(y)=0$  となる。領域内に適当に  $n$  箇の点を取り、その点に於て  $\varepsilon(y)=0$  になる如く伝播定数を定める方法を選点法と云う。

(ii) 平均値法

領域を適当に分け、各領域に於て前述の  $\varepsilon(y)$  が平均的に零になる如く即ち

$$\int_0^{y_1} \varepsilon(y) dy = \int_{y_1}^{y_2} \varepsilon(y) dy = \dots = \int_{y_{n-1}}^b \varepsilon(y) dy = 0$$



—— 数値解法  
 - - - 平均値法 ( $n=2$ )  
 - · - Galerkin 法 ( " )  
 ····· 選点法 ( " )

第 11 図 逐次近似法によらない位相定数の近似解

を満足する様に伝播定数を定める方法である。

(iii) Galerkin 法

(23) 式の展開に用いた函数と、 $\varepsilon(y)$  の積をとり、

$$\int_0^b \varepsilon(y) \sin \frac{n\pi}{b} y dy = 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

を満足する如く伝播定数を決定する方法である。

これらの方法は誘電体の境界面が明確でない場合に於ても、位相定数を決定する有力なる方法である。第 11 図に、 $n=2$  の場合を示してある。

## 5 結 言

逐次近似により求める場合、多くの計算例からも第2次近似値まで $\epsilon$ 、これらの近似式にて数値解法により求めた値と多くの場合よく一致する。而し $\epsilon$ が大となるに従い、位相定数の立上りが急になる為この急な僅かの部分では第三近似までとる必要がある。

本問題はフィードホーンの着雪の問題を解析するに当つて、導波管内に誘電体を挿入した場合の位相定数を知る必要があつたので求めたものであるが、この他にも減衰器、移相器、測定法等の参考になれば幸いである。

終りに、御指導を賜つた鈴木道雄助教授に感謝の意を表する次第である。

## 文 献

- 1) Marcuvitz: Waveguide Handbook, p. 389.
- 2) 浅見義弘・鈴木道雄・上村正雄: フィードホーンの着雪による反射, 電気通信学会誌, 昭 29, 11.