



Title	熱授受を伴うガス体の管内流動について
Author(s)	斎藤, 武; Saito, Takeshi; 沢登, 竜彦 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 14, 103-110
Issue Date	1956-06-05
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40583
Type	departmental bulletin paper
File Information	14_103-110.pdf



熱授受を伴うガス体の管内流動について

齋藤 武
沢登 竜彦

(昭和31年2月29日受理)

A Compressible Fluid Flow in a Pipe with Heat Added

Takeshi SAITO
Tatsuhiko SAWANOBORI

Abstract

Steady, nonadiabatic, frictional flow of a compressible fluid in a pipe of constant cross section is treated on the basis of the one-dimensional approximation. The flow condition in any section of a pipe both subsonic and supersonic, can be described as function of the entrance condition, heat added, friction, and pipe length. For heat addition, it is analysed that the limiting flow phenomenon i. e., thermal choking occurs for a given entrance Mach number of the flow and maximum flow temperature exists.

These results are illustrated by applications to the flow through heat-exchanger and combustion chamber of gas turbine or jet engine.

1. は し が き

管内を流動するガス体、特に熱授受を伴う、例えば、ガスタービンなどにおける熱交換器、または燃焼器内を流れるガス、あるいは長距離輸送管内におけるガスまたは蒸気、の流れなど、流体は授受熱量による状態変化とともに、流動摩擦による状態変化をうけることになる。一般に、熱授受を伴う流れについては、例えば R. I. Hocke¹⁾ のように摩擦の影響を考慮せず、一方摩擦を考慮した管内流動については、最近では、例えば H. Baer²⁾ の断熱流れ、R. C. Binder³⁾ の等温流れのように限られた条件の下における考察が多い。しかるに、近年燃料噴射など管内の流れに対する加熱々量は急激に増大し、また流れの流入速度も次第に高速化するなど、熱授受とともに摩擦を考慮せねばならぬ工学上の問題に屢々遭遇する。本報告においては、かかる熱授受を伴う管内流動について、摩擦を考慮した一般的関係を求め、音速以下の流れ、および音速以上の流れにおける計算例を示した。またこのような流れの限界状態を求め検討を行った。

2. 基礎式

流れは定常流動，管径は一定，流体は完全ガスとし，またガスの諸状態値は断面で一様と考えると，管内ガス流動について，次の4式が求められる。

$$\text{エネルギー式} \quad \frac{A}{2g} w_1^2 + c_p T_1 + Q = \frac{A}{2g} w_2^2 + c_p T_2 \quad (1)$$

$$\text{運動量の式} \quad P_1 + \frac{w_1^2}{g v_1} = P_2 + \frac{w_2^2}{g v_2} + f(\lambda) \quad (2)$$

$$\text{連続流れの式} \quad \frac{w_1}{v_1} = \frac{w_2}{v_2} \quad (3)$$

$$\text{完全ガスの式} \quad \frac{P_1 v_1}{T_1} = \frac{P_2 v_2}{T_2} \quad (4)$$

ここで， P, v, T, w はそれぞれ圧力 [kg/m^2]，比体積 [m^3/kg]，温度 [$^{\circ}\text{K}$]，速度 [m/s]，を表わし，添字 1, 2 は任意断面 1, 2 の位置を示す。また， c_p : 等圧比熱 [$\text{kcal}/\text{kg}\cdot^{\circ}\text{C}$]， Q : 断面 1, 2 間における受熱（または放熱）量 [kcal/kg]， A : 仕事の熱当量 $\frac{1}{427}$ [$\text{kcal}/\text{kg}\cdot\text{m}$] とす。

式 (2) の右辺第 3 項の $f(\lambda)$ は管摩擦による圧力低下量を示し， $f(\lambda) = \frac{\lambda w^2 l}{2g D v}$ をもつて表わされる。なお， λ : 管摩擦係数， l : 断面 1, 2 の間隔 [m]， D : 管径 [m] を示す。

いま， $w = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ とおけば $f(\lambda) = \lambda l w_1 (w_1 + w_2) / 4g D v_1$ となり，式 (2) は次のように書き換えられる。

$$P_1 + \frac{w_1^2}{g v_1} = P_2 + \frac{w_2^2}{g v_2} + \frac{\lambda l w_1}{4g D v_1} (w_1 + w_2) \quad (2)'$$

一方，マッハ数 $M = \frac{w}{\sqrt{g k R T}}$ ， $c_p = \frac{k}{k-1} A R$

k : 比熱比， R : ガス恒数

なる関係を式 (1)，(2) に代入すると，温度および圧力の関係は，マッハ数 M の関数として，次のように求められる。

$$T_1 \left[1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 + q \right] = T_2 \left[1 + \frac{k-1}{2} M_2^2 \right] \quad (5)$$

$$P_1 \left[1 + k M_1^2 - k \theta M_1^2 \left\{ 1 + \frac{M_2}{M_1} \sqrt{\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 + q}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}} \right\} \right] = P_2 [1 + k M_2^2] \quad (6)$$

ただし， $q = \frac{Q}{c_p T_1}$ ， $\theta = \frac{\lambda l}{4D}$ とし， q は熱授受量， θ は摩擦量を表わす無次元値である。

また，式 (5)，(6)，(3)，(4) より M_2 を M_1, q, θ, k の関数として求めると，

$$M_2^2 = \frac{[1 + k M_1^2(1 - \theta)]^2 - 2(1 + \theta)k M_1^2(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 + q)}{2k^2 M_1^2(1 + \theta)^2(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 + q) - (k-1)\{1 + k M_1^2(1 - \theta)\}^2} \pm \frac{\{1 + k M_1^2(1 - \theta)\}[\{1 + k M_1^2(1 - \theta)\}^2 - 2M_1^2(1 + k + 2k\theta)(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 + q)]^{\frac{1}{2}}}{2k^2 M_1^2(1 + \theta)^2(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 + q) - (k-1)\{1 + k M_1^2(1 - \theta)\}^2} \quad (7)$$

次に、断面 1, 2 間のエントロピー変化 Δs を求めると、完全ガスのエントロピー変化の式より、

$$\Delta s = c_p \log_e \frac{T_2}{T_1} \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} \quad (8)$$

式 (5), (6) の関係を代入して、マッハ数 M_1, M_2 をもつて表わせれば、次のように示される。

$$\Delta s = c_p \log_e \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2 \frac{\left\{ 1 + k M_1^2(1 - \theta) \right\}^{\frac{k-1}{k}}}{\left\{ 1 + k M_2^2(1 + \theta) \right\}^{\frac{k+1}{k}}} \quad (9)$$

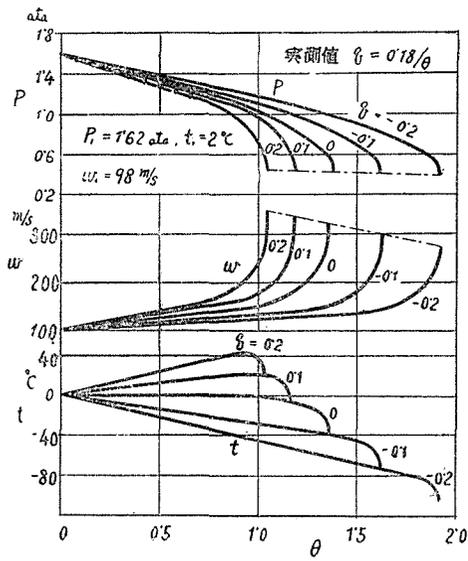
3. 計 算 例

管入口を断面 1 にとれば、任意断面 2 における諸状態値 M_2, T_2, P_2, w_2, s_2 は、断面 1 における諸値および両断面間の授受熱量 q および管摩擦 θ が与えられれば、それぞれ式 (7), (5), (6), (2)', (9) より求められる。ただし、これらの諸式は前述のようにいずれも $w = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ なる仮定のもとに導かれているので、この条件を満足する範囲、すなわち θ の変化に対し、速度が直線的に変化すると看做される範囲においてのみ成立つことになる。従つて、一般に管の長い場合、または管は短くても、摩擦の大きな場合、すなわち θ 値の特に大きい場合には、これらの諸式の適用は上記の条件を満足する θ の範囲内で行わなければならない。このようなときは θ をまず適当量 $\Delta\theta$ に区分し入口状態に対する $\Delta\theta$ 後の $M_2', T_2' \dots$ 等を求め、次にまた適当量 $\Delta\theta$ 後の $M_2'', T_2'' \dots$ 等を求めると言うように、以下逐次計算を重ねて順次管内ガスの状態値を求めることになる。

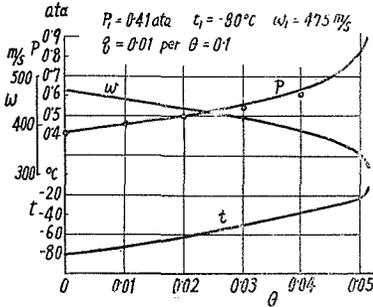
i) 単位長さ当りの授受熱量が一定の場合

音速以下の流れ

管入口で $P_1 = 1.62 \text{ kg/cm}^2 \cdot \text{abs}$, $t_1 = 2^\circ\text{C}$, $w_1 = 98 \text{ m/s}$, $M_1 = 0.295$ なる時、 $q = 0$ (断熱) の場合、および θ の単位量毎に $q = 0.1$ または 0.2 の割合で放熱または受熱する場合、管内流動空気についての計算例を示すと第 1 図のようになる。このような音速以下の流れでは、一般に圧力は流れに沿うて下る膨脹流動となり、速度は逆に増加することとなる。この場合の圧力降下は摩擦抵抗に因く圧力損失のほか、速度増加による圧力低下が加わるので速度上昇の大きなところで、圧力降下が著しく表われている。温度は放熱のときは勿論であるが、受熱のときも、受熱量の少



第 1 図



第 2 図

いときは下り、一定値以上にならなければ上昇を示さない。しかし、いずれもある点で最高温度を示し、そのあとはガス体自身の膨脹のため温度は逆に低下を示す。また、加熱量の多いほど圧力の低下、速度の増加の割合は大となり、放熱のときはこの逆の傾向を示す。図中○印は $q=0.18/\theta$ のときの空気についての実測値である。なお、これらの曲線が θ のある値までで中絶しているのは後述の管内流動の限界状態の存在を示している。

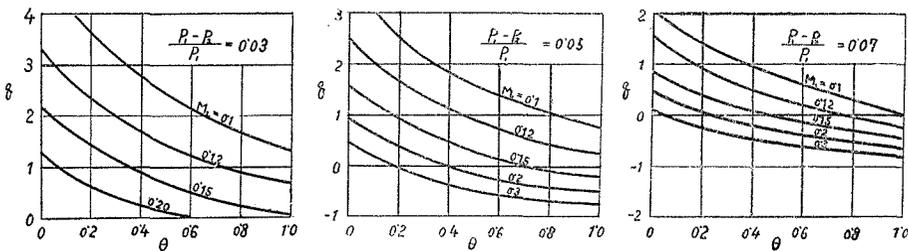
音速以上の流れ

管内に音速以上の流れが噴入したときの状態も同様にして求められる。

例えば、 $P_1 = 0.41 \text{ kg/cm}^2 \cdot \text{abs}$, $t = -80^\circ\text{C}$, $w_1 = 475 \text{ m/s}$, $M_1 = 1.704$ の場合の計算例および実測例を示すと第 2 図のようになる。この場合は前記の音速以下の流れとは逆に、流れに沿って圧力は上り、速度は低下する。熱授受の影響は加熱量の多いほど、圧力の上昇、速度の減少の程度が著しく表われる。

ii) 圧力降下が一定の場合

ガスタービンでは熱交換器内の圧力降下がサイクル効率に大きな影響を及ぼすので、この圧力降下を一定値以内におさめることが設計上要求される。前記のように流体の体積変化を考慮しなくてはならぬ場合には、圧力降下は管摩擦抵抗のみの函数ではなく、さらに管内ガス流動速度、加熱量に影響をうける。第 3 図は管内圧力降下が入口圧力のそれぞれ 3%、5% および 7% になるような場合の管摩擦抵抗 θ 、入口マッハ数 M_1 、および加熱量 q の関係を表わす。ただし、ガス体には $k = 1.4$ の空気の諸値を用いて



第 3 図

いる。すなわち、入口マッハ数 M_1 の大きく、加熱々量 q の多いほど、同一圧力降下割合に対して熱交換器は摩擦抵抗の少ない構造としなくてはならぬことが示されている。

iii) 等温流れの場合

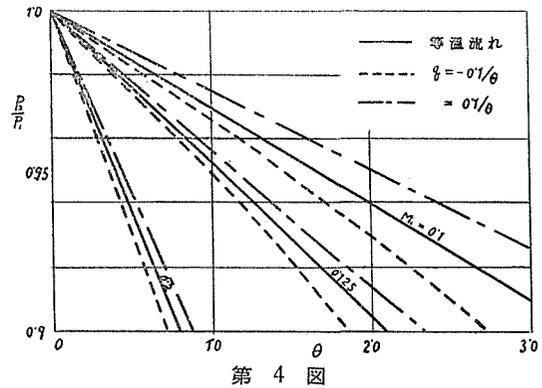
長距離輸送管内のガス流動のようにその状態が等温流れと看做しうるときは、前記基礎式に $T_1 = T_2$ なる条件を代入して、同様にして求めることができる。この場合には基礎式は比較的簡単な形に整理され、 θ については次式のように示される。

$$\theta = \frac{1}{k M_1^2} \frac{1 - \frac{P_2}{P_1}}{1 + \frac{P_2}{P_1}} + \frac{1 - \frac{P_1}{P_2}}{1 + \frac{P_1}{P_2}} \quad (10)$$

なお、等温流れについては R. C. Binder³⁾ が摩擦を伴う場合の計算式を、次のように示している。

$$\theta = \frac{1}{4k M_1^2} \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \log_e \frac{P_1}{P_2} \quad (11)$$

式 (11) は誘導の過程になんらの仮定も含まない厳密解であるが、式 (10) は前記のように $w = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ の条件の下に求められたものである。両式を比較すれば式 (10) は式 (11) の右辺第 2 項の対数項を展開して、その第 2 項以降を省略し、且つ P_2/P_1 が 1 に近い場合に相当する。このように、等温流れのような特殊条件の場合に限つては、一般解のときのように管を適当な長さに区切つて逐次計算をすすめる方式はとらなくとも、比較的簡単な形で厳密解が得られている。第 4 図は異なる入口マッハ数 M_1 に対する等温流れの圧力降下曲線を、単位 θ 毎に $q = 0.1$ なる放熱および受熱をなすときの圧力曲線とともに求めたものである。

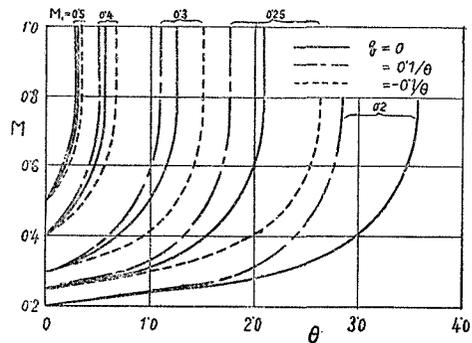


第 4 図

4. 流れの限界

流れの状態変化

前記の諸式より種々の入口マッハ数 M_1 に対する管内マッハ数 M の変化の状態を、断熱 $q = 0$ および単位 θ 当り $q = \pm 0.1$ なる熱授受を伴う場合について求めると、



第 5 図

第5図のようになる。すなわち、管摩擦抵抗 θ がある値に近づくと、管内マッハ数 M は急激に上昇し、1に近づく。一般に膨脹流れにおいて、流路断面が一定の場合は達しうる最高マッハ数は1となるので、この点が流れの限界を示すこととなる。このような限界状態は、入口マッハ数 M_1 の大きなほど、管摩擦抵抗値の低いといろで現われ、また同一入口マッハ数の場合は加熱量の多いほど、管摩擦抵抗値の低いところで現われ、放熱のときは、この逆の傾向を示す。

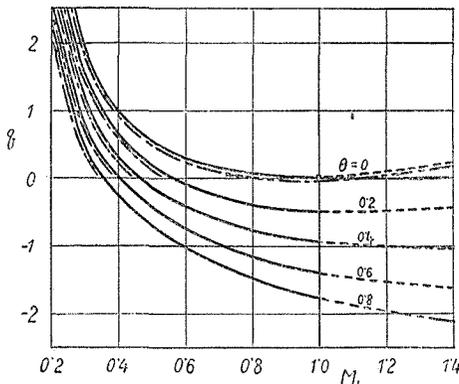
熱閉塞

熱交換器または燃焼器などで、装置入口におけるガス体の諸状態値が一定である場合、加熱量が次第に増加すると、前に述べたように装置出口におけるガスの流速は高まり、終には、マッハ数1に到達し、これ以上加熱すれば装置入口の状態が変化することになる。すなわち、入口状態を一定に保たんとすれば、管内流動ガスへ加えうる熱量には一定の限界を生じ、これ以上の加熱は不能となる。このような限界状態を熱閉塞 (Thermal choking) と言う。

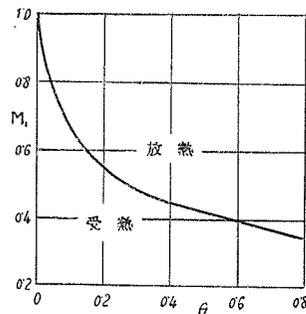
式 (6) より加熱々量 q の式を求むると、

$$q = \frac{\left\{ 1 + k M_1^2 (1 - \theta) \right\}^2 M_2^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_2^2 \right)}{M_1^2 \left\{ 1 + k M_2^2 (1 + \theta) \right\}^2} - \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right)$$

ここで、いま摩擦のない場合については、上式に $\theta = 0$ の条件を入れ、 $\frac{dq}{dM_2} = 0$ を求め、 $M_{2q \max} = 1$ をうる。またエントロピー式 (8) よりも $\frac{ds}{dM_2} = 0$ の条件より $M_{2s \max} = 1$ となり、同一の結果をうることになる。これは B. L. Hicks⁴⁾ により既に求められたところと一致する。摩擦を考慮する場合については、 θ を小さく区分し、前記のように逐次計算を重ねてこの限界値が求められる。第6図中の実線、および破線は θ を 0, 0.2, 0.4, 0.6 および 0.8 の場合について、限界熱量 q と入口マッハ数 M_1 との関係を示し、流体が空気の場合につき求めた結果を表わす。すなわち、流れが高速になるに従い少い加熱量で熱閉塞を起し、摩擦のないときは流れが音速に達して加熱不能となる。摩擦を考慮すれば、同一入口マッハ数 M_1 に対し熱閉塞を起す限界加熱量は低下する傾向を表わす。第7図は加熱々量 $q = 0$ 、すなわち断熱の状態で、しかも流れ



第 6 図



第 7 図

に限界を生ずる入口マッハ数 M_1 と摩擦抵抗値 θ との関係を示す。

温度の上昇限界

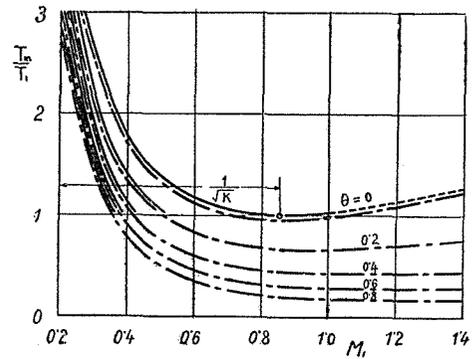
基礎式 (1) および (3) より明らかなように、管内流動ガス温度は加熱々量の増加とともに上昇の傾向を示すが、一方同時に比体積が増し、速度が上昇して、これが温度低下の因となる。すなわち、入口マッハ数 M_1 の小さいときは、管内流動ガスが外部より受熱すれば、ガス温度は最初上昇し、ある状態で最高値を示し、そのあと低下の傾向を示す。

式 (5), (6) より q を消去すれば、ガス温度 T_2 の式は下記のように求められる。

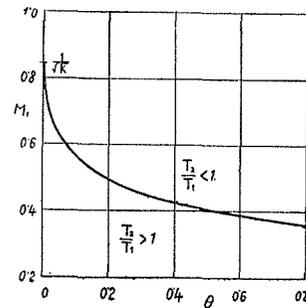
$$T_2 = T_1 \frac{M_2^2 \{1 + k M_1^2 (1 - \theta)\}^2}{M_1^2 \{1 + k M_2^2 (1 + \theta)\}^2}$$

ここで、いま摩擦のない場合について考えれば、 $\theta = 0$ とおき、 $\frac{dT_2}{dM_2} = 0$ より T_2 が最大となる条件を求めると、 $M_{2p\max} = \frac{1}{\sqrt{k}}$ をうる。すなわち、加熱による流れの温度上昇は、音速以下の流れの場合は、熱閉塞を起す以前、音速に達する前に最高値を示すことになる。摩擦のある場合

については、前記の逐次計算より最高値が求められる。これを図示すると第 8 図中の実線のように示される。ただし、この場合も流体には空気を用いた。入口マッハ数 M_1 の小さいときほど、達しうる最高温度 T_m も高いが、流速の上昇とともに急激に低下し、前記のように摩擦がないものとすれば、 $M_1 = \frac{1}{\sqrt{k}}$ の流れでは加熱してももはや温度は上昇しない。摩擦を考慮すれば、この点は更に低い速度で現れることとなる。また、同一流速に対する最高温度の関係は、摩擦の影響の大きなものほど低くなる傾向を示している。図中 $\frac{T_m}{T_1} < 1$ の範囲ではガス温度は加熱しても低下する一方で最高値を示さない。また、温度の最高値を示すまでの加熱々量は第 6 図中鎖線の示すようになり、熱閉塞を起すまでの限界加熱々量よりもそれぞれ僅かに低い値となる。一方、熱閉塞を起すときの温度比を求めると第 8 図中の鎖線の示すようになる。



第 8 図



第 9 図

以上のことから管内流動ガスが外部より受熱しても、温度の変化は、最初上昇し最高値に達した後低下する場合と、最初から低下する場合とがある。第 9 図はこのような場合の限界を表わし同一入口マッハ数 M_1 でも図中の曲線を境として温度は上昇または下降することを示す。

5. あとがき

熱授受を伴う管内ガス流動について、摩擦を考慮した場合の諸関係式を、管摩擦抵抗値 θ なる無次元量を用いて導き、また流れの限界状態である熱閉塞、温度上昇限界を求め解析した。管入口の流速が音速以下の場合、流れは音速を越すことは出来ないが、音速以上で噴き込まれたガスの流れは音速以下になりうる。しかし、この場合は音速近くで衝撃波を生じ、流れは不連続となる。本報告では、このような場合については触れてない。

最後に、終始御指導御鞭撻を戴いた大賀恵二教授に深く感謝の意を表す。また、計算の遂行に林香織君の助力を得た、附言して謝意を表す。

文 献

- 1) R. I. Focke: Beitrag zur Thermodynamik strömender Gase. Forsch. Ing. Wes. Bd. 16 (1949) S. 43.
- 2) H. Baer: Druckabfall und Zustandsänderung in langen Gas- und Dampfleitungen. Forsch. Ing. Wes. Bd. 16 (1949). S. 79.
- 3) R. C. Binder: Limiting Isothermal Flow in Pipes. Trans. A. S. M. E. Vol. 66 (1944). p. 221.
- 4) B. L. Hicks: On the One-Dimensional Theory of Steady Compressible Fluid Flow in Ducts with Friction and Heat Addition. J. of Applied Physics. Vol. 18. (1947). Oct.