



# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	平板に於ける応力集中と拡散に就いて. 第2報 : 一様引張を受ける二円孔をもつ平板の最大応力点の近傍に就いて
Author(s)	渡辺, 旨惟; Watanabe, Munekore
Citation	北海道大學工學部研究報告, 13, 57-66
Issue Date	1955-12-15
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/40577">https://hdl.handle.net/2115/40577</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	13_57-66.pdf



# 平板に於ける応力集中と拡散に就いて

(第 2 報)

— 一様引張を受ける二円孔をもつ平板の最大応力点の近傍に就いて —

渡 辺 旨 惟

(昭和 30 年 9 月 30 日受理)

## On the Problems of the Stress Concentration and the “Entlastung” of the Plates (2nd Report)

On the Neighbourhood of the Max. Stress Point  
on the Plate with two circular Opennings subjected to pure Tension

Munekore WATANABE

### Abstract

In the 1st report, the “Entlastung” of the max. stress point was researched for the infinite plate, with two circular opennings, subjected to pure tension.

According to Ishibashis research, however, not only the max. stress but also the stress at the neighbourhood of the max. stress point influences to failure, fracture and fatigue fracture. And so the aim of this paper is to ensure the “Entlastung” of the stresses in the neighbourhood of the max. stress point for the infinite plate, with two circular opennings, which is subjected to pure tension from the directions, having the angles of 0, 90 and any others to the arrangement of two opennings.

### 1 緒 言

第一報<sup>1)</sup>に於て述べた如く応力集中を如何にして有効適切に軽減させるかを明瞭にすることは機械設計等実際上の見地から見て大なる意義を持つものと思われる。かかる見地から前回に引続き“Entlastung”に就いて考察する。第一報に於ては一様引張の場合に就き荷重方向に或いはそれに直角に排列している等大二円孔を持つ平板に於て生ずる最大応力に就いて考察した。而して今回はこの二つの場合の中間の場合として任意方向から一様引張を受ける二円孔を有する平板に就いて考察する。又破損、破壊、疲労、破壊の三つを軽減を論ずる場合の基本的な指標とすることは第一報に於けると同様であり石橋正氏の研究<sup>2)</sup>等から見て最大応力のみならずその近傍の応力が上記三つの指標に対して影響を与える。従つて今回は最大応力の近傍を考察の対象とする。

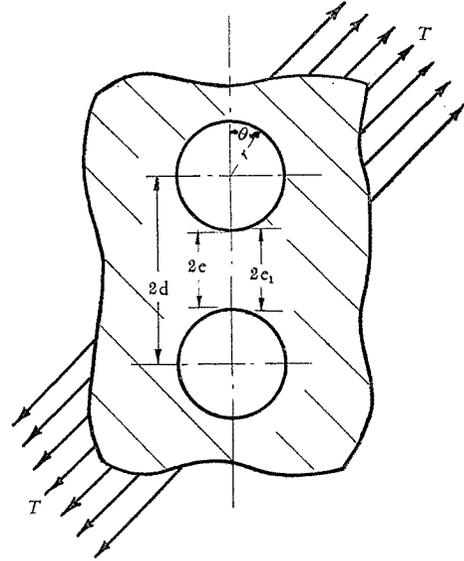
## 2 解析及び考察

## i) 任意方向の引張を受ける等大二円孔を有する平板

この場合に就いては渡辺恵弘氏<sup>3)</sup>が無有限遠の引張条件を第1図の如く任意角  $\phi$  にとつて、その場合の応力式を導き特別な場合として  $\phi = 0$ ,  $\phi = \pi/2$  にとつた時の解を出しているが実際の応力値を算出することは極めて困難を伴うと思われる。又鶴戸口氏<sup>4)</sup>は無有限遠の引張の応力条件を  $\sigma_x = T \cos^2 \phi$ ,  $\sigma_y = T \sin^2 \phi$ ,  $\tau_{xy} = 1/2 T \sin 2\phi$  で重畳の原理を用いて行えば良いことを述べている。即ち

$$[\sigma_{\beta_1}/T]_s = [\sigma_{\beta_1}/T]_I \cos^2 \phi + [\sigma_{\beta_1}/T]_{II} \sin^2 \phi + [\sigma_{\beta_1}/S]_s 1/2 \sin 2\phi \quad (1)$$

で応力式を与え  $\phi = 45^\circ$  の場合に就き計算している。但し (1) 式にて  $[\sigma_{\beta_1}/T]_I$  は二円孔の並ぶ方向に直角に無有限遠で一様引張を受けた時の応力値で即ち



第1図

$$\sigma_{\beta_1} = 2T \left[ \frac{K \sinh \alpha_1 \{2 \sinh \alpha_1 - (\cosh \alpha_1 - \cos \beta) (1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cos n\beta)\}}{+ \cos 2\theta + (\cosh \alpha_1 - \cos \beta) \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos n\beta} \right] \quad (2)$$

で与えられる<sup>4)</sup>。但し

$$S_n = n \left\{ \frac{(n-1) \cosh(n+1)\alpha_1 - (n+1) \cosh(n-1)\alpha_1}{n \sinh 2\alpha_1 + \sinh 2n\alpha_1} - 2e^{-n\alpha_1} (n \sinh \alpha_1 - \cosh \alpha_1) \right\} \quad (3)$$

$$Q_n = e^{-n\alpha_1} - \frac{\sinh n\alpha_1}{n \sinh 2\alpha_1 + \sinh 2n\alpha_1} \quad (4)$$

$$K = \frac{2 \sinh^2 \alpha_1 \sum_{n=1}^{\infty} L_n}{G(\alpha_1)} \quad (5)$$

$$L_n = \frac{n}{n \sinh 2\alpha_1 + \sinh 2n\alpha_1} \quad (n \geq 1) \quad (6)$$

$$G(\alpha_1) = \frac{1}{2} + \frac{\sinh^3 \alpha_1}{\cosh \alpha_1} - 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} M_n \quad (7)$$

$$M_n = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{2} + \frac{n^2 \sinh^2 \alpha_1 - \sinh^2 n\alpha_1}{n \sinh 2\alpha_1 + \sinh 2n\alpha_1} \right) \quad (8)$$

又  $[\sigma_{\beta_1}/T]_{II}$  は二円孔の並ぶ方向に無限遠で一様引張を受けた場合の応力値で即ち

$$\sigma_{\beta_1} = 2T \left[ \begin{array}{l} K' \sinh \alpha_1 \{ 2 \sinh \alpha_1 - (\cosh \alpha_1 - \cos \beta) (1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cos n\beta) \} \\ - \cos 2\theta - (\cosh \alpha_1 - \cos \beta) \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos n\beta \end{array} \right] \quad (9)$$

で与えられる. 但し  $K' = \frac{1 - 2 \sinh^2 \alpha_1 \sum_{n=1}^{\infty} L_n}{G(\alpha_1)}$  (10)

又  $[\sigma_{\beta_1}/S]_S$  は無限遠で単純剪断を受ける場合の二円孔を有する平板の応力値で即ち

$$\sigma_{\beta_1} = 4S \left\{ -\sin 2\theta + (\cosh \alpha_1 - \cos \beta) \left( -\frac{e^{-4\alpha_1}}{\cosh 2\alpha_1} \sin \beta + \sum_{n=2}^{\infty} U_n \sin n\beta \right) \right\} \quad (11)$$

で与えられる.

但し

$$U_n = n \left\{ \frac{(n+1) \sinh(n-1)\alpha_1 - (n-1) \sinh(n+1)\alpha_1}{\sinh 2n\alpha_1 - n \sinh 2\alpha_1} + 2(n \sinh \alpha_1 - \cosh \alpha_1) e^{-n\alpha_1} \right\} \quad (12)$$

又以上の式に於て  $\alpha, \beta$  は双極座標を用いた時の座標を示す. なお (1) 式にて  $\phi = 0, \phi = \frac{\pi}{2}$  とすれば特別の場合として二円孔の並ぶ方向に直角に一様引張を受けた場合, 二円孔の並ぶ方向に一様引張を受けた場合を夫々与えることになる. 扱以上の諸式を用いて  $\phi = 30^\circ, \phi = 45^\circ$  及び  $\phi = 60^\circ$  の場合に就き計算してその円孔周縁の応力値  $\sigma_{\beta_1}/T$  の値を第1表, 第2表, 第3表及び第2図, 第3図, 第4図に示す. 但し  $r/d = 1/\cosh \alpha_1$  (13)

$$\text{又 } \cos \beta = \frac{\cos \theta \cosh \alpha_1 + 1}{\cosh \alpha_1 + \cos \theta} \quad (14)$$

第 1 表

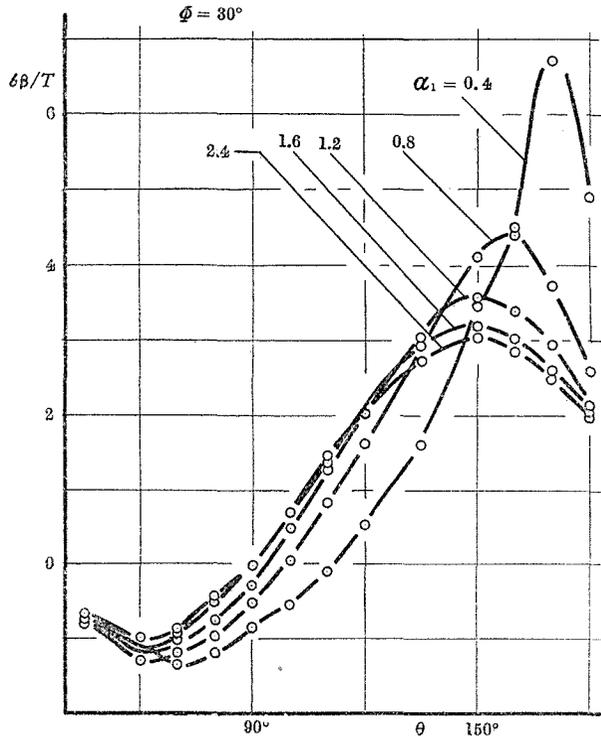
$\alpha \backslash \theta$	30°	45°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	135°	150°	160°	170°	180°	$\theta / r/d$
0.4	0.079	-0.674	-1.2	-1.343	-1.183	-0.85	-0.563	-0.111	0.529	1.59	3.465	4.509	6.726	4.889	0.9254
0.8		-0.793	-1.301	-1.199	-0.973	-0.523	0.067	0.833	1.619	2.924	4.12	4.389	3.722	2.611	0.7479
1.2		-0.792		-1.035	-0.784	-0.288	0.479	1.267	2.031	3.044	3.573	3.408	2.907	2.158	0.5526
1.6		-0.817		-0.93	-0.523	-0.02	0.703	1.364		2.907	3.216	3.041	2.634	2.055	0.3879
2.4	-0.017	-0.727	-0.99	-0.877	-0.447	-0.033	0.708	1.452	2.048	2.735	3.04	2.856	2.502	2.01	0.1796

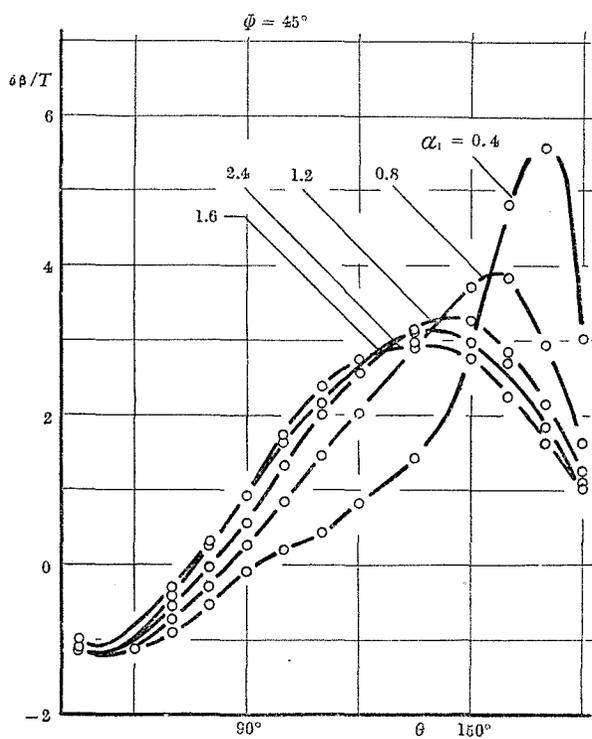
第 2 表

$\alpha \backslash \theta$	45°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	135°	150°	160°	170°	180°	$\theta / r/d$
0.4	-1.109	-1.122	-0.904	-0.532	-0.112	0.189	0.433	0.832	1.436	2.976	4.834	5.576	3.023	0.9254
0.8	-1.152		-0.726	-0.288	0.265	0.844	1.458	2.026	2.880	3.732	3.843	2.944	1.625	0.7479
1.2	-1.112		-0.545	-0.058	0.556	1.334	2.003	2.548	3.155	3.273	2.859	2.16	1.264	0.5526
1.6	-1.102		-0.422	0.259	0.891	1.638	2.154		3.117	2.954	2.698	1.815	1.108	0.3879
2.4	-0.997		-0.309	0.281	0.936	1.726	2.369	2.759	2.977	2.778	2.254	1.638	1.022	0.1796

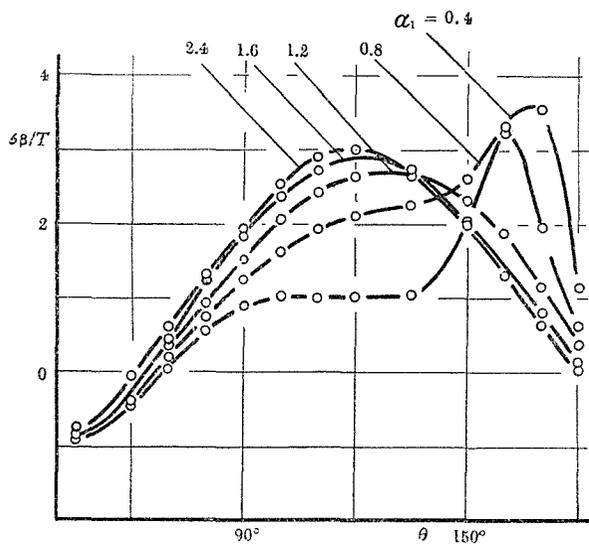
第 3 表

$\alpha$	$\theta$	30°	45°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	135°	150°	160°	170°	180°	$r/d$
0.4		-1.128	-0.913	-0.442	0.038	0.5	0.88	1.022	1.003	1.052	1.043	1.982	3.331	3.544	1.156	0.9254
0.8			-0.91	-0.41	0.193	0.715	1.217	1.601	1.895	2.087	2.259	2.637	3.256	1.793	0.637	0.7479
1.2			-0.849		0.361	0.934	1.489	2.063	2.433	2.609	2.658	2.375	1.854	1.166	0.369	0.5526
1.6			-0.82		0.467	1.229	1.815	2.376	2.716		2.758	2.278	1.525	0.809	0.161	0.3876
2.4		-1.026	-0.73	-0.05	0.612	1.297	1.918	2.539	2.914	2.998	2.678	2.04	1.316	0.617	0.035	0.1796

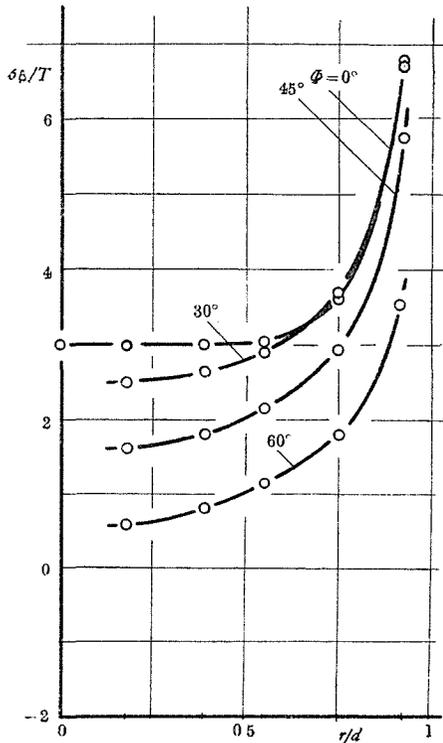




第3図



第4図



第 5 図

これらから任意方向から引張を受けた場合は  $\phi$  が小さくなるに従つて大きな最大応力を示すことが判る. 又計算した  $\phi$  に対しては  $r/d$  が 1 に近づくに従い, 断面収縮の効果もあり, 最大応力及びその近傍の応力は寧ろ増大し軽減の効果は殆ど考えられない.

又横軸に  $r/d$  をとり  $\phi=30^\circ$   $\phi=45^\circ$  及び  $\phi=60^\circ$  の時の  $\theta=170^\circ$  の時の応力,  $\phi=0^\circ$  の時の  $\theta=180^\circ$  の時の応力を縦にとり第 5 図に示す.

ii) 二円孔の並ぶ方向に直角に一樣引張を受ける場合

この場合の応力値は (2) 式により与えられる. これに依りこの場合の円孔壁切線応力を先づ求め, その結果を第 4 表に示す.

第 4 表 A

$\alpha \backslash \theta$	$0^\circ$	$2^\circ$	$5^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$	$80^\circ$	$90^\circ$	$\theta \backslash r/d$
0.4	3.447	3.430	3.365	3.289	3.064	2.877	2.415	1.48	0.361	-0.378	-0.791	-0.895	0.9254
0.8	3.19	3.178	3.123	3.05	2.883	2.702	2.205	1.234	0.096	-0.395	-0.791	-0.884	0.7479
1.2	3.087	3.076	3.050	2.985	2.836	2.649	2.064	1.114		-0.395	-0.791	-0.884	0.5526
1.6	3.02	3.003	2.983	2.924	2.778	2.573	2.018	1.006		-0.395	-0.791	-0.895	0.3879
2.4	3.003	2.990	2.965	2.906	2.766	2.570	2.018	1.006		-0.477	-0.860	-0.965	0.1796
$\infty$	3.000				2.730		2.000	1.000	0.070				0.0000

第 4 表 B

$\alpha \backslash \theta$	$100^\circ$	$110^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$160^\circ$	$170^\circ$	$175^\circ$	$178^\circ$	$180^\circ$	$\theta \backslash r/d$
0.4	-0.860	-0.581	0.000	1.093	2.576	3.919	5.900	6.552	6.716	6.756	0.9254
0.8	-0.762	-0.302	0.267	1.393	2.576	3.105	3.477	3.570	3.593	3.624	0.7479
1.2	-0.727	-0.302	0.267	1.273	2.244	2.715	2.983	3.047	3.052	3.052	0.5526
1.6	-0.762	-0.395	0.137	1.093	2.076	2.581	2.942	3.000	3.000	3.003	0.3879
2.4	-0.872	-0.483	0.041	1.012	2.000	2.541	2.930	2.983	2.997	2.997	0.1796
$\infty$				1.000	2.000					3.000	0.0000

これらの値の中  $0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 150^\circ, 160^\circ, 170^\circ$  及び  $180^\circ$  の場合を横軸に  $r/d$  をとつてプロットすれば第6図の如くである。これから判ることは  $r/d$  が大きくなるにつれて応力が増大していることである。これは  $r/d$  が大きくなるにつれて大きくなる拡散効果を打ち消す程断面収縮による影響が大きいことを意味し軽減の点から見て効果はない。又各角度の場合の曲線の間の関係も示されているがこのままでは拡散効果と断面収縮の影響が共に入っているため拡散効果そのものは明瞭にされ得ない。故に次の如く計算して断面収縮の影響を除く。今  $\theta = \theta_1, \left( \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right) = \left( \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} \right)$  の二点を結ぶ荷重方向に直角な断面に作用する normal stress の総和即ちこの断面を通過する力流を  $X$  とすると  $X$  は

$$X = \left[ \frac{\partial X}{\partial y} \right]_{\left( \begin{matrix} x_1, y_1 \\ +x_1, -y_1 \end{matrix} \right)} \quad (15) \quad \text{なる式で求められる。これを曲線座標に改めると}$$

$$X = \left[ \frac{\partial y}{\partial \alpha} \left( h \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\partial h}{\partial \alpha} \right) (h\lambda) + \frac{\partial y}{\partial \beta} \left( h \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\partial h}{\partial \beta} \right) (h\lambda) \right]_{\left( \begin{matrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ -\alpha_1 \end{matrix} \right)} \quad (16)$$

$h\lambda$  は

$\alpha$  に対し偶函数なることから

$$[h\lambda]_{\alpha = -\alpha_1} = [h\lambda]_{\alpha = \alpha_1} \quad (17)$$

$$\left[ \frac{\partial (h\lambda)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha = -\alpha_1} = - \left[ \frac{\partial (h\lambda)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha = \alpha_1} \quad (18)$$

$$\left[ \frac{\partial (h\lambda)}{\partial \beta} \right]_{\alpha = -\alpha_1} = \left[ \frac{\partial (h\lambda)}{\partial \beta} \right]_{\alpha = \alpha_1} \quad (19)$$

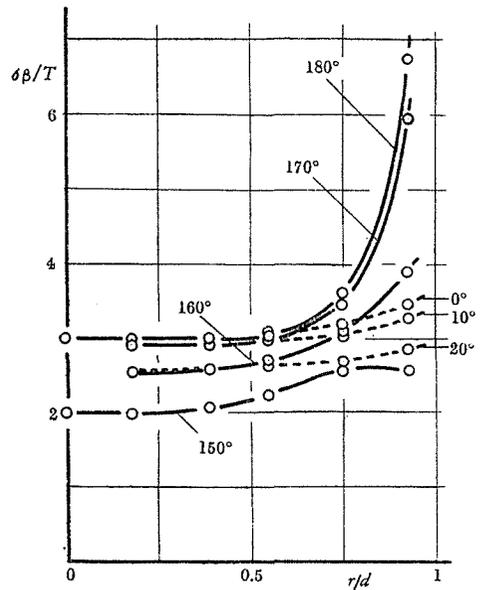
又  $h\lambda$  は  $h\lambda_1$  と  $h\lambda_2$  の和として書かれそれらが境界にてとる値は次の如くである。即ち

$$[h\lambda_1]_{\alpha = \alpha_1} = aTK \{ (1 + \alpha_1 - \log 2) (\cosh \alpha_1 - \cos \beta) + \sinh \alpha_1 (\cosh \alpha_1 \cos \beta - 1) \} \quad (20)$$

$$\left[ \frac{\partial (h\lambda_1)}{\partial \beta} \right]_{\alpha = \alpha_1} = aTK \sinh \alpha_1 (1 + \alpha_1 - \log 2) \quad (21)$$

$$\left[ \frac{\partial (h\lambda_1)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha = \alpha_1} = aTK \sin \beta (1 + \alpha_1 - \log 2 - \sinh \alpha_1 \cosh \alpha_1) \quad (22)$$

$$[h\lambda]_{\alpha = \alpha_1} = \frac{aT}{2} \sinh \alpha_1 \quad (23)$$



第6図

$$\left[ \frac{\partial(hx_2)}{\partial\alpha} \right]_{\alpha=\alpha_1} = \frac{aT}{2} \cosh \alpha_1 \quad (24)$$

$$\left[ \frac{\partial(h\lambda_2)}{\partial\beta} \right]_{\alpha=\alpha_1} = 0 \quad (25)$$

故に (17)~(25) 式を (16) 式に用いて整理すると次の如くなる。

$$X = \frac{1}{(\cosh\alpha - \cos\beta)^2} [aT(\cosh\alpha \cos\beta - 1)^2 + aT \sinh^2\alpha \sin^2\beta + 2aTK \sinh^2\alpha (\cosh\alpha - \cos\beta)^2] \quad (26)$$

$$\text{又断面の中は } e_1 = e + r \{1 - \cos(180 - \theta)\} = a \tanh \frac{\alpha_1}{2} + \frac{a(1 - \cos\theta)}{\sinh\alpha_1} \quad (27)$$

$$\text{で計算出来る。故に平均応力 } \sigma_{mean} \text{ は次の式で得られる。即ち } \sigma_{mean} = \frac{X}{2e_1} \quad (28)$$

この  $\sigma_{mean}$  でその断面の最大応力 (円孔壁切線応力の荷重方向の分応力) を除して  $K$  を求めると断面縮少の影響は除かれたと 考えて良くその  $K$  の値を  $\theta=180^\circ, 175^\circ, 170^\circ, 160^\circ$  及び  $150^\circ$  の時に計算しその結果を第5表, 第7図に示す。

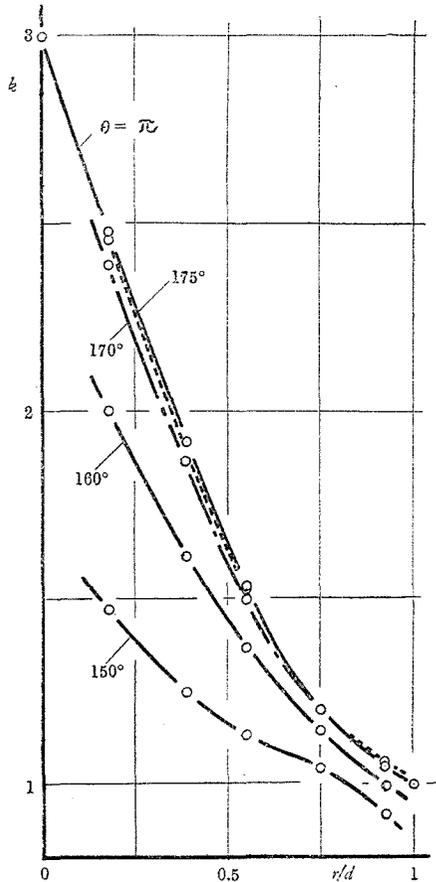
第 5 表

$\alpha$	$\theta$	150°	160°	170°	175°	180°	$\theta$	$r/d$
0						1.000		1.0000
0.4		0.918	0.996	1.058	1.060	1.048		0.9254
0.8		1.044	1.152	1.199	1.204	1.206		0.7479
1.2		1.133	1.371	1.498	1.525	1.529		0.5526
1.6		1.250	1.613	1.874	1.920	1.921		0.3879
2.4		1.475	2.001	2.395	2.460	2.479		0.1796
$\infty$						3.000		0.0000

これらが示す所によると  $\theta = 180^\circ$  の近傍で  $\theta$  が小さくなると “Entlastung” の効果は (断面減少の影響を除けば) それにつれて小さくなる事が明かである。又注目すべきは  $\theta = 150^\circ$  の曲線は  $r/d = 0.65$  の当りに変曲点をもつと云うことであり  $r/d = 0.8 \sim 0.95$  位の範囲に於ける拡散効果は  $\theta = 180^\circ \sim 150^\circ$  の範囲ではそう変わらないと云うことであろう。

iii) 二円孔の並ぶ方向に一樣引張を受ける場合

この場合の円孔壁の切線応力は (9) 式により



第 7 図

与えられる。その結果を第6表に示す。

第6表

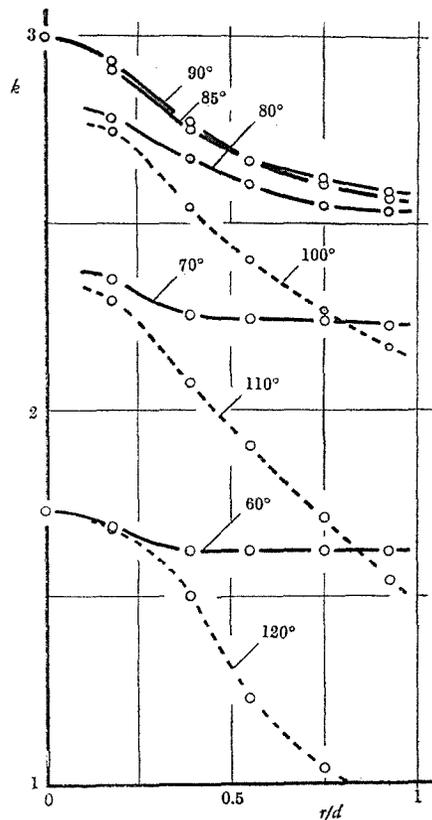
$\alpha \backslash \theta$	45°	60°	70°	80°	85°	90°	95°	100°	110°	120°	135°	150°	$\theta \backslash r/d$
0.4	1.000	1.878	2.372	2.576	2.594	2.567	2.430	2.209	1.645	1.047	0.000	-0.391	0.9254
0.8	1.000	1.878	2.390	2.587	2.634	2.605	2.512	2.305	1.823	1.203	0.064	-0.391	0.7479
1.2	1.000	1.878	2.398	2.647	2.683	2.669	2.605	2.442	2.029	1.422	0.503	-0.152	0.5526
1.6	1.000	1.878	2.400	2.715	2.762	2.776	2.741	2.584	2.209	1.735	0.816	0.000	0.3879
2.4	1.000	1.951	2.500	2.828	2.922	2.936	2.911	2.789	2.442	1.942	0.898	0.000	0.1796
$\infty$	1.000	2.000				3.000				2.000	1.000		0.0000

これらの値の中  $\theta = 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ, 85^\circ, 100^\circ, 110^\circ, 120^\circ$  に対し荷重方向の分応力を計算し、その値  $K$  を第7表、第8図に示す。

これから判ることは  $\theta$  が  $90^\circ$  より小さくなる時は拡散効果はそれにつれて小さくなり  $\theta$  が  $90^\circ$  より大きくなればなる程それにつれてその点の拡散効果は大きくなると云うことであり、対応する二点が近い程拡散効果は大いと云う ii) の場合と同じ興味ある事実を見出すことが出来ることである。而してこの iii) の場合は最大応力点の応力、その近傍の点の応力を共に考慮して有利な軽減効果を与えることが出来又  $90^\circ$  以下の  $\theta$  に対する応力の軽減は  $r/d = 0.8 \sim 1.0$  の可成り広い範囲で大差なくこれは機械設計上追加切欠を作る場合に有利であろう。

### 3 結 言

第一報に引続いて等大二円孔のある無限板が無限遠で任意方向の荷重を受けた時を取り扱い  $\phi = 0^\circ$  の時と  $\phi = 90^\circ$  の時との応力間に任意角の場合の最大応力点及びその近傍点の応力が存在することを示し、 $\phi = 0^\circ, \phi = 90^\circ$  の時の最大応力及びその近傍の点の応力及び拡散作用を考察した。而して今回は無限板を扱っているが実際問題として軽減を論ずる場合には直線縁の影響及び



第8図

第 7 表

$\alpha$	$\theta$	60°	70°	80°	85°	90°	100°	110°	120°	$\theta$	$r/d$
0.4		1.626	2.229	2.537	2.584	2.567	2.175	1.546	0.907		0.9254
0.8		1.626	2.246	2.548	2.624	2.605	2.270	1.713	1.042		0.7479
1.2		1.626	2.253	2.607	2.673	2.669	2.405	1.907	1.231		0.5526
1.6		1.626	2.255	2.674	2.752	2.776	2.545	2.076	1.503		0.3879
2.4		1.690	2.349	2.785	2.911	2.936	2.747	2.295	1.682		0.1796
$\infty$		1.730				3.000			1.73		0.0000

方法効果等が入るのでその影響も考慮せねばならず，破損，破壊及び疲労破壊に対して最大応力及びその近傍点の応力分布が如何なる影響を与えるかは今後の課題として実験的に考察したい。

なお末筆ながら論文を利用させて頂いた鶴戸口先生何かと御批判，御検討下され何かと便宜を与えて下さった藤井先生又種々御協力を頂いた教室及び実験室の方々に衷心より謝意を表します。なお本論文は昭和 29 年度文部省科学研究助成補助金を使用したことを茲に付記致します。

#### 文 献

- 1) 渡辺旨惟：北大工学部研究報告，12 号（1954）。
- 2) 石橋 正：金属の疲労と破壊の防止。
- 3) 渡辺恵弘：九大工学彙報 6 卷 2 号（1931）。
- 4) 鶴戸口英善：応用数学力学 1 卷 1, 2 号。（1947）。