矩形の板がその周辺に或荷重を受ける場合の一解法（第1報）

藤　井　忠　二
半　沢　　　宏

（昭和30年3月3日　受理）

Rectangular Plates under Several Concentrated Loads along their Opposite Sides
(1 st, Report)

Chuji FUJII
Hiroshi HANZAWA

Abstract

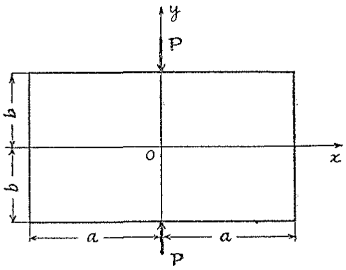
In the problems of the rectangular flat plate, it is often difficult to obtain the definite integration of the functions expanded in Fourier's series, so many approximate solutions have been calculated.

In this report, the authors wish to show the outline of one method of integration of those functions. We intend to apply this method to the problems of the rectangular plate under various conditions of loading.

緒　　言

矩形板がその周辺に於て或有様の荷重を受けて変形する場合の一解法を示す．本論では種々の荷重状態の場合について考えたいのであるが，先づ第1報として最も簡単な場合をとり集中荷重が相対する辺に対称的に作用する場合を考える．集中荷重が板の中央平面に，周辺に垂直に作用する場合等に於て屡々或函数を Fourier's series に展開する必要に迫られる．この際の定積分が簡単に求められぬため非常に手数のかかる近似解法が用いられるが，本論でもかかる場合が生ずるが著者はその積分の或る解式を示し他の種々の場合えの応用に寄与したいと思う．

1　相対する辺の中央に集中荷重が作用する場合



第 1 図

第1図の如く $2a$ 及び $2b$ の幅をもつ矩形板の周辺上 $x=0$, $y=\pm b$ に於て垂直に P なる集中荷重が作用する

場合を考える．この際次の如き函数をとつてみる．

$$\left.\begin{aligned} F_0 &= c\cdot\frac{x}{a}\left(\tan^{-1}\frac{b-y}{x}+\tan^{-1}\frac{b+y}{x}\right) \\ \text{但し}\quad c &= \frac{Pa}{\pi} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

この F_0 は明らかに次の微分方程式の解である．

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}=0 \tag{2}$$

偖て（1）より次の諸式を導く．

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_0}{\partial x} &= \frac{c}{a}\left\{\tan^{-1}\frac{b-y}{x}-\frac{x(b-y)}{x^2+(b-y)^2}+\tan^{-1}\frac{b+y}{x}-\frac{x(b+y)}{x^2+(b+y)^2}\right\} \\ \frac{\partial F_0}{\partial y} &= \frac{c}{a}\left\{-\frac{x^2}{x^2+(b-y)^2}+\frac{x^2}{x^2+(b+y)^2}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} &= -\frac{2c}{a^2}\left\{\frac{a(b-y)^3}{[x^2+(b-y)^2]^2}+\frac{a(b+y)^3}{[x^2+(b+y)^2]^2}\right\} \\ \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2} &= -\frac{2c}{a^2}\left\{\frac{ax^2(b-y)}{[x^2+(b-y)^2]^2}+\frac{ax^2(b+y)}{[x^2+(b+y)^2]^2}\right\} \\ \frac{\partial^2 F_0}{\partial x\partial y} &= -\frac{2c}{a^2}\left\{\frac{ax(b-y)^2}{[x^2+(b-y)^2]^2}-\frac{ax(b+y)^2}{[x^2+(b+y)^2]^2}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

（1）式は2つの式より成るがそれを　$F_0=F_{01}+F_{02}$　とすれば

$$F_{01}=c\frac{x}{a}\tan^{-1}\frac{b-y}{x}$$

$$F_{02}=c\frac{x}{a}\tan^{-1}\frac{b+y}{x}$$

でこの函数のもつ意義は

$$\left.\begin{aligned} y=\pm b\ \text{に於て},\qquad & F_{01}=0, & \sigma_y &= \frac{\partial^2 F_{01}}{\partial x^2}=0 \\ & \frac{\partial F_{01}}{\partial y}=-\frac{c}{a}, & \tau &= -\frac{\partial^2 F_{01}}{\partial x\partial y}=0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

これより函数 F_{01} は $y=+b$ の境界面の $x=0$ 点に P なる集中荷重を受ける半無限体の応力函数を与える．又 F_{02} については

$$
\left.\begin{array}{lll}
y=-b\ \text{に於て,} & F_{02}=0, & \sigma_y=\dfrac{\partial^2 F_{02}}{\partial x^2}=0 \\[2ex]
& \dfrac{\partial F_{02}}{\partial y}=\dfrac{c}{a}, & \tau=-\dfrac{\partial^2 F_{02}}{\partial x\,\partial y}=0
\end{array}\right\} \qquad (6)
$$

故に F_{02} は $y=-b$ の境界面の $x=0$ 点に P なる集中荷重を受ける半無限体の応力函数を与える.

次に（1）が周辺で如何なる値をとるか今後の論述に便ならしむるため一応記しておく.

$$
\left.\begin{array}{l}
x=\pm a,\ y=\pm b\ \ \text{で与えられる四隅に於て;} \\[1ex]
\qquad\qquad F_0=c\tan^{-1}\dfrac{2b}{a} \\[2ex]
x=\pm a\ \text{で;} \\[1ex]
\qquad F_0=c\left(\tan^{-1}\dfrac{b-y}{a}+\tan^{-1}\dfrac{b+y}{a}\right) \\[2ex]
\qquad \dfrac{\partial F_0}{\partial x}=\pm\dfrac{c}{a}\left\{\tan^{-1}\dfrac{b-y}{a}-\dfrac{a(b-y)}{a^2+(b-y)^2}+\tan^{-1}\dfrac{b+y}{a}-\dfrac{a(b+y)}{a^2+(b+y)^2}\right\} \\[2ex]
y=\pm b\ \text{で;} \\[1ex]
\qquad\qquad F_0=c\dfrac{x}{a}\tan^{-1}\dfrac{2b}{x} \\[2ex]
\qquad\qquad \dfrac{\partial F_0}{\partial y}=\mp\dfrac{c}{a}\left\{1-\dfrac{x^2}{x^2+4b^2}\right\}
\end{array}\right\} \qquad (7)
$$

更に（2）より補解として次の函数を選ぶ.

$$
\left.\begin{array}{l}
F_1=c\displaystyle\sum_n^{\infty}\left\{A_n^{\mathrm{I}}\left(\frac{\cosh\alpha y}{\cosh\alpha b}-\frac{y}{b}\frac{\sinh\alpha y}{\sinh\alpha b}\right)+B_n^{\mathrm{I}}\left(\frac{\cosh\alpha y}{\cosh\alpha b}+\frac{y}{b}\frac{\sinh\alpha y}{\sinh\alpha b}\right)\right\}\cos\alpha x \\[3ex]
\qquad +c\displaystyle\sum_n^{\infty}\left\{A_n^{\mathrm{II}}\left(\frac{\cosh\beta x}{\cosh\beta a}-\frac{x}{a}\frac{\sinh\beta x}{\sinh\beta a}\right)+B_n^{\mathrm{II}}\left(\frac{\cosh\beta x}{\cosh\beta a}+\frac{x}{a}\frac{\sinh\beta x}{\sinh\beta a}\right)\right\}\cos\beta y \\[3ex]
\qquad\qquad \text{但し}\qquad \alpha=\dfrac{n\pi}{2a},\qquad \beta=\dfrac{n\pi}{2b} \\[2ex]
\qquad\qquad\qquad n=1,3,5,\cdots\cdots
\end{array}\right\} \qquad (8)
$$

A_n^{I}, B_n^{I} 及び A_n^{II}, B_n^{II} は未知係数である. 更に（8）より

$$
\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial F_1}{\partial x}=-c\displaystyle\sum_n^{\infty}\alpha\left\{A_n^{\mathrm{I}}\left(\frac{\cosh\alpha y}{\cosh\alpha b}-\frac{y}{b}\frac{\sinh\alpha y}{\sinh\alpha b}\right)+B_n^{\mathrm{I}}\left(\frac{\cosh\alpha y}{\cosh\alpha b}+\frac{y}{b}\frac{\sinh\alpha y}{\sinh\alpha b}\right)\right\}\sin\alpha x \\[3ex]
\qquad +c\displaystyle\sum_n^{\infty}\beta\left\{A_n^{\mathrm{II}}\left(\frac{\sinh\beta x}{\cosh\beta a}-\frac{1}{a\beta}\frac{\sinh\beta x}{\sinh\beta a}-\frac{x}{a}\frac{\cosh\beta x}{\sinh\beta a}\right)\right. \\[3ex]
\qquad\qquad \left.+B_n^{\mathrm{II}}\left(\frac{\sinh\beta x}{\sinh\beta a}+\frac{1}{a\beta}\frac{\sinh\beta x}{\sinh\beta a}+\frac{x}{a}\frac{\cosh\beta x}{\cosh\beta a}\right)\right\}\cos\beta y
\end{array}\right\} \qquad (9)
$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial y} &= c\sum_n^{\infty}\alpha\left\{A_n^{\mathrm{I}}\left(\frac{\sinh\alpha y}{\cosh\alpha b}-\frac{1}{b\alpha}\frac{\sinh\alpha y}{\sinh\alpha b}-\frac{y}{b}\frac{\cosh\alpha y}{\sinh\alpha b}\right)\right.\\&\qquad\left.+B_n^{\mathrm{I}}\left(\frac{\sinh\alpha y}{\cosh\alpha b}+\frac{1}{b\alpha}\frac{\sinh\alpha y}{\sinh\alpha b}+\frac{y}{b}\frac{\cosh\alpha y}{\sinh\alpha b}\right)\right\}\cos\alpha x\\&\quad -c\sum_n^{\infty}\beta\left\{A_n^{\mathrm{II}}\left(\frac{\cosh\beta x}{\cosh\beta a}-\frac{x}{a}\frac{\sinh\beta x}{\sinh\beta a}\right)+B_n^{\mathrm{II}}\left(\frac{\cosh\beta x}{\cosh\beta a}+\frac{x}{a}\frac{\sinh\beta x}{\sinh\beta a}\right)\right\}\sin\beta y\end{aligned}\right\}$$

（8）及び（9）より

$$\left.\begin{aligned}&x=\pm a \text{ で;}\\&F_1 = 2c\sum_n^{\infty}B_n^{\mathrm{II}}\cos\beta y\\&\frac{\partial F_1}{\partial x} = \mp c\sum_n^{\infty}\alpha\cdot\sin\alpha a\left\{A_n^{\mathrm{I}}\left(\frac{\cosh\alpha y}{\cosh\alpha b}-\frac{y}{b}\frac{\sinh\alpha y}{\cosh\alpha b}\right)\right.\\&\qquad\left.+B_n^{\mathrm{I}}\left(\frac{\cosh\alpha y}{\cosh\alpha b}+\frac{y}{b}\frac{\sinh\alpha y}{\sinh\alpha b}\right)\right\}\\&\qquad\mp c\sum_n^{\infty}\beta\left\{A_n^{\mathrm{II}}\left(\tanh\beta a-\frac{1}{a\beta}-\tanh^{-1}\beta a\right)\right.\\&\qquad\left.+B_n^{\mathrm{II}}\left(\tanh\beta a+\frac{1}{a\beta}+\tanh^{-1}\beta a\right)\right\}\cos\beta y\\&y=\pm b \text{ で;}\\&F_1 = 2c\sum_n^{\infty}B_n^{\mathrm{I}}\cos\alpha x\\&\frac{\partial F_1}{\partial y} = \pm c\sum_n^{\infty}\alpha\left\{A_n^{\mathrm{I}}\left(\tanh\alpha b-\frac{1}{b\alpha}-\tanh^{-1}\alpha b\right)\right.\\&\qquad\left.+B_n^{\mathrm{I}}\left(\tanh\alpha b+\frac{1}{b\alpha}+\tanh^{-1}\alpha b\right)\right\}\cos\alpha x\\&\qquad\mp c\sum_n^{\infty}\beta\sin\beta b\left\{A_n^{\mathrm{II}}\left(\frac{\cosh\beta x}{\cosh\beta a}-\frac{x}{a}\frac{\sinh\beta x}{\sinh\beta a}\right)\right.\\&\qquad\left.+B_n^{\mathrm{II}}\left(\frac{\cosh\beta x}{\cosh\beta a}+\frac{x}{a}\frac{\sinh\beta x}{\sinh\beta a}\right)\right\}\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

F_1 は明らかに四隅で 0 となる．更にここで（2）の解として次の F_2 を選び収斂性をよくするために四隅で $F_0+F_2=0$ となる様にする．即ち

$$F_2 = c\cdot d\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right) \quad (11)$$

但し d は未知係数である．

今 (11) に $x=\pm a$, $y=\pm b$ を入れて四隅の F_2 を求めると,

$$F_2 = 2cd$$

$F_0+F_2=0$ は（7）を考えて,

$$c\tan^{-1}\frac{2b}{a}+2cd=0$$

即ち

$$d=-\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2b}{a} \tag{12}$$

次に (11) より次の計算を行つておく.

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}=2\frac{cd}{a}\cdot\frac{x}{a}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y}=2\frac{cd}{b}\cdot\frac{y}{b}$$

即ち $x=\pm a$ で;

$y=\pm b$ で;

$$\left.\begin{aligned} &F_2=cd\left(1+\frac{y^2}{b^2}\right)\\ &\frac{\partial F_2}{\partial x}=\pm 2\frac{cd}{a}\\ &F_2=cd\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)\\ &\frac{\partial F_2}{\partial y}=\pm 2\frac{cd}{b}\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

唯今の周辺の条件は $x=\pm a$ で $\sigma_x=\tau=0$ で $y=\pm b$ で $\sigma_y=\tau=0$ である. このことは周辺に於て $F=0$ で, $x=\pm a$ で $\partial F/\partial x=0$, $y=\pm b$ で $\partial F/\partial y=0$ となる様に $F=F_0+F_1+F_2$ が決定されればよい. 即ち（8）の F_1 中の未知係数 A_n^{I}, B_n^{I} 及び A_n^{II}, B_n^{II} を以上の諸条件を満足する様に決める問題となつてくる. 即ち次の条件式が導かれる.

$$\left.\begin{aligned} &(F_0+F_1+F_2)_{x=\pm a}=0\\ &(F_0+F_1+F_2)_{y=\pm b}=0\\ &\left(\frac{\partial F_0}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_{x=\pm a}=0\\ &\left(\frac{\partial F_0}{\partial y}+\frac{\partial F_1}{\partial y}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)_{y=\pm b}=0\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

(14) で示される周辺に於ける値は（7）, (10) 及び (13) に求めてあるから, これらの式を参照して (14) を書下せる. 幸い (14) の最初の2条件の内第1の条件式には未知係数 B_n^{II} だけ

を，第2の条件式には B_n^{I} だけを含むので先づこれらより B_n^{I} 及び B_n^{II} が決まる．従つて (14) の第 3，第4式は結局 A_n^{I} 及び A_n^{II} を求める条件式となる．然してこの際は荷重の有様が対称的であるので2つの条件式となる．例えば $x=+a,\ y=+b$ に於ける条件式を導けばよろしい．

然し，これらの条件式より係数を決めるにあたり，Fourier's series に展開する操作が普通には必要になつてくる．この際多少の書換えを行えば結局は分母及び分子共に rational function で，この函数に cosine 及び sine 函数を乗じたものの定積分の形となり，この積分が求まればよいのであるが簡単に求まらないので，従来近似的解法が非常な手数をかけて計算されている．若し斯かる積分が或形で求まるとすれば本論の場合に於ても係数を決定する手数は可成り要するが甚だ簡単になる．次節ではその大要を述べて解法の便としたい．

然して本論の主要な解法は唯今の場合これにとどめ次回の報告に述べる．

2　或積分について

前節に於て述べた様に本論の解法にあたり次の形の定積分が生ずる．

$$\int f(x)\begin{pmatrix}\cos\alpha x\\ \sin\alpha x\end{pmatrix}dx \tag{15}$$

ここに $f(x)$ は一般に $f_1(x)/f_2(x)$ の形をとり，$f_1(x)$，$f_2(x)$ ともに rational function である．然るとき (15) を次の様においてみる，

$$\int f(x)\begin{pmatrix}\cos\alpha x\\ \sin\alpha x\end{pmatrix}dx=\int d[\varphi_1(x)\cos\alpha x+\varphi_2(x)\sin\alpha x] \tag{16}$$

即ち

$$\int d\,[\varphi_1(x)\cos\alpha x+\varphi_2(x)\sin\alpha x]=\int\begin{bmatrix}\varphi_1{}'(x)\cos\alpha x-\alpha\varphi_1(x)\sin\alpha x\\ \alpha\varphi_2(x)\cos\alpha x+\varphi_2{}'(x)\sin\alpha x\end{bmatrix}dx$$

故に　(i) $\int f(x)\cos x\,dx$　の場合

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1{}'(x)+\alpha\varphi_2(x)&=f(x)\\ \varphi_2{}'(x)-\alpha\varphi_1(x)&=0\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

(ii) $\int f(x)\sin\alpha x\cdot dx$　の場合

$$\left.\begin{aligned}\varphi_2{}'(x)-\alpha\varphi_1(x)&=f(x)\\ \varphi_1{}'(x)+\alpha\varphi_2(x)&=0\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

以上の (17) 及び (18) を満足する如き φ_1 及び φ_2 が求まればよい．

（i）の場合：

(17) の第2式を微分すると，

$$\varphi_2''(x) - d\varphi_1'(x) = 0$$

この φ_1' を第1式に入れると．

$$\frac{1}{\alpha}\varphi_2''(x) + \alpha\varphi_2(x) = f(x) \tag{17a}$$

この式より $\varphi_2(x)$ が求まれば (17) の第2式より

$$\varphi_1(x) \fallingdotseq \frac{1}{\alpha}\varphi_2'(x) \tag{17b}$$

（ii）の場合：

(18) の第2式を微分すると

$$\varphi_1''(x) + \alpha\varphi_2'(x) = 0$$

この $\varphi_2'(x)$ を第1式に入れると

$$\frac{1}{\alpha}\varphi_1''(x) + \alpha\varphi_1(x) = -f(x) \tag{18a}$$

これより $\varphi_1(x)$ が求まれば (18) の第2式より

$$\varphi_2(x) = -\frac{1}{\alpha}\varphi_1'(x) \tag{18b}$$

(17a) 及び (18a) を解く場合には

$$f_2(x)\left[\frac{1}{\alpha}\varphi_2''(x) + \alpha\varphi_2(x)\right] = f_1(x) \tag{17c}$$

$$f_2(x)\left[\frac{1}{\alpha}\varphi_1''(x) + \alpha\varphi_1(x)\right] = -f_1(x) \tag{18c}$$

として $\varphi_1(x)$ 及び $\varphi_2(x)$ を次の如き級数で表わす．

$$\left.\begin{matrix}\varphi_1(x)\\ \varphi_2(x)\end{matrix}\right\} = c_0x^m + c_1x^{m\quad 1} + c_2x^{m\quad 2} + \cdots\cdot \tag{19}$$

然るときは $f_1(x)$ 及び $f_2(x)$ が rational function であるから級数の形で $\varphi_1(x)$ 及び $\varphi_2(x)$ が求まる．勿論この際その収斂性は確かめねばならない．斯くして $\varphi_1(x)$ 及び $\varphi_2(x)$ が決定されたとすれば (16) より

$$\int_{e_1}^{e_2} f(x)\begin{pmatrix}\cos\alpha x\\ \sin\alpha x\end{pmatrix}dx=\Big|\varphi_1(x)\cos\alpha x+\varphi_2(x)\sin\alpha x\Big|_{e_1}^{e_2}$$

但し e_1 及び e_2 は積分の下限及び上限とする.

偖て本節では解法の概要を述べたが更に本論を進めるにあたりその1例を示すつもりである.