HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	帯鋸の腰入. 第3報 : 更に帯鋸のねじれ挫屈について
Author(s)	久野, 陸夫; 土肥, 修
Citation	北海道大學工學部研究報告, 12, 1-10
Issue Date	1955-06-15
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40568
Type	departmental bulletin paper
File Information	12_1-10.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

帯鋸の腰入（第3報）

—更に帯鋸のねじれ挫屈について—

久野陸夫
土肥修

（昭和30年3月4日 受理）

Stretching for Band Saw Blade (III)

—Again on Buckling of Saw Blade—

Rokuo KUNO
Osamu DOI

Abstract

In previous report, we showed the buckling force of a saw blade was obtaind by solving the following differential equations with energy method using the first term of Fourier's series.

$$B_1\frac{d^2u}{dz^2}=\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2}-z\right)\cdot\beta+Q\cdot u-\beta M$$

$$C\frac{d\beta}{dz}=-\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2}-z\right)\frac{du}{dz}+\frac{P}{2}(\delta-u)+M\frac{du}{dz}$$

These notations are showed in Fig. 1.

Though the equation of condition thus obtained is brief, calculated value is smaller than the experimental value we gained. In order to calculate the buckling force more accurately, we try to get a new simple conditional equation of buckling, neglecting the rigidity of saw blade ($B_1=0$).

Our experments verify the critical value obtained from new equation is good approximation in spite of its brevity.

A new equation is as follows.

$$\frac{\sqrt{CQ}}{M-\frac{Pl}{4}}=\tanh^{-1}\frac{M-\frac{Pl}{4}}{\sqrt{CQ}}-\tanh^{-1}\frac{M}{\sqrt{CQ}}$$

where $C=\frac{1}{3}hb^3G$

b : thickness of saw blade
h : width of saw blade
l : distance between tow wheels
G : modulus of rigidity in shear

Q: pulling force of saw blade

P: critical horizontal cutting force (buckling force)

M: bending moment of saw blade at both ends

Moment M is determined by the back radius R of the blade, distance l between 2 wheels and inclination α of the upper wheel.

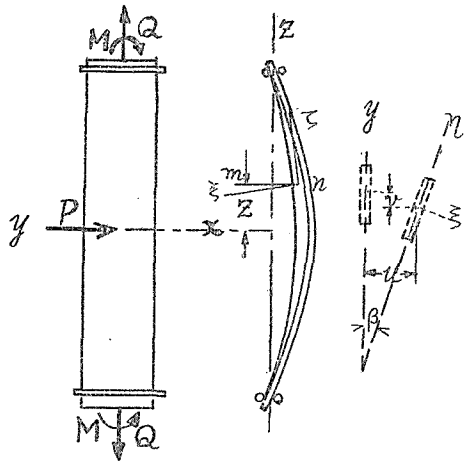
Concerning with each value of M, critical buckling force P is determined from the above eqution on account of the value Q.

目　　次

1. 緒　　言 …… 2
2. 計　　算 …… 4
3. 実　　験 …… 7
4. 結　　論 …… 10

1 緒　　言

帯鋸のねじれ挫屈については，第2報[1]で述べた如く次の微分方程式を解いて挫屈荷重を求める事になる。符号は第1図に示す.



第 1 図

$$\left.\begin{aligned} B_1\frac{d^2u}{dz^2} &= \frac{P}{2}\left(\frac{l}{2}-z\right)\beta + Qu - \beta M \\ C\frac{d\beta}{dz} &= -\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2}-z\right)\frac{du}{dz} + \frac{P}{2}(\delta - u) + M\frac{du}{dz} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

但し，　$B_1 = \frac{1}{12}hb^3E$,　　$C = \frac{1}{3}hb^3G$

P: 送り力　　u: 横の撓み

Q: 緊張力　　β: ねじれ角

M: 両端にかかる曲げモーメント

E: ヤング係数　　h: 帯鋸の巾

G: 剪断弾性係数　　b: 帯鋸の厚さ

l: 帯鋸の自由長さ

又帯鋸のバック半径を R とすれば，曲率半径 R を有する帯鋸が真直に張られた状態にあるから，上式の M は真直にするに要するモーメント

$$M=\frac{E}{R}\frac{bh^3}{12}$$

なる値をとる．

この微分方程式が簡単に解けぬ為にエネルギー法を用いる．即ち，

$$-Q\int_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{du}{dz}\right)^2dz+2M\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{du}{dz}\frac{d\beta}{dz}dz+P\int_0^{\frac{l}{2}}\beta\frac{d^2u}{dz^2}\left(\frac{l}{2}-z\right)dz$$
$$=B_1\int_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)^2dz+C\int_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2dz$$

この式に適当な u, 例へばフーリエ級数

$$u=a_1\cos\frac{\pi}{l}z+a_3\cos\frac{3\pi}{l}z+a_5\cos\frac{5\pi}{l}z+\cdots\cdots$$

を代入して挫屈荷重が求められる．

しかし，極めて簡単な形で近似式を求めて置かないと実用上困難を感ずるので，前報ではこのフーリエ級数の第1項のみを用いて計算したのである．求めた条件式は前報の如く極めて簡単になるが念の為第2項迄を取つて計算して見た所その結果は次の式の如く極めて複雑になる．

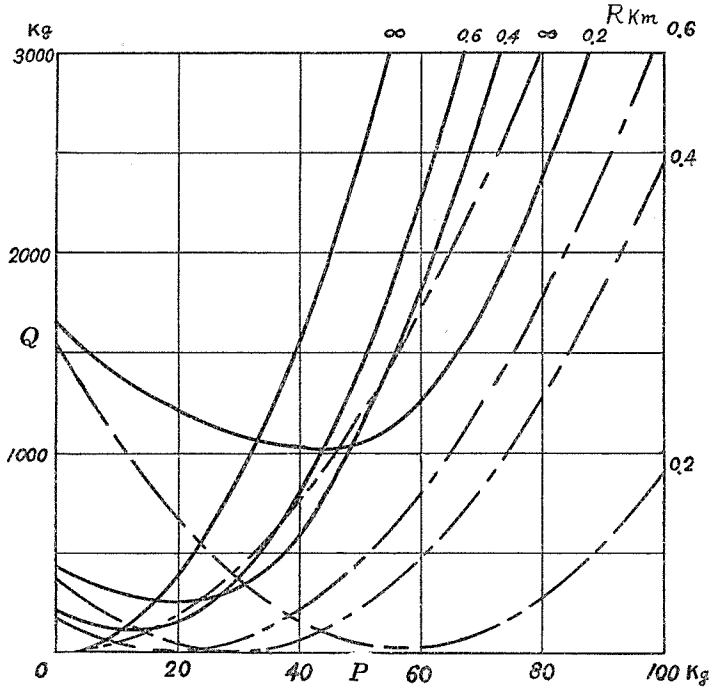
$$\frac{9\pi^4}{4l^2}Q^2+\left\{\frac{90\pi^6}{4l^4}B-\frac{18\pi^4}{4Cl^2}M^2+\frac{2\pi^2}{Cl}\left(\frac{9\pi^2}{16}+\frac{5}{4}\right)MP-\frac{\pi^2}{C}\left(\frac{3\pi^2}{32}+\frac{55}{16}-\frac{26}{3\pi}\right)P^2\right\}Q$$
$$+\frac{81\pi^8}{4l^6}B^2-\frac{90\pi^6}{4Cl^4}M^2B+\frac{9\pi^4}{4C^2l^2}M^4+P\left\{\frac{\pi^4}{Cl^3}\left(\frac{90\pi^2}{16}+\frac{82}{4}\right)MB-\frac{2\pi^2}{C^2l}\left(\frac{9\pi^2}{16}+\frac{5}{4}\right)M^3\right\}$$
$$+P^2\left\{\frac{\pi^2}{C^2}\left(\frac{3\pi^2}{32}+\frac{55}{16}-\frac{26}{3\pi}\right)M^2+\frac{1}{C^2}\left(\frac{9\pi^4}{64}+\frac{10\pi^2}{16}-\frac{24}{4}\right)M^2-\frac{\pi^4}{Cl^2}\left(\frac{35}{64}\pi^2+\frac{902}{32}-\frac{242}{3\pi}\right)B\right\}$$
$$-P^3\frac{Ml}{C^2}\left\{\frac{3\pi^4}{128}+\frac{175}{192}\pi^2-\frac{13}{6}\pi-\frac{161}{64}+\frac{8}{3\pi}\right\}+\frac{P^4l^2}{C^2}\left\{\left(\frac{\pi^4}{1024}+\frac{55}{768}\pi^2-\frac{13}{72}\pi+\frac{255}{4096}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{16\pi}-\frac{16}{9\pi^2}\right)\right\}=0$$

そして第1項のみを取つた時と第1項第2項を取つた時では甚しく挫屈荷重が異つて来る．この

事はこの問題と同じ問題で只両端にモーメントがない場合を解いて居る岩藤氏の論文[2]に於ても同様である．かくの如く M, P, Q, h, l, b なる6箇の変数の間がこの様な複雑な関係式で結びつけられて居ては実用上困難であるから，他の簡単な近似式を求めようとするのである．

2 計　　算

帯鋸の如くかなり大きな緊張力のかかつて居る場合には帯鋸の横の剛性 B_1 の影響は無視出来ると考える．第2図は種々なバック半径の時の緊張力 Q と挫屈荷重 P の関係曲線である．



第　2　図

但し

$h = 140$ mm　　$E = 2 \times 10^6$ kg/cm²

$b = 0.89$ mm　　$G = 8 \times 10^5$ kg/cm²

$l = 200$ cm

鎖線はフーリエ級数第1項のみを取つた場合，実線は第1項第2項を取つた場合で両者の間に大きな差がある．かつ $M = 0$（即ち $R = \infty$）の曲線は殆んど0から始まり $Q = 0$ のとき殆んど $P = 0$ となつて居るが，剛性を考慮に入れる場合には当然 $Q = 0$ で $P = 0$ にならぬ筈である．此の如く M の影響が小さく Q がかなり大きい場合には横の剛性の影響は殆んど考えなくてもよいものと思われ，M の影響が増せば剛性の影響も増して来るものと想像される．故に第1近

似として横の剛性を無視し，式（1）で $B_1=0$ とおくと，

$$\left.\begin{aligned} 0 &= Qu-\beta M+\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2}-z\right) \\ C\frac{d^2\beta}{dz^2} &= \frac{du}{dz}M-\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2}-z\right)\frac{du}{dz}+\frac{P}{2}(\delta-u) \end{aligned}\right\} \qquad (1)'$$

両端の条件としては

$$z=\frac{l}{2}: \qquad u=0, \quad \beta=0$$

上の式（1）′ に $$M-\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2}-z\right)=x$$

と置けば $$x\beta=Qu$$

$$C\frac{d\beta}{dx}=x\frac{du}{dx}+\delta-u$$

この u を消却すれば

$$\frac{d\beta}{dx}=\frac{Q\delta}{CQ-x^2}$$

故に

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \sqrt{\frac{Q}{C}}\delta\left\{\tanh^{-1}\frac{x}{\sqrt{CQ}}-\tanh^{-1}\frac{M}{\sqrt{CQ}}\right\} \\ u &= \frac{\delta x}{\sqrt{CQ}}\left\{\tanh^{-1}\frac{x}{\sqrt{CQ}}-\tanh^{-1}\frac{M}{\sqrt{CQ}}\right\} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

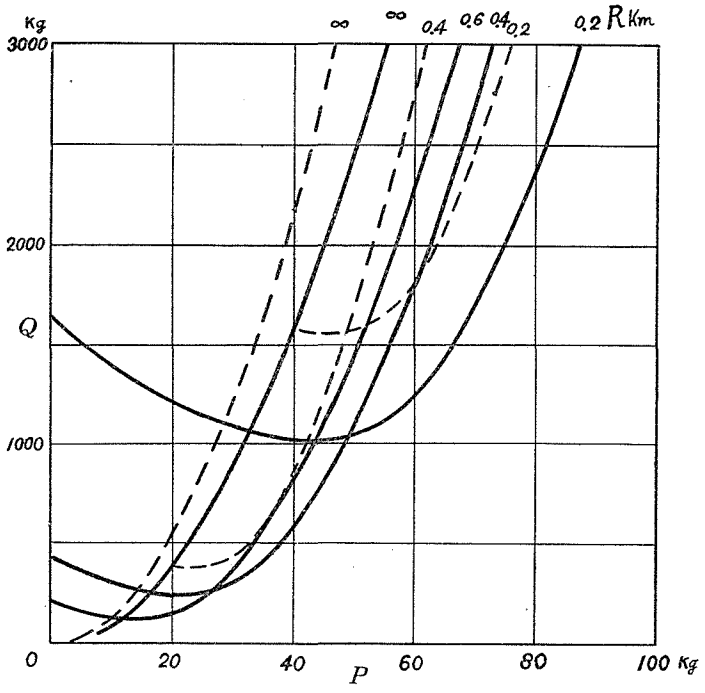
この式に $z=0$ 即ち $x=M-pl/4$ で $u=\delta$ なる条件を入れる事により挫屈荷重が求まる．即ち

$$\frac{\sqrt{CQ}}{M-\frac{Pl}{4}}=\tanh^{-1}\frac{M-\frac{Pl}{4}}{\sqrt{CQ}}-\tanh^{-1}\frac{M}{\sqrt{CQ}} \qquad (3)$$

その他の条件として

$$z=0: \qquad \frac{du}{dz}=0, \quad \frac{d\beta}{dz}=0$$

が当然成立しなければならぬのであるが，この場合の如く横の撓み剛性を無視した場合には中央で折れ曲る解になるのはやむを得ないからこの条件は無視する．この式から計算した値は第3図の点線で示した．フーリエ級数第2項迄取つた値を比較の為示してある。この計算による挫屈荷重は横の剛性を無視して居るから正確な値より小さく出る筈である．しかし1項又は1項2項を用いてエネルギー法で解いた値は正確な値より大きくなつて居る筈であるから正確な値はこの中



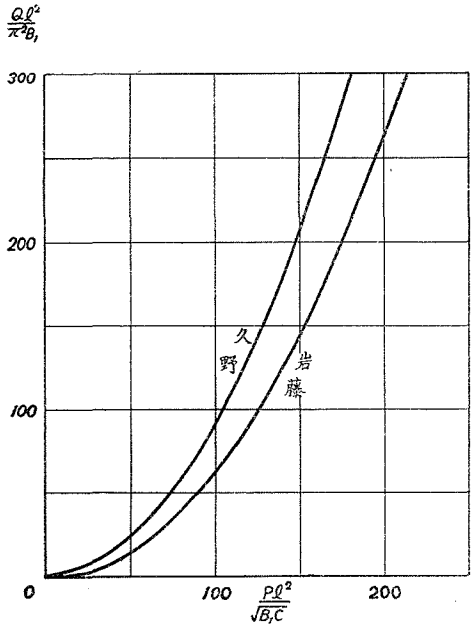
第　3　図

間の値になる筈である．又 Q が大きくなればこの値の方が正確であるし，$Q=0$ の附近ではエネルギー法による計算値の方が正確である．$M=0$ の場合，（3）式は

$$1=\frac{Pl}{4\sqrt{CQ}}\tanh^{-1}\frac{Pl}{4\sqrt{CQ}}$$

$$\sqrt{CQ}=1.1997\frac{Pl}{4}$$

になる．この場合を岩藤氏の解と比較したのが第4図である．式が簡単な割合によく合つて居る（記号は同氏の論文による）．



第　4　図

何れの曲線も P が小さいか又は負の場合，モーメント M 一定の曲線が右下に下つて居るのはモーメントが大きすぎる為に挫屈を起して居るもので，実際の使用中には起らない．実際使用中起る挫屈に対しては同じ大きさのモーメント又は同じ大きさのバック半径 R の鋸に於て，

緊張力 Q を増す程挫屈を起す送り力 P は増す．次に同じ緊張力 Q の場合，モーメント M が増す程挫屈送り力 P は増す様に考えられるが，これには或限界がある．即ち，鋸の両端を固定して挫屈変形を起す場合，云い換えると両端に於ける中心軸の傾斜の変化が0であると云う条件即ち

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{du}{dz}\frac{d\beta}{dz} = 0$$

の場合がモーメント最大である．これは（3）式で Q が一定として P の最大になる M を求めてもよい．その条件式は

$$\frac{1}{\left(M-\frac{Pl}{4}\right)^2} = \frac{1}{CQ-M^2} - \frac{1}{CQ-\left(M-\frac{Pl}{4}\right)^2}$$

故に

$$\frac{M}{\sqrt{CQ}} = 0.9045 \qquad \frac{Pl}{4\sqrt{CQ}} = 1.3960$$

となる．

この P と Q の関係曲線を求めると挫屈曲線の包絡線になるわけである．

3 実　　験

富士製作所製テーブル式帯鋸盤（42″）に歯の切つてない帯鋸をかけ，自由部分の中央点で鋸と同一平面内に水平後方に分銅で引張つて挫屈荷重を求めた．挫屈の始まる状態は帯鋸の歯側背側に各鏡を取り付け，望遠鏡と物指で測定した．歯側の鏡のふれと背側の鏡のふれとは常に同一であつたから，鋸に歯のない時は鋸の横断面は変形せず，歯側から背側迄一体となつて挫屈するものである事がわかる．緊張力 Q を変えた場合，帯鋸を新らしく掛けた場合等は充分空転させて帯鋸が安定位置に来てから実験を開始した．上部鋸車は傾斜させる事が出来るから，前向きに水平から α だけ傾けた場合は両端にかかる M は

$$M = EI\left\{\frac{1}{R}-\frac{\alpha}{l}\right\}$$

なる式で表わされる．故に次の実験では次式から求まる換算バック半径 R' を用いる事とする．

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} - \frac{\alpha}{l}$$

挫屈状態には2種あつて，第1種は徐々に挫屈して行く場合であり，第2種は急に挫屈する場合である．前者は帯鋸が挫屈荷重に達して挫屈を起す場合，両端は単に支持されて居るのでな

く，鋸車にかかつて居る帯鋸に続いて居るのであるから両端中心軸が傾きを変化する場合には必ず鋸車上で帯鋸がすべつて角度を変化しなければならぬ．この帯鋸と鋸車との間の辷りは両端に於けるモーメントを増加し，このモーメントの増加は挫屈に対する抵抗を増し，より大きな挫屈荷重を必要とする様になるから，挫屈荷重の徐々な増加が起り最後に上記の包絡線の位置に至つて初めて本当の意味の挫屈が起る筈である．故に両端は最初モーメント M がかけられて支持されて居る状態で挫屈を起しながら辷り初め遂に両端が固定された状態で本当の挫屈を起すのである．第2の場合は帯鋸と鋸車との間に何か摩擦を増す原因があつて辷りが起らぬが，或荷重になると突然辷り出し急な挫屈を起すものと考えられる．

故に挫屈荷重は帯鋸の歯先が如何なる角度横にふれた時を以てするかで異つて来る．此の実験では大体帯鋸がふれ止めに接触した時を以て挫屈を起したとして挫屈荷重を求めた．この様にしても挫屈荷重は1割程度のばらつきがあるからその平均値を示すと下の表の如くになる．徐々に挫屈を起す場合は概して平均値より低い値になる．

(A)　　$b = 0.847$ mm　(21 番)　　$h = 10.2$ cm

$l = 172.6$ cm　　$R = 232$ m

テンションは殆んど歯側から背側迄一様に半径 274 cm になる様につけてある．

	α	Q kg / R' km	100	200	400	600	800
(1)	2×10^{-3}	0.3	15	22	31	41	43
(2)	4×10^{-3}	0.5	14	22	29	37	41
(3)	6.3×10^{-3}	1.4	12	20	24	36	43

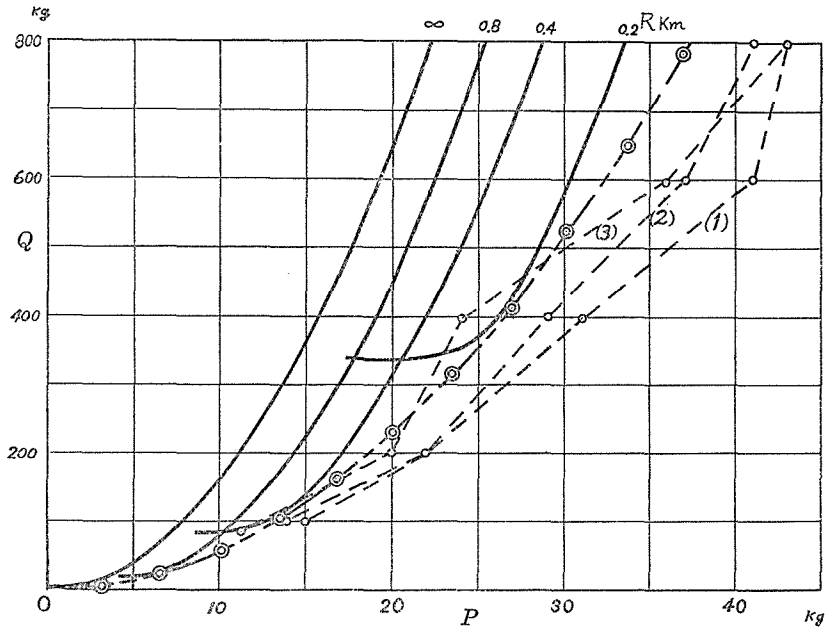
(B)　　$b = 0.71$ mm　(22 番)　　$h = 101.6$ mm

$l = 174$ cm　　$R = 780$ m

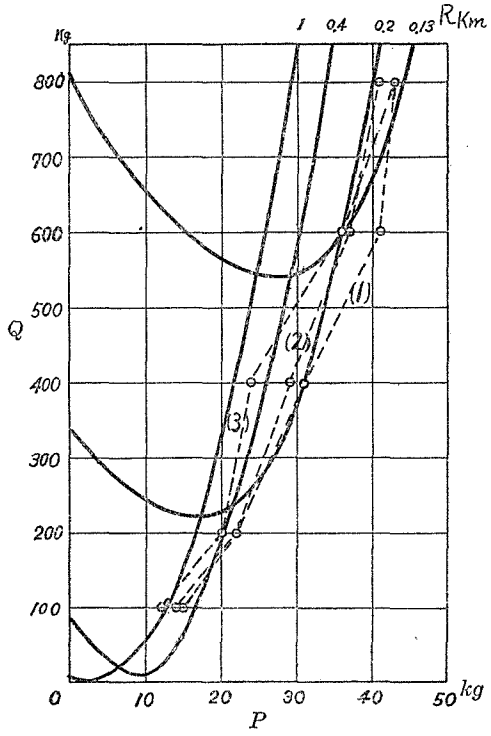
テンションなし．

	α	Q kg / R' km	100	200	400	600	800
(1)	0.96×10^{-3}	1.3	7	7	17	21	32
(2)	2×10^{-3}	8	6	9	15	20	27

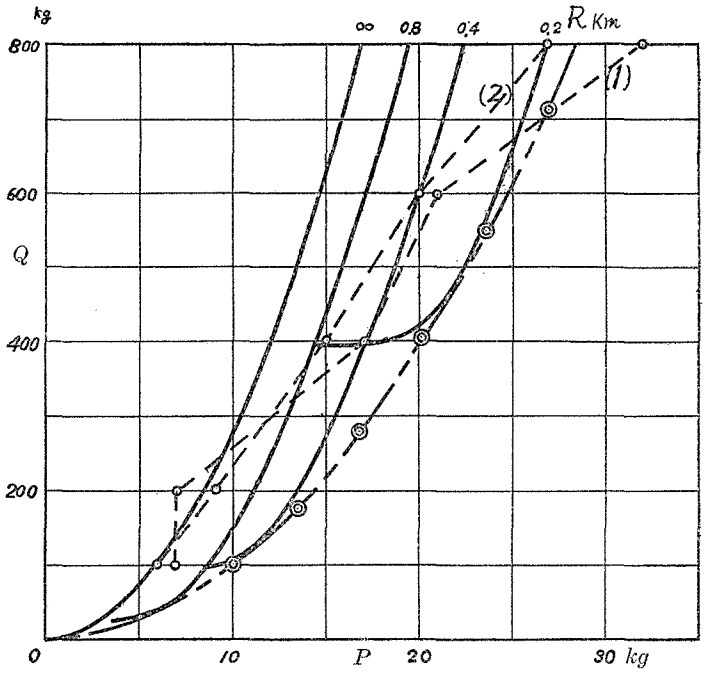
第5図は（A）の場合を（3）の簡単な式から計算した場合と比較し，第6図はフーリエ第2項迄取つた値と比較して居る．共に実測値は点線で示す．バック半径を変化しても余り挫屈荷重に変化なく，幾分バック半径の大きな，即ち両端のモーメントの小さな方が挫屈荷重が小さくなつて居る．これはすべて上記の包絡線近くになつてから挫屈する事から了解される．


kg
800
600
Q
400
200
0
10
20
P
30
40
kg
∞
0.8
0.4
0.2
R Km
(1)
(2)
(3)

第　5　図


kg
800
700
600
Q
500
400
300
200
100
0
10
20
30
40
50
kg
P
1
0.4
0.2
0.13
R Km
(1)
(2)
(3)

第　6　図



第　7　図

第7図は（B）の場合を（3）式から計算した値と比較したものである．

4 結　　論

以上の如く微分方程式（1）に於て $B_1=0$ と置いて得た条件式で挫屈荷重の大体を推定する事が出來る．鋸が静止して居る時は上の如く挫屈曲線の包絡線がその値を与えるが，若し鋸車が1000回転/分の様な高速で回転して居る場合に，挫屈荷重が如何に変化するかは問題である．この点を研究する必要があるが，送り力を徐々に増して挫屈荷重の如き大きな荷重を加へようとすれば帯鋸はもはや安定して回転せずに鋸車に乗り上げてしまうので現在はまだ実験して居ない．

付　記

此の研究は昭和29年度文部省科学研究費補助金によつた．実験に使用した帯鋸盤は，富士製作所から研究の為に貸与せられたものであり，帯鋸は北海道製材工具 K.K. を通じ，丸源製鋸所から寄贈せられたものである．尚，鋸の腰入については，富士製作所札幌出張所及び北洋木材 K.K. の技術員の方々の御援助を受けた．併せて謝意を表する．

1）久野陸夫，土肥　修：帯鋸の腰入（第2報），帯鋸の撓れ挫屈について，北海道大学工学部研究報告第10号（昭29,5）．

2）岩藤重正，織田昌信：軸方向に荷重を有する薄板状梁の撓れ挫屈，日本機械学会論文集第17巻61号（昭26）．