



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	平板に於ける応力集中と拡散に就いて. 第1報 : 一様引張を受ける二円孔及びオバロイド孔を持つ平板に就いて
Author(s)	渡辺, 旨惟; Watanabe, Munekore
Citation	北海道大學工学部研究報告, 12, 61-76
Issue Date	1955-06-15
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40569
Type	departmental bulletin paper
File Information	12_61-76.pdf



平板に於ける応力集中と拡散に就いて

(第 1 報)

— 一様引張を受ける二円孔及びオバロイド孔を持つ平板に就いて —

渡 辺 旨 惟

(昭和 30 年 3 月 1 日 受理)

On the Problems of the Stress Concentration and the “Entlastung” of the Plates (1st. Report)

— On the Plates with two circular Opennings and
with the Ovaloid Opening subjected to pure Tension —

Munekore WATANABE

Abstract

It was found that the notch effects can be decreased by making the other notches or holes in the neighbourhood of one notch or hole.

And about the decreasing of the stress concentration, the following methods have been investigated.

These are as follows:

- 1) Increasing the strength at the bottoms of the notches by cold working, etc.
- 2) Making the other notches or holes.

It seems that the 2nd method is most effective, because it is simple and the weight can be decreased.

About the 2nd, the researches of H. Neuber and R. C. J. Howland, and other some researches were carried out. However, H. Neuber and R. C. J. Howland treated the problems of the plates with numbers of notches or holes.

And so their numerical values are smaller than the values of the finite notches or holes. And other researches are as particular as the above researches.

So the aim of this paper is to quantify such an “Entlastung” by making another hole, and to give the proper arrangement and shape of the hole which decreases effectively the stress concentration on the plates with the hole.

1 緒 言

所謂拡散法則は Saint Venant により称えられた。而してこの法則によると切欠及び孔の存在により応力集中のある時にもう一つのそれらを附加する事により応力集中は軽減し得る。然し現在迄の所集中応力の軽減に就いては切欠及び孔の周縁部の補強による方法、切欠及び孔の最大

応力の生ずる点とその近傍を常温加工等で硬化せしめる方法、切欠及び孔の追加による方法等があげられているが、切欠及び孔の追加による方法は簡単に作れる事、及び重量の軽減等の点から最も有利と思われるがこれに就いては H. Neuber¹⁾ 氏、R.C.J. Howland 氏の研究その他二三の研究があるのみであり Neuber 氏 Howland 氏のものとは無限に並ぶ切欠、或いは孔に就いてのもので有限個数の場合に比し低い値を示すものと思われ、その他のものも個々の特殊なものに就いての解析が行われているに過ぎぬ。故に筆者はかかる追加切欠による集中応力拡散の問題を定量化し又機械部品設計等に於いて如何にして集中応力を軽減するかと云う点に論点を置いて研究を進めたい。その第一着手として本論文に於ては二次元問題を取り扱い、規則的に二ヶ並んだ円孔が一様引張を受ける時に就き考察し、更に集中応力を軽減せんとし ovaloid opening に就いても解析考察する。

2 基本的考察

如何なる立場から軽減を論ずるかを先づ明瞭にせねばならない。その為に破損、破壊及び疲労破壊に就いて考察する。破損に就いては現在主として最大剪断応力説と剪断歪エネルギー説とが用いられているが、何れによつて考えても切欠及び孔の問題でそれらが自由周縁なる時は最大応力が破損の指標にならう。併し又切欠及び孔を有するものの破損に就いての石橋氏の説によると破損に応力勾配も影響し、これに就いても慎重なる考慮をばらねばなるまい。

破壊に就いては滑り破壊は未だ明瞭にされておらず分離型破壊に就いてのみ述べられているが(実際問題としては分離型破壊の方が危険度は大きい。)これに於ては実験的裏附もあり最大応力説が主に用いられているが、これによつても周縁の主応力の最大が破壊の指標とならう。

又疲労破壊に就いては一般機械部分等にて可成り多く見られ、又切欠及び孔の部分の応力分布不同が疲労限に著しく影響を与える²⁾為形状係数は一般に切欠係数より大きく形状係数の小さい間は殆んど切欠係数と一致するが、形状係数が大きくなると切欠係数より著しく大きくなる。これらの点から見て疲労に対する軽減の問題は相当な重要性を持つものと思われ、軽減の指標を何におくかを決定するのは重要であらう。而して現在迄の所この点については未だ殆んど明瞭でないが石橋氏の研究²⁾等から見て疲労破壊に就いては、最大集中応力の他にその附近の応力勾配も十分考慮せねばなるまい。

3 解析及び考察

A) 単一円孔

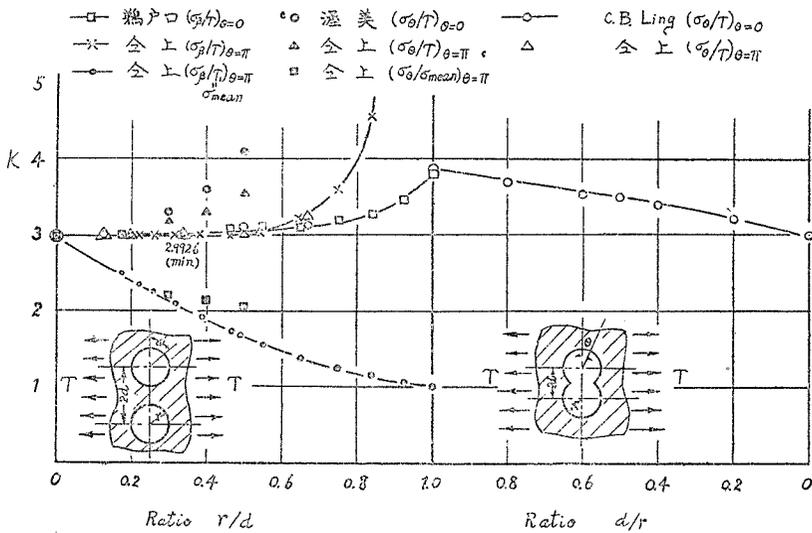
単一円孔を有する平板の問題は良く解析されているが鶴戸口氏³⁾が双極座標を用いて一円孔を持つ半無限板について解析を行つている。又極座標を用いて Howland 氏⁴⁾が両直線縁を考慮して理論を与えている。又光弾性実験としては単色光を用いてベークライトにて Frocht 氏⁵⁾, Wahl

and Beeuwkes 氏⁶⁾が行いこれは Coker 氏⁷⁾が Xylonite を用い白色光源で行つた実験より前記理論解に良く一致している。又この他 extensometer を用いた実験結果もあるが以上の結果を総合検定して単一円孔の時の形状係数を 3.0 として良いようである。

B) 二円孔の場合

i) 二円孔の並ぶ方向に直角に一様引張を受けた場合

この場合に就いては無限板で扱つたものとしては Jeffery 氏⁹⁾の双極座標を用いた解があり、これと良く似た解析の仕方でも E. Weinel 氏¹⁰⁾も行つている。又鶴戸口氏¹⁰⁾も双極座標を用いて解析を行い、Ling 氏¹¹⁾はこの場合及びその延長として overlapped hole の場合についても解析を行つている。又両直線縁を考慮したものとしては渥美氏¹²⁾が解を与えて居り、これらの結果を第1図に示す。



第 1 図

以上の結果を考察すると、鶴戸口氏、C.B. Ling 氏の値は良く一致して居り、渥美氏の値がこの二つから離れているが、これは渥美氏が巾 $2d$ の板で与えた値である為である。又 $\sigma_{max}/T = K$ とすると二円孔が近づくにつれて entlastung の効果は大きくなる筈であるのに K の値は r/d が $0.322 (\theta=\pi)$ 及び $0 (\theta=0)$ で最小となりそれ以上になると上昇する。これは二円孔が近接するに従い最小断面が著しく狭くなりこの効果が entlastung の効果を打ち消す程大きい為である。この σ_{max}/T に対して鶴戸口氏の式は次の如くである

$$r/d = 1/\cosh \alpha_1$$

$$(\sigma_\beta)_{\beta=0}/T = K \left[\frac{1}{2} (\sinh 2\alpha_1 - \tanh \alpha_1) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} A_n'(n+2) \left[\frac{\cosh(n+2)\alpha}{n+2} - 2 \frac{\cosh(n+1)\alpha}{n+1} + \frac{\cosh n\alpha}{n} \right] \\ - B_n'(n-2) \left[\frac{\cosh(n-2)\alpha}{n-2} - 2 \frac{\cosh(n-1)\alpha}{n-1} + \frac{\cosh n\alpha}{n} \right] \end{array} \right\} \\
& + \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} A_n'' \frac{n(n+1)(n+2)}{2} \left[\frac{\cosh(n+2)\alpha}{n+1} - 2 \frac{\cosh(n+1)\alpha}{n+1} + \frac{\cosh n\alpha}{n} \right] \\ - B_n'' \frac{n(n-1)(n-2)}{2} \left[\frac{\cosh(n-2)\alpha}{n-2} - 2 \frac{\cosh(n-1)\alpha}{n-1} + \frac{\cosh n\alpha}{n} \right] \end{array} \right\} \right] \\
(\sigma_{\beta})_{\beta=\pi/T} \\
& = K \left[\frac{1}{2} (\sinh 2\alpha_1 - \tanh \alpha_1) \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \begin{array}{l} A_n'(n+2) \left[\frac{\cosh(n+2)\alpha}{n+2} + 2 \frac{\cosh(n+1)\alpha}{n+1} + \frac{\cosh n\alpha}{n} \right] \\ - B_n'(n-2) \left[\frac{\cosh(n-2)\alpha}{n-2} + 2 \frac{\cosh(n-1)\alpha}{n-1} + \frac{\cosh n\alpha}{n} \right] \end{array} \right\} \\
& + \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \begin{array}{l} A_n'' \frac{n(n+1)(n+2)}{2} \left[\frac{\cosh(n+2)\alpha}{n+2} + 2 \frac{\cosh(n+1)\alpha}{n+1} + \frac{\cosh n\alpha}{n} \right] \\ - B_n'' \frac{n(n-1)(n-2)}{2} \left[\frac{\cosh(n-2)\alpha}{n-2} + 2 \frac{\cosh(n-1)\alpha}{n-1} + \frac{\cosh n\alpha}{n} \right] \end{array} \right\} \right]
\end{aligned}$$

又 overlapped hole の時は d/r が小さくなるに従つて σ_{\max}/T の値は 3.0 迄下る。

即ち $r/d=0$ 又 overlapped hole の時の $d/r=0$ は一円孔の時の値に一致する。又鶴戸口氏は前記二円孔に於て entlastung の効果を見る為め最小断面の応力を出しその平均応力で最大応力を除したもの (図に於て $\sigma_{\beta\max}/\sigma_{\text{mean}}$) を求めている。これによると curve は r/d が 1 に近づくに従つて下る。これを式で示すと次の如し。

$$K = \frac{\sigma_{\beta_1\pi}}{\sigma_{\text{mean}}} = \left(\frac{\sigma_{\beta_1\pi}}{T} \right) \frac{2 \tanh \frac{\alpha_1}{2}}{1 + 2K \sinh^2 \alpha_1}$$

以上の考察から次の結論を得る。

この場合には最大応力に就いてはむしろ上昇する。唯応力勾配は二円孔が近接するに従つて減少するがこの二つを考慮しても応力軽減に就いては見るべきものなく、強いていうならば $r/d = 0.322$ 附近が軽減の点から最も適當であろう。又筆者はこの場合の $\sigma_{\beta_1\pi}/\sigma_{\text{mean}}$ の式として次の多項式を与える。 $\lambda = r/d$ とする。

$$K = \frac{\sigma_{\beta_1\pi}}{\sigma_{\text{mean}}} = 3 - 2.6083 \lambda - 1.9676 \lambda^2 + 4.334 \lambda^3 - 1.8081 \lambda^4$$

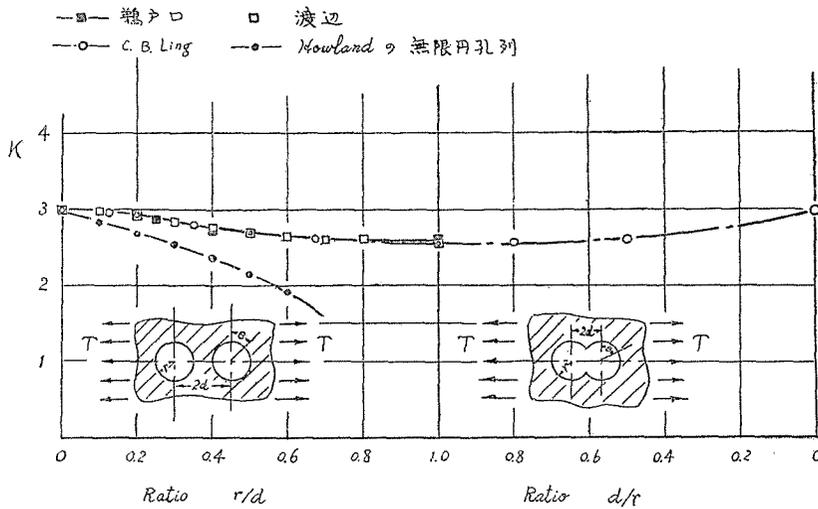
即ち拡散作用は次式で表わされる。

$$E = 2.6083 \lambda + 1.9676 \lambda^2 - 4.384 \lambda^3 + 1.8081 \lambda^4$$

この式による値は上記鶴戸口氏の値に非常に良く近似し小数点以下三桁目が異なる程度である。

ii) 二円孔の並ぶ方向に一様引張を受ける場合

この場合に就いては殆んどが無限板で扱つたもので Jeffery 氏, 鶴戸口氏, 及び Ling 氏の解がある。又 Ling 氏はこの延長として overlapped hole に就いても解析を行つている。これらの結果を第2図に示す。又この他第2図には Howland 氏の無限円孔列の時の値を示し有限個数



第 2 図

の円孔の時より低い値をとる事を示しておいた。而して第2図の data に就いて考察すると鶴戸口, Ling 両者の結果は良く一致しており, 又この場合は最大応力と応力勾配を別個に考える必要はない。又 K の curve は r/d が0の時は単一円孔の時と一致し1に近づくに従つて減少し 2.58 迄下る。これを鶴戸口氏は次式で示している。即ち

$$\sigma_{\beta 1} / T = 2 \left[\frac{K \sinh \alpha_1 \{ 2 \sinh \alpha_1 - (\cosh \alpha_1 - \cos \beta) (1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cos n\beta) \}}{-\cos 2\theta - (\cosh \alpha_1 - \cos \beta) \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos n\beta} \right]$$

この結果を筆者はもう少し取扱の簡単な次の式で与える。即ち $\lambda = r/d$ として

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta \max} / T &= 3.0702 - 0.7583 \lambda - 0.0194 \lambda^2 + 2.0715 (\lambda - 0.3)^3 - 1.7625 (\lambda - 0.3)^4 \\ &= 3 - [1.7625 (\lambda - 0.3)^4 - 2.0715 (\lambda - 0.3)^3 + 0.0194 \lambda^2 + 0.7583 \lambda - 0.0702] \end{aligned}$$

即ちこの [] 内が拡散作用を示している。

この結果及び Ling 氏の値を比較して第1表に示す。又第2図にもこの値を示す。

第 1 表

λ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Ling	3.0		2.927			2.703					2.569
渡辺	3.0	2.98	2.92	2.86	2.76	2.70	2.65	2.62	2.60	2.59	2.57

之等の結果から明らかな如く、筆者の式による値は Ling, 鶴戸口両者の値と非常に良く一致している。又第2図に示す如く overlapped hole の時は λ が大になるに従つて K は増加し、 $1/\lambda=0$ の時単一円孔の値に一致する。即ちこの ii) の場合は $\lambda=1.0$ で単一円孔の時の K の値の 86% 迄下る。のみならず $\lambda=0.8\sim 1.0$ $1/\lambda=1.0\sim 0.6$ の範囲で K の変化は非常に少く $\lambda=0.8$ でも K は 86.67% 迄下り軽減を有効ならしめる λ の範囲は可成りの中を持つ。これは追加孔を作る場合設計上有利であろう。

即ちこの ii) の場合は応力軽減として可成り有効である。

C) ovaloid opening

前述 ii) により集中応力は可成り軽減されるがこれを ovaloid opening にすれば尙応力軽減が得られるだろうと推定されるので筆者は ovaloid opening に就いて解析と数値計算を行う。

i) 記号

$$z = x + iy \quad w = \alpha + i\beta \quad \zeta = e^w \quad \sigma = e^{i\beta} \quad J = \text{stretch ratio}$$

$$\alpha = \beta = \text{const line に対する切線と } x \text{ 軸との角} \quad s, t, r = \text{real parameters}$$

$$\Phi, \Psi = z \text{ の potential function} \quad \varphi, \psi = \zeta \text{ の potential function}$$

ii) 基本式

mapping function として $z = f(\zeta) = c\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\zeta^n}$ を選ぶと

$$\frac{dz}{dw} = J e^{i\alpha} \quad (1)$$

$$\frac{dz}{dw} = \frac{dz}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dw} = \frac{dz}{d\zeta} \zeta \quad (2)$$

$$J e^{i\alpha} = \zeta z'(\zeta) \quad (3)$$

$$J e^{-i\alpha} = \bar{\zeta} z'(\bar{\zeta}) \quad (4)$$

(3) に (4) をかけて

$$J^2 = z'(\zeta) z'(\bar{\zeta}) \bar{\zeta} \zeta = z'(\zeta) z'(\bar{\zeta}) e^{2i\alpha} \quad (5)$$

(3) を (4) で除して

$$e^{2i\alpha} = \frac{z'(\zeta)}{z'(\bar{\zeta})} e^{2i\beta} \quad (6)$$

今ここで Greenspan の mapping function 即ち

$$z = s\zeta + \frac{t}{\zeta} + \frac{r}{\zeta^3} \quad (7)$$

を用いる.

s, t, r は孔の形によつて決定される real const である. 然らば

$$\left. \begin{aligned} x &= (se^\alpha + te^{-\alpha}) \cos \beta + re^{-3\alpha} \cos 3\beta \\ y &= (se^\alpha - te^{-\alpha}) \sin \beta - re^{-3\alpha} \sin 3\beta \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$\alpha=0$ の時に (8) 式は s, t, r を適当に選ぶ事により ovaloid opening に近似させる事が出来る. 又二三の特殊な場合が次の如く生ずる. 即ち

- もし $r=t=0$ なら半径 s の円
 $r=0$ なら $s+t$ =長径, $s-t$ =短径 の楕円
 $t=0, r<0$ なら丸縁をもつ正方形
 $t=0, r>0$ なら上記正方形を 45° 廻したもの

に近似させ得る. (7) 式から

$$z'(\zeta) = s - \frac{t}{\zeta^2} - \frac{3r}{\zeta^4} \quad (9)$$

$\alpha=0$ の時我々は J を J_0 として (5) 式から

$$J_0^2 = s^2 + t^2 + 9r^2 - (2st - 6rt) \cos 2\beta - 6sr \cos 4\beta \quad (10)$$

又二つの potential function を次の如く書く事は可能である. 即ち

$$\left. \begin{aligned} \phi(z) &= \sum_1^k A_n z^n + \sum_1^\infty \frac{a_n}{z^n} \\ \psi(z) &= \sum_1^{k'} B_n z^n + \sum_1^\infty \frac{b_n}{z^n} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

然らば Airy の stress function は

$$F(x, y) = R_0 [\bar{z}\phi(z) + \int \psi(z) dz] \quad (12)$$

R_0 は実数部を意味する.

然らば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y + \sigma_x &= 2[\phi'(z) + \bar{\phi}'(\bar{z})] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

これを $\sigma_a, \sigma_\beta, \tau_{a\beta}$ を得る為に次の式を用いて転換する.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= \sigma_\beta + \sigma_\alpha \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= (\sigma_\beta - \sigma_\alpha + 2i\tau_{\alpha\beta}) e^{-2i\kappa} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

然らば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\beta + \sigma_\alpha &= 2[\Phi'(z) + \bar{\Phi}'(\bar{z})] \\ \sigma_\beta - \sigma_\alpha + 2i\tau_{\alpha\beta} &= 2[z(\zeta)\Phi''(z) + \Psi'(z)] \frac{z'(\zeta)}{z'(\zeta)} e^{2i\beta} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\Phi(z) = \Phi[z(\zeta)] = \varphi(\zeta)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi'(z) &= \frac{\varphi'(\zeta)}{z'(\zeta)} \\ \Psi'(z) &= \frac{\psi'(\zeta)}{z'(\zeta)} \\ \Phi''(z) &= \frac{\varphi''(\zeta)}{[z'(\zeta)]^2} - \frac{\varphi'(\zeta)z''(\zeta)}{[z'(\zeta)]^3} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

もし孔が自由境界ならば孔の周りでは $\sigma_\alpha = \tau_{\alpha\beta} = 0$ であり、この自由境界に於ては

$$\varphi(\sigma) + \frac{z(\sigma)}{z'(1/\sigma)} \bar{\varphi}'(1/\sigma) + \bar{\psi}(1/\sigma) = 0 \quad (17)$$

又境界にて $(\sigma_\alpha)_{\alpha=0} = 0$ を入れると

$$(\sigma_\beta)_{\alpha=0} = 2 \left[\frac{\varphi'(\sigma)}{z'(\sigma)} + \frac{\bar{\varphi}'(1/\sigma)}{z'(1/\sigma)} \right] \quad (18)$$

$\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ を決定するのに complex-variable theory (cauchy-type integrals) による基礎理論は重要でありこの二つを次に述べる。

理 論 1

$f(\zeta)$ は $|\zeta| \leq 1$ の閉区域で連続で $\zeta = 0$ を除き内部に於て解析的 (正則) であるとするとき $f(\zeta)$ のろーらん展開は主要部は有限級数で次の如くである。

$$f(\zeta) = \frac{A_1}{\zeta} + \frac{A_2}{\zeta^2} + \dots + \frac{A_n}{\zeta^n} + g(\zeta)$$

$g(\zeta)$ は解析函数である。この時は γ は $\sigma = e^{i\beta}$ なる単位円で

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = -\frac{A_1}{\zeta} - \frac{A_2}{\zeta^2} - \dots - \frac{A_n}{\zeta^n} \quad |\zeta| > 1 \text{ に対し}$$

理 論 2

$f(\zeta)$ が閉区域 $|\zeta| \geq 1$ で連続で γ の外側に於て $\zeta = \infty$ を除けば解析的 (正則) であるとする

る。この時は $f(\zeta)$ のローラン展開は次の如くである。

$$f(\zeta) = A_0 + A_1\zeta + A_2\zeta^2 + \cdots + A_n\zeta^n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{\zeta^k}$$

即ち主要部は有限級数である。この時は

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = -f(\zeta) + A_0 + A_1\zeta + A_2\zeta^2 + \cdots + A_n\zeta^n \quad |\zeta| > 1 \text{ に対し}$$

これら理論 1, 2 の証明に就いては文献 13) を参照されたい。

iii) y 軸に平行に無限遠で一様引張を受ける場合

(11) 式にて z を y 方向にて無限大に近づける時

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z)_{y \rightarrow \infty} &= \left[\sum_1^k n A_n z^{n-1} \right]_{y \rightarrow \infty} \\ \Phi''(z)_{y \rightarrow \infty} &= \left[\sum_2^k n(n-1) A_n z^{n-2} \right]_{y \rightarrow \infty} \\ \psi'(z)_{y \rightarrow \infty} &= \left[\sum_1^k n B_n z^{n-1} \right]_{y \rightarrow \infty} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$y \rightarrow \infty$ の時の境界条件は $\sigma_x = 0$ $\tau_{xy} = 0$ $\sigma_y = T$ (19) 式と (13) 式の初めの式にこの境界条件を入れて

$$T = 2 \left[\sum_1^k n A_n (x + iy)^{n-1} + \sum_1^k n \bar{A}_n (x - iy)^{n-1} \right]_{y \rightarrow \infty}$$

$\therefore n = 2, 3, 4, \dots, k$ に対しては $A_n = 0$

$$A_1 = \frac{T}{4}$$

又 (19) 式と (13) 式の二番目の式に境界条件を入れて

$$T = 2 \left[\sum_1^{k'} n B_n (x + iy)^{n-1} \right]_{y \rightarrow \infty}$$

$n = 2, 3, \dots, k'$ では $B_n = 0$

$$B_1 = \frac{T}{2}$$

$$\therefore \Phi(z) = \frac{T}{4} z + \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

$$\psi(z) = \frac{T}{2} z + \sum_1^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$$

故に opening の境界に於て

$$\varphi(\sigma) = \frac{T}{4} \left(s\sigma + \frac{t}{\sigma} + \frac{r}{\sigma^3} \right) + \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{\left(s\sigma + \frac{t}{\sigma} + \frac{r}{\sigma^3} \right)^n}$$

$$\psi(\sigma) = \frac{T}{2} \left(s\sigma + \frac{t}{\sigma} + \frac{r}{\sigma^3} \right) + \sum_1^{\infty} \frac{b_n}{\left(s\sigma + \frac{t}{\sigma} + \frac{r}{\sigma^3} \right)^n}$$

$$\bar{\psi}'(1/\sigma) = \left[\frac{T}{4} - \sum_1^{\infty} \frac{n\bar{a}_n}{\left(\frac{s}{\sigma} + t\sigma + r\sigma^3 \right)^{n+1}} \right] z'(1/\sigma)$$

$$\bar{\psi}(1/\sigma) = \frac{T}{2} \left(\frac{s}{\sigma} + t\sigma + r\sigma^3 \right) + \sum_1^{\infty} \frac{\bar{b}_n}{\left(\frac{s}{\sigma} + t\sigma + r\sigma^3 \right)^n}$$

故に (17) 式は次の如くなる。

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma) + \frac{s\sigma^4 + t\sigma^2 + r}{\sigma^3} \left[\frac{T}{4} - \sum_1^{\infty} \frac{n\bar{a}_n}{\left(\frac{s}{\sigma} + t\sigma + r\sigma^3 \right)^{n+1}} \right] \\ + \frac{T}{2} \left(\frac{s}{\sigma} + t\sigma + r\sigma^3 \right) + \sum_1^{\infty} \frac{\bar{b}_n}{\left(\frac{s}{\sigma} + t\sigma + r\sigma^3 \right)^n} = 0 \end{aligned}$$

これに $\frac{d\sigma}{2\pi i(\sigma-\zeta)}$ をかけ γ の周りで積分し理論 1, 2 を用いると

$$-\varphi(\zeta) + \frac{T}{4} \left(s\zeta - \frac{t}{\zeta} - \frac{r}{\zeta^3} \right) - \frac{T}{2} \frac{s}{\zeta} + \frac{r\bar{a}_1}{s^2\zeta} = 0$$

これに $\sigma d\sigma/2\pi i(\sigma-\zeta)$ をかけ積分し同様の操作を繰り返すと $\bar{a}_1=0$ を得る。

$$\therefore \varphi(\zeta) = \frac{T}{4} \left(s\zeta - \frac{t}{\zeta} - \frac{r}{\zeta^3} \right) - \frac{T}{2} \frac{s}{\zeta}$$

故にこれを (18) 式に入れると

$$(\sigma_{\beta})_{\alpha=0} = T \left[\frac{s^2 - t^2 - 9r^2 - 2st + 2(s^2 - 3rs - 3rt) \cos 2\beta}{s^2 + t^2 + 9r^2 + 2(3rt - ts) \cos 2\beta - 6rs \cos 4\beta} \right]$$

今 $\frac{s-t+r}{2t} = 1$ の場合として

$$s = 7.9 \quad r = -0.4 \quad t = 2.5 \quad \text{とする.}$$

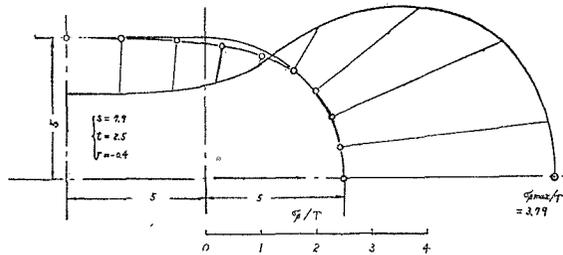
この時は $(\sigma_{\beta})_{\alpha=0} = T \left[\frac{15.22 + 149.78 \cos 2\beta}{70.1 - 45.5 \cos 2\beta + 18.96 \cos 4\beta} \right]$

これにより数値計算を行い第 2 表に示す。

第 2 表

β	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
x	10.0	9.9	9.57	9.0	8.17	7.03	5.6	3.9	2.01	0
y	0	1.14	2.19	3.1	3.8	4.33	4.68	4.87	4.97	5
σ_{β}/T	3.79	3.75	3.36	2.83	0.93	-0.18	-0.72	-0.92	-0.99	-1

又この結果を第3図に示す。



第 3 図

次に $\frac{s-t+r}{2t} = \frac{1}{2}$ の時を考え $s = 10.78$ $r = -0.78$ $t = 5$ とすると

$$(\sigma_{\beta})_{\alpha=0} = \left[\frac{-22.08 + 306.38 \cos 2\beta}{146.7 - 131.2 \cos 2\beta + 50.45 \cos 4\beta} \right] T$$

これによると

$$(\sigma_{\beta})_{\alpha=0} = (\sigma_{\beta})_{\max} = 4.31 T$$

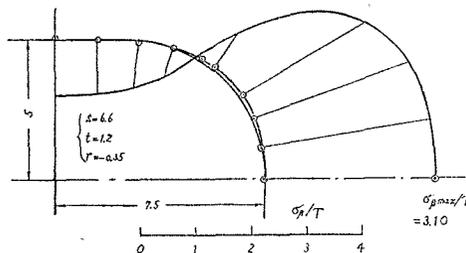
次に $\frac{s-t+r}{2t} = 2$ の時を考え $s = 6.6$, $t = 1.2$, $r = -0.35$ とすると

$$(\sigma_{\beta})_{\alpha=0} = \left[\frac{25.2 + 103.50 \cos 2\beta}{46.08 - 18.36 \cos 2\beta + 13.86 \cos 4\beta} \right] T$$

これによる計算の結果を第3表, 第4図に示す。

第 3 表

β	0°	10°	20°	30°	45°	60°	70°	80°	90°
σ_{β}/T	3.10	3.10	3.03	0.78	0.78	-0.55	-0.86	-0.97	-1



第 4 図

以上の結果は略々 Frocht, Leven の与えた値と一致しており, 第4表に比較して示す.

第 4 表

$s - t + r/2t$	$\sigma_{\beta \max}/T$	Frocht, Leven $\sigma_{\beta \max}/T$
1/2	4.31	
1	3.79	3.84
2	3.10	3.0

扱以上の結果を考察すると $(s-t+r)/2t$ が増加するに従つて K の値は減少する傾向を示し無限大に近づくと単一円孔の時の値に近づくとであろう. 故にこの場合は単一円孔の時の値より常に高い値を示すものと推定され, 従つてこの場合は集中応力の軽減という点からは見るべきものはない.

iv) x 方向に平行に無限遠で一様引張を受けた場合

$x \rightarrow \infty$ に於ける境界条件は

$$\sigma_x = T \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = 0$$

∴ (19) 式と (13) 式の最初の式にこの境界条件を入れて

$$T = 2 \left[\sum_1^k n A_n (x + iy)^{n-1} + \sum_1^k n \bar{A}_n (x - iy)^{n-1} \right]_{x \rightarrow \infty}$$

∴ $n = 2, 3, 4, \dots, k$ に対しては $A_n = 0$

$$A_1 = \frac{T}{4}$$

又 (19) 式と (13) 式の二番目の式にこの境界条件を入れると

$$-T = 2 \left[\sum_1^{k'} n B_n (x + iy)^{n-1} \right]_{x \rightarrow \infty}$$

∴ $n = 2, 3, 4, \dots, k'$ に対しては $B_n = 0$

$$B_1 = -\frac{T}{2}$$

$$\therefore \phi(z) = \frac{T}{4} z + \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

$$\psi(z) = -\frac{T}{2} z + \sum_1^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$$

故に opening の境界で

$$\varphi(\sigma) = \frac{T}{4} \left(s\sigma + \frac{t}{\sigma} + \frac{r}{\sigma^3} \right) + \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{\left(s\sigma + \frac{t}{\sigma} + \frac{r}{\sigma^3} \right)^n}$$

$$\psi(\sigma) = -\frac{T}{2} \left(s\sigma + \frac{t}{\sigma} + \frac{r}{\sigma^3} \right) + \sum_1^{\infty} \frac{b_n}{\left(s\sigma + \frac{t}{\sigma} + \frac{r}{\sigma^3} \right)^n}$$

$$\bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \left[\frac{T}{4} - \sum_1^{\infty} \frac{n\bar{a}_n}{\left(\frac{s}{\sigma} + t\sigma + r\sigma^3 \right)^{n+1}} \right] z'\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

$$\bar{\psi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) = -\frac{T}{2} \left(\frac{s}{\sigma} + t\sigma + r\sigma^3 \right) + \sum_1^{\infty} \frac{\bar{b}_n}{\left(\frac{s}{\sigma} + t\sigma + r\sigma^3 \right)^n}$$

$$\therefore \varphi(\sigma) + \frac{s\sigma^4 + t\sigma^2 + r}{\sigma^3} \left[\frac{T}{4} - \sum_1^{\infty} \frac{n\bar{a}_n}{\left(\frac{s}{\sigma} + t\sigma + r\sigma^3 \right)^n} \right]$$

$$- \frac{T}{2} \left(\frac{s}{\sigma} + t\sigma + r\sigma^3 \right) + \sum_1^{\infty} \frac{\bar{b}_n}{\left(\frac{s}{\sigma} + t\sigma + r\sigma^3 \right)^n} = 0$$

以下 iii) と同様な操作をして

$$\varphi(\zeta) = \frac{T}{4} \left(s\zeta - \frac{t}{\zeta} - \frac{r}{\zeta^3} \right) + \frac{T}{2} \frac{s}{\zeta}$$

\(\therefore\) (18) 式から孔の周縁の応力は

$$(\sigma_{\beta})_{\alpha=0} = T \left[\frac{s^2 - t^2 - 9r^2 + 2st + (-2s^2 - 6rt + 6rs) \cos 2\beta}{s^2 + t^2 + 9r^2 + 2(3rt - ts) \cos 2\beta - 6rs \cos 4\beta} \right]$$

$\frac{s-t+r}{2t} = 1$ の場合に就き近似の仕方をかえて計算する。即ち (1) $s = 7.95$ $r = -0.5$

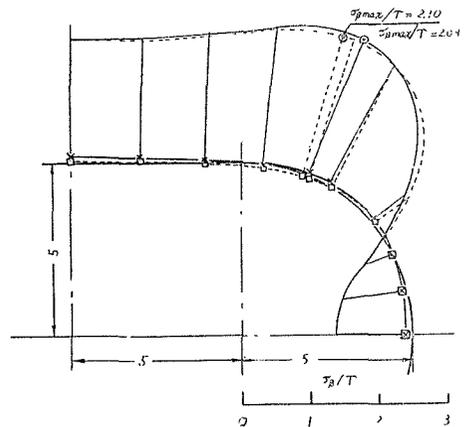
$t = 2.35$ と選ぶと

$$(\sigma_{\beta})_{\alpha=0} = T \left[\frac{92.8 - 143.20 \cos 2\beta}{70.97 - 44.42 \cos 2\beta + 23.85 \cos 4\beta} \right]$$

(2) $s = 8.0$ $r = -0.5$ $t = 2.3$ と選ぶと

$$(\sigma_{\beta})_{\alpha=0} = T \left[\frac{93.26 - 145.1 \cos 2\beta}{71.54 - 43.7 \cos 2\beta + 24 \cos 4\beta} \right]$$

これ等の結果を第5図, 第5表に示す。



第 5 図

第 5 表

	x	9.8	9.71	9.42	8.92	7.64	6.8	5.65	3.96	2.04	0
1	y	0	1.22	2.35	3.3	4.31	4.61	4.85	5.01	5.08	5.1
	σ_{β}/T	-1	-0.88	-0.41	0.58	1.98	2.10 (max)	2.02	1.86	1.74	1.69
	β	0°	10°	20°	30°	45°	$\frac{52^\circ}{50^\circ}$	60°	70°	80°	90°
2	σ_{β}/T	-1	-0.88	-0.42	0.55	1.96	2.09 (max)	1.96	1.87	1.75	1.71
	x	9.8	9.71	9.43	8.92	7.63	7.05	5.65	3.95	2.04	0
	y	0	1.24	2.33	3.35	4.38	4.68	4.93	5.10	5.18	5.2

即ちこの程度近似の仕方を変える事によつて殆んど差は出てこない。

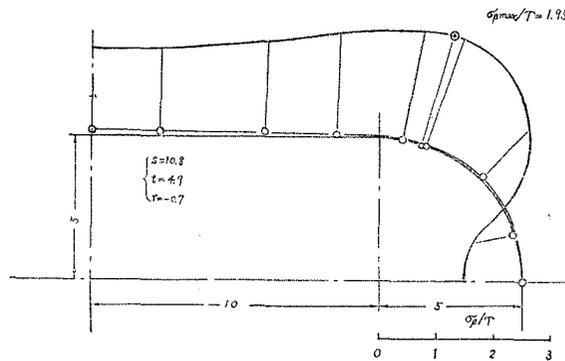
次に $\frac{s-t+r}{2t} = \frac{1}{2}$ の場合として $s=10.8$ $t=4.9$ $r=-0.7$ ととる。

$$(\sigma_{\beta})_{\alpha=0} = \frac{194.06 - 258.08 \cos 2\beta}{145.06 - 126.42 \cos 2\beta + 45.36 \cos 4\beta}$$

この結果を第6表、第6図に示す。

第 6 表

β	0°	10°	20°	30°	46°	50°	60°	70°	80°	90°
x	15.0	14.65	14.8	13.60	11.43	10.7	8.53	5.98	2.37	0
y	0	1.37	2.63	3.65	4.71	4.87	5.11	5.19	5.20	5.2
σ_{β}/T	-0.99	-0.79	-0.06	1.10	1.95 (max)	1.92	1.74	1.57	1.46	1.43



第 6 図

次に $\frac{s-t+r}{2t} = 2$ の場合を考える

$$s = 6.6 \quad r = -0.35 \quad t = 1.2 \quad \text{とする}$$

$$(\sigma_{\beta})_{\alpha=0} = \frac{56.86 - 98.46 \cos 2\beta}{46.1 - 18.36 \cos 2\beta + 13.86 \cos 4\beta}$$

これによると $\sigma_{\beta \max}/T = 2.19$ ($\beta = 49^\circ$) となる.

又以上の結果で $r=t=0$ とすると単一円孔の時に一致する.

扱以上の結果から考察するとこの場合は $\frac{s-t+r}{2t}$ が増大すると K も増大し $\frac{s-t+r}{2t} \rightarrow \infty$ で単一円孔の時の値に一致する. 而してこの場合は $\frac{s-t+r}{2t}$ が $1 \sim 1/2$ 位の間では K の変化は少く, この範囲で K の値は単一円孔の時の $70 \sim 65\%$ 位迄減少する. 又この場合は集中応力を有効に軽減せしめる範囲は広く設計上有利であろう.

4 結 言

今回は規則的に2個並んだ円孔を取り扱い二円孔の排列を適当にする事により単一円孔の時の集中応力の $86 \sim 86.7\%$ 位迄最大集中応力を減ずる事が出来る事を示し, 更に進んで ovaloid opening に就き解析計算し $65 \sim 70\%$ 位迄減少し得る事を示した. 尚今回は主として無限板に就いて取り扱つたが今後は有限板に就いての考察に進まねばならない. 又不規則な排列の時に就いての解析へと進まねばならない. 又疲労破壊に就いても現在の考察では充分とはいえずこの解析も今後の課題として重要であろう. 尚本論文の終りに臨み種々御批判, 御検討下され何かと便宜を与えて下さつた藤井先生又種々御協力下さつた教室及び実験室の方々に衷心より謝意を表します. 又この研究は昭和二十九年文部省 科学研究助成補助金を使用した事を茲に付記致します.

文 献

- 1) H. Neuber: Kerbspanungs lehre.
- 2) 石橋 正: 九大工学紀要, 11, 1 (1948).
- 3) 鶴戸口英善: 日本機械学会誌, 8, 9 月 359 号 (1948).
- 4) R.C.J. Howland: Phil. Trans. Roy. Soc., A 229, p. 48~86 (1930).
- 5) M.M. Frocht: Mech. Engg., 58 Aug. p. 485-489 (1936).
- 6) Wahl and Beeuwkes: Trans. A.S.M.E., 56 Aug. p. 617-625 (1934).
- 7) E.G. Coker: Proc. Phy. Soc., 95 (1912).
- 8) G.B. Jeffery: Phil. Trans. Roy. Soc., London vol. A 221, p. 265~293 (1921).
- 9) E. Weinel: ZAMM 17, p. 276~287 (1937).
- 10) 鶴戸口英善: 応用数学力学, 1 卷 1 号, 2 号 (1937).

- 11) C.B. Ling: J. App. Phy., 16 Jan. p. 77~82 (1948).
- 12) 渥美 光: 日本機械学会論文集 20 卷 99 号 (1954)
- 13) 高木貞治: 解析概論, p. 242, 249, 253, 254.