扇形断面をもつ棒の捩りに就ての一考察

藤　井　忠　二
半　沢　　　宏

（昭和30年3月3日　受理）

On Some Solutions of the Torsion Problems of a Bar Having the Semi-Circular Cross-Section

Chuji FUJII
Hiroshi HANZAWA

Abstract

In this paper, the authors consider some solutions of the torsion problems of a straight bar having the semicircular cross-section and show that the solution using stress function which we obtained is comparatively simple.

緒　　言

扇形断面をもつ棒の捩りに就ては既に正解が求められている．例えば等角写像を用い $x+iy=ce^{\xi+i\eta}$ とすれば，極座標（$x=r\cos\mu$，$y=r\sin\xi$）により $r=ce^{\xi}$ となり，ξ を常数とすれば r は一定となり円弧を得又 η を常数とすれば原点を通る直線を得るので，斯かる複素数函数を用いて扇形断面を有する棒の捩りの問題が解かれている．

斯かる際に於ても解法は可成りの手数を要する．著者は本論で捩りの応力函数を用いて解く一二の例を示し参考に供し，この解法が割合簡単であることを示したい．

1　Ritz の方法による近似解法

今捩りの応力函数を F，剪断応力を τ_x，τ_y とすると

$$\tau_x=-\frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\tau_y=\frac{\partial F}{\partial x}$$

F は断面周辺に於て常数

なることを要する．そこで F を次の様においてみる．

$$F = G\gamma \sum_{m}^{\infty} A_m (r^2 - c r^{m\alpha}) \cos m\alpha\theta \qquad (1)$$

但し G = 剪断弾性係数

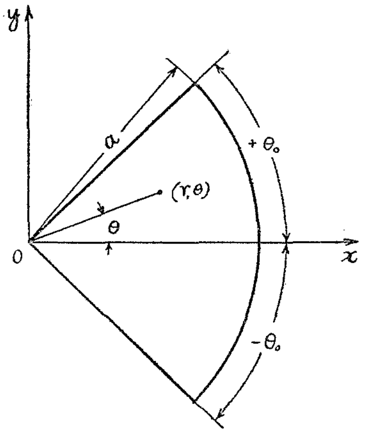
γ = 単位長さの捩れ角

$\alpha = \pi/2\theta_0$

$m = 1, 3, 5, \cdots$

尚 A_m 及び c は未知係数である．

偖て，第1図の如き断面に就て考えるに，（1）は明らかに $\theta = \pm\theta_0$ で0となり，又 $r = 0$ で0となる．更に $r = a$ で F は0となる必要があるから，それには



第 1 図

$$a^2 - c a^{m\alpha} = 0$$

となる様に未知係数 c を決めればよい．即ち

$$c = a^{2-m\alpha} \qquad (2)$$

然るときは周辺に於て $dF = 0$ なる条件が満足される．故に（1）は唯今の場合周辺の条件を満足する函数である．偖てこの際の strain energy は

$$A = \frac{1}{2G} \iint \left[\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2\right] r\,dr\,d\theta \qquad (3)$$

で表わされ，又捩りモーメントは

$$M = 2 \iint F\,r\,dr\,d\theta \qquad (4)$$

で表わされる．尚お τ_x 及び τ_y を r 及び θ の函数で求めると次の様になる．

$$\left.\begin{aligned} -\tau_x &= \frac{\partial F}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \\ \tau_y &= \frac{\partial F}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

従つて合成剪断応力は

$$\tau = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2} \qquad (6)$$

となる．次に（1）より次の計算を行う．

$$\frac{\partial F}{\partial r} = G\gamma \sum_{m}^{\infty} A_m [2r - c(m\alpha) r^{m\alpha - 1}] \cos m\alpha\theta$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 = G^2\gamma^2 \sum_m^\infty \sum_m^\infty A_m A_n [2r - c(m\alpha) r^{m\alpha-1}][2r - c(n\alpha) r^{n\alpha-1}] \cos m\alpha\theta \cdot \cos n\alpha\theta$$

$$\text{但し} \quad n = 1, 3, 5, \cdots \qquad (7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = -G\gamma \sum_m^\infty A_m (m\alpha)[r^2 - cr^{m\alpha}] \cdot \sin m\alpha\theta$$

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2 = G^2\gamma^2 \sum_m^\infty \sum_n^\infty A_m A_n (m\alpha)(n\alpha)[r - cr^{m\alpha-1}][r - cr^{n\alpha-1}] \sin m\alpha\theta \cdot \sin n\alpha\theta \qquad (8)$$

以上の式で簡単のために次の様におく.

$$\left.\begin{aligned} f_m &= 2r - c(m\alpha) r^{m\alpha-1} \\ f_n &= 2r - c(n\alpha) r^{n\alpha-1} \\ g_m &= r - cr^{m\alpha-1} \\ g_n &= r - cr^{n\alpha-1} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

これによつて（7）及び（8）を書きかえると

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 = G^2\gamma^2 \sum_m^\infty \sum_n^\infty A_m A_n f_m f_n \cos m\alpha\theta \cdot \cos n\alpha\theta \qquad (7a)$$

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2 = G^2\gamma^2 \sum_m^\infty \sum_n^\infty A_m A_n (m\alpha)(n\alpha) g_m g_n \cdot \sin m\alpha\theta \cdot \sin n\alpha\theta \qquad (8a)$$

偖てこの積分を行うにあたり

$$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \cos m\alpha\theta \cdot \cos n\alpha\theta = 0, \quad \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \sin m\alpha\theta \cdot \sin n\alpha\theta \cdot d\theta = 0,$$

$$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \cos^2 m\alpha\theta \, d\theta = \theta_0, \quad \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \sin^2 n\alpha\theta \, d\theta = \theta_0$$

なることを考えて（7a）及び（8a）より次の式を導く.

$$\iint \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 r\,dr\,d\theta = G^2\gamma^2\theta_0 \sum_m^\infty A_m^2 \int_0^a f_m^2 r\,dr \qquad (10)$$

$$\iint \left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2 r\,dr\,d\theta = G^2\gamma^2\theta_0 \sum_m^\infty A_m^2 (m\alpha)^2 \int_0^a g_m^2 r\,dr \qquad (11)$$

以上求めた諸式を用いて A 及び M を求むれば結局次の如くなる.

$$A = \frac{G\gamma^2\theta_0 a^4}{8} \sum_m^\infty A_m^2 (m\alpha - 2)^2 \qquad (3a)$$

$$M = G\gamma a^4 \sum_m^\infty A_m \frac{m\alpha - 2}{m\alpha + 2} \cdot \frac{\sin\frac{m\pi}{2}}{m\alpha} \tag{4a}$$

今　$\delta(A - M\gamma) = 0$　をつくり A_m を求めると

$$A_m = \frac{4}{(m\alpha)^2 - 4} \cdot \frac{\sin\frac{m\pi}{2}}{m\alpha\theta_0} \tag{12}$$

ここに A_m が決定したから（1）の F は完全に唯今の条件を満足する様に求められたわけである．従つてこれより応力の計算が出来る．

以上論述した様に簡単な手数によつて捩り応力函数 F を求める事が出来る．次節では微分方程式より解を求めてみる．実は（1）の F は随意に選んでみたが，これが正解である事を述べ度い．

2　微分方程式による解法

捩り応力函数 F の満足すべき微分方程式は唯今の場合次の様に書ける．

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = -2G\gamma \tag{13}$$

唯今も前節と同様な断面について考える．

第1図を参照して断面は θ に対し偶函数であることに注意して (13) の右辺を Fourier's Series に展開して次の様に書き表わす．

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = -\frac{8G\gamma}{\pi}\sum_m^\infty \frac{\sin\frac{m\pi}{2}}{m}\cos m\alpha\theta \tag{13 a}$$

但し　$\alpha = \dfrac{\pi}{2\theta_0}$

$m = 1, 3, 5, \cdots\cdots$

今 F を F_1 として次の様においてみる，

$$F_1 = G\gamma r^2 \sum_m^\infty \beta_m \cos m\alpha\theta \tag{14}$$

但し β_m は未知係数である．(14) を (13a) に入れると

$$\sum_m^\infty \beta_m[(m\alpha)^2 - 4]\cos m\alpha\theta = \frac{8}{\pi}\sum_m^\infty \frac{\sin\frac{m\pi}{2}}{m}\cos m\alpha\theta$$

よつて β_m は次の様になる，

$$\beta_m = \frac{\dfrac{8}{\pi}\dfrac{\sin\dfrac{m\pi}{2}}{m}}{(m\alpha)^2-4} = A_m \tag{15}$$

斯くして (14) は (13) の解であることが判る．(14) は明らかに $\theta=\pm\theta_0$ で 0 であるが $r=a$ では 0 とならないので，次の微分方程式の補解 F_0 を求めて，F_0 及び F_1 の両者を考えて周辺の条件が完全に満足される F を見出したい．

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}=0 \tag{16}$$

今上式の解を F_0 として次の式をとりあげる，

$$F_0 = G\gamma\sum_m^\infty B_m r^{m\alpha}\cos m\alpha\theta \tag{17}$$

但し　$\alpha=\dfrac{\pi}{2\theta_0}$

$m=1, 3, 5, \cdots\cdots$

B_m は未知係数である．(17) は (16) の解であることは明らかであり $\theta=\pm\theta_0$ で $F_0=0$ である．偖て $r=a$ に於て $F_0+F_1=0$ となるためには B_m は次の値をとればよい．即ち

$$\begin{aligned} B_m &= -a^{2-m\alpha}\cdot\beta_m \\ &= -a^{2-m\alpha}\cdot A_m \end{aligned} \tag{18}$$

よつてこの際の F は F_0+F_1 であつて (1) と同式となる．即ち前述せる何れの解によるも問題は解けたわけであるが．次に中空扇形断面の場合を考察する．

3　中空扇形断面をもつ場合の解法

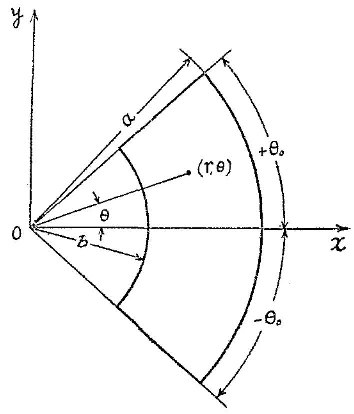
本節では第2図に示す様な中空扇形断面について述べる．この場合前節の解法により次の様に F_1 をとつてみる．

$$F_1 = G\gamma r^2\sum_m^\infty \beta_m\cos m\alpha\theta \tag{19}$$

但し　$\alpha=\dfrac{\pi}{2\theta_0}$

$m=1, 3, 5, \cdots\cdots$

上式を (13 a) に代入して β_m を求めれば前節と同様に (15) で与えられ，即ち



第 2 図

$$\beta_m=\frac{\frac{8}{\pi}\frac{\sin\frac{m\pi}{2}}{m}}{(m\alpha)^2-4}=\frac{\frac{4}{\theta_0}\frac{\sin\frac{m\pi}{2}}{m\alpha}}{(m\alpha)^2-4} \tag{20}$$

である．次に (16) の補解を次の様にとる．

$$F_0=G\gamma\sum_m^{\infty}[B_m r^{m\alpha}+C_m r^{-m\alpha}]\cos m\alpha\theta \tag{21}$$

B_m 及び C_m は未知係数で m 及び α の値は前述せるところの値と同一である．(21) は (16) の解であることは云う迄もないので，この際も $F=F_0+F_1$ をつくつて周辺の条件を満足する様にする．(19) 及び (21) は何れも $\theta=\pm\theta_0$ に於て F_1 及び F_0 共に 0 となり，$F=0$ の条件を満足する．次に $r=a$ 及び $r=b$ に於て $F=0$ となるためには次の 2 つの条件式が成立する．

$$a^2\beta_m+a^{m\alpha}B_m+a^{-m\alpha}c_m=0$$

$$b^2\beta_m+b^{m\alpha}B_m+b^{-m\alpha}c_m=0$$

これらより B_m 及び c_m を求めると．

$$\left.\begin{aligned}B_m&=-a^{2-m\alpha}\frac{1-\lambda^{2+m\alpha}}{1-\lambda^{2m\alpha}}\beta_m\\ c^m&=-a^{2+m\alpha}\frac{1-\lambda^{2-m\alpha}}{1-\lambda^{-2m\alpha}}\beta_m\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$$\lambda=\frac{b}{a} \tag{23}$$

従つて $F=F_0+F_1$ は $\theta=\pm\theta_0$ で 0 となり又 $r=a$ 及び $r=b$ に於て 0 となる故 F は周辺の条件を満足する．依つてこの場合も F が決定出来たから応力及び捩りモーメントの計算は簡単に導かれる．

4 結　　言

本論では応力函数 F を用いて扇形断面の解法が可成り簡単に求められることを示唆した．数学的計算は既に色々と示されているので応力函数 F を決定することに重点をおいた事を附言しておく．