異方性弾性体の三次元問題について

秦　　謹　　一

（昭和31年2月29日受理）

On the Three-dimensional Problems for the Anisotropic Elastic Solids.

Kin-ichi HATA

Abstract

Since, up to date, there does not seem to exist any reasonably general solutions of three-dimensional stress problems for the anisotropic elastic solids, the author dares to present one general method for solving these problems. Although this presented method may be awkward in many respects, the results obtained on these complicated problems do not involve any such restrictions as are made upon elastic constants by A. S. Lodge, and it will be easily seen that very dexterous methods cannot exist, observing the fact that a completely anisotropic elastic solid possesses twenty-one independent elastic constants. So far two-dimensional stress or strain problems for orthotropic elastic media have been treated by many authors, but researches on three-dimensional problems for these media are comparatively few.

In this paper homogeneous, generally anisotropic and orthotropic solids in the absence of body force are dealt with, and the assumptions, usual in the infinitesimal theory of elasticity, are made throughout.

As an illustration, we write down the solutions for the problem of surface tractions applied to a short column of finite length with rectangular cross-section.

目　　　次

§1.　緒　言 …………………………………………… 1
§2.　一般異方性弾性問題の一つの一般解について …………………… 2
§3.　直交異方性弾性問題の三次元解 …………………………… 7
§4.　直交異方性直方体の surface tractions の問題 ……………… 13
§5.　結　言 …………………………………………… 19

§1.　緒　　言

異方性弾性体のうち，直交異方性薄板の問題は既に多数の人々により取り扱われていることは広く知られている処である[1]．無論薄板でなくても平面歪問題であれば同様に研究されている．

異方性弾性体は結晶の関係から，A. E. H. Love[2] の書に見られるように古くより研究せられたものであるとはいえ，等方性弾性体の研究に比して，異方性弾性問題の解の研究は極めて少いといえるだろう．勿論等方性体と見做し得る物体は多くまた扱いやすいが，処理が困難とはいえ異方性体として考えるべき物体も少なしとしないこと明らかである．この報告の異方性の意味から曲線異方性（curvilinear anisotropy 或いは curvilinear orthotropy[3]）を省きたいと思う．但し横等方性（transverse isotropy）[4]がある場合は，強いていえば，curvilinear orthotropy を有するということが可能な特別な場合であつて，比較的簡単に処理し得る．このことについては結言中に触れた．円壔座標系に関する curvilinear orthotropy 即ち極異方性を有する場合の問題も重要なものであろう．この報告の主な目的は，等方性弾性体の三次元問題の一般解である J. Boussinesq の解，或いは一般化された H. Neuber の解[5]等の諸解に対応する一つの一般解を示し，ついで直交異方性弾性問題につき少しく具体的な一つの例解を述べんとするにある．一般に異方性弾性体の三次元問題の解例は極めて少ない様である．樋口正一教授[6] は極異方性円壔問題を扱われたが，最近 A. S. Lodge[7] が座標の線形変換による一般異方性弾性体の問題の等方化の条件として 14 箇の弾性常数間の関係式を求め，ついでその変換式を決定して三次問題に貢献するとともに，横等方性（transverse isotropy）を有する弾性体に関する H. A. Elliott[8] の三次元解を拡張した．A. S. Lodge は $21-14=17$ 箇の独立な弾性常数を有する異方性弾性問題の解即ち線形座標変換により等方化し得る問題の解を与えた訳である．

筆者寡聞にして一般異方性弾性問題の解があることを知らない．よつて筆者は A. S. Lodge の試みたような弾性常数間に特別な関係式を設定しない一般解を導出してみた．然し普通の場合直交異方性問題位のところで事足りる筈であり，21 箇の弾性常数を必要とするような問題は稀れであろうが，例え直交異方性弾性体と雖も，(x, y, z) 三軸の方向が問題の性質上弾性の対称軸と平行でないような場合には，事実上 21 箇の弾性常数を有する異方性体を取り扱うことと等価なこともあり得るであろうから，一般異方性弾性問題の解もやはり或る程度の必要性はあるであろう．もし対象が結晶体なら直交異方性の解のみでは無論不足である．兎角特別な場合を除いて，所要弾性常数の箇数が増加するほど解を得ることは容易でないこと明らかであるが，ここに示された一つの解法によれば，異方性弾性体の問題に関する本質的な困難は幾分でも緩和せられるであろう．以下得られた結果を略述し，二三の重要と思える事柄は後日報告したく思う．

§2. 一般異方性弾性問題の一つの一般解について

一般異方性体は互いに独立な 21 箇の弾性常数を有しており，それに関する問題は真に煩雑なものであることは明らかであるが，形式的な一般解は次のようにして得られる．無論扱う物体は等質として，微小変位理論の範囲内で考える．notation は概ね A. E. H. Love の書によることとする．直角座標 (x, y, z) の三軸方向は一般化された Hooke's Law が最も簡潔に表示し得

られる方向とすることは以下すべて同然である．

A. E. H. Love に従い，一般化された Hooke の法則 (generalized Hooke's Law) は次のものである．

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= c_{11}e_x + c_{12}e_y + c_{13}e_z + c_{14}\gamma_{yz} + c_{15}\gamma_{zx} + c_{16}\gamma_{xy}, \\
\sigma_y &= c_{21}e_x + c_{22}e_y + \cdots\cdot, \\
\sigma_z &= \cdots\cdots\cdots\cdots, \\
\tau_{yz} &= c_{41}e_x + c_{42}e_y + c_{43}e_z + c_{44}\gamma_{yz} + c_{45}\gamma_{zx} + c_{46}\gamma_{xy}, \\
\tau_{zx} &= c_{51}e_x + \cdots\cdot, \\
\tau_{xy} &= \cdots\cdot.
\end{aligned}
\tag{2·1}
$$

この (2·1) をmatrix form で書けば，

$$
\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\
c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\
c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\
c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\
c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\
c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66}
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix},
\tag{2·2}
$$

但し $$c_{rs} = c_{sr}, \qquad (r, s = 1.2\cdots\cdot 6), \tag{2·3}$$

であり，独立な常数 21 箇である．また歪エネルギー函数 W は次の形である．

$$
\begin{aligned}
2W = {} & c_{11}e_x^2 + c_{22}e_y^2 + c_{33}e_z^2 + c_{44}\gamma_{yz}^2 + c_{55}\gamma_{zx}^2 + c_{66}\gamma_{xy}^2 + \\
& + 2c_{12}e_xe_y + 2c_{13}e_xe_z + 2c_{14}e_x\gamma_{yz} + 2c_{15}e_x\gamma_{zx} + 2c_{16}e_x\gamma_{xy} + \\
& + 2c_{23}e_ye_z + 2c_{24}e_y\gamma_{yz} + 2c_{25}e_y\gamma_{zx} + 2c_{26}e_y\gamma_{xy} + \\
& + 2c_{34}e_z\gamma_{yz} + 2c_{35}e_z\gamma_{zy} + 2c_{36}e_z\gamma_{xy} + \\
& + 2c_{45}\gamma_{yz}\gamma_{zx} + 2c_{46}\gamma_{yz}\gamma_{xy} + 2c_{56}\gamma_{zx}\gamma_{xy}.
\end{aligned}
\tag{2·4}
$$

この W を使用すれば，(2·1) 或いは (2·2) の一般化された Hooke の法則は次のものと同じであること明らかである．

$$\sigma_x = \frac{\partial W}{\partial e_x}, \quad \sigma_y = \frac{\partial W}{\partial e_y}, \quad \cdots\cdot, \quad \tau_{yz} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}}, \cdots\cdot, \cdots\cdot. \tag{2·5}$$

但し $$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2·6}$$

以下物体力は考えないことにして，応力であらわした釣合方程式は書くまでもなく次のもの．

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=0,$$
$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}=0,$$
$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0. \tag{2·7}$$

応力に関する解を最初に求めるには，応力で表示した適合条件式を考慮せねばならず，その解を得る見込みは殆どないので，等方性体の問題と同様，変位に関する解を得るようにする．

よつて (2·6) 式により (2·2) 式の応力を変位であらわし，その表現を (6) の釣合式に代入して，整頓すれば次式を得る．

$$\Lambda_{11}u+\Lambda_{12}v+\Lambda_{13}w=0, \tag{2·8 a}$$
$$\Lambda_{21}u+\Lambda_{22}v+\Lambda_{23}w=0, \tag{2·8 b}$$
$$\Lambda_{31}u+\Lambda_{32}v+\Lambda_{33}w=0. \tag{2·8 c}$$

但し $\Lambda_{\alpha\beta}$, $(\alpha,\beta=1,2,3)$ は次のような operator である．

$$\left.\begin{aligned}
\Lambda_{11}&=c_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+c_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+c_{55}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2c_{56}\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}+2c_{15}\frac{\partial^2}{\partial z\partial x}+2c_{16}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y},\\
\Lambda_{22}&=c_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+c_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+c_{44}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2c_{24}\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}+2c_{46}\frac{\partial^2}{\partial z\partial x}+2c_{26}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y},\\
\Lambda_{33}&=c_{55}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+c_{14}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+c_{33}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2c_{34}\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}+2c_{35}\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}+2c_{45}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y},
\end{aligned}\right\} \tag{2·9}$$

$$\left.\begin{aligned}
\Lambda_{12}&=\Lambda_{21}\\
&=c_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+c_{26}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+c_{45}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+(c_{46}+c_{25})\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}+(c_{14}+c_{56})\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}+(c_{12}+c_{66})\frac{\partial^2}{\partial x\partial y},\\
\Lambda_{13}&=\Lambda_{31}\\
&=c_{15}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+c_{46}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+c_{35}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+(c_{36}+c_{45})\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}+(c_{13}+c_{55})\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}+(c_{14}+c_{56})\frac{\partial^2}{\partial x\partial y},\\
\Lambda_{23}&=\Lambda_{32}\\
&=c_{56}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+c_{24}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+c_{34}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+(c_{23}+c_{44})\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}+(c_{45}+c_{36})\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}+(c_{25}+c_{46})\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}.
\end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots(2·10)$$

勿論 (2·8 a), (2·8 b), (2·8 c) はそれぞれ (2·7) の第一，第二，第三式に対応する．次に (2·8 b) と (2·8 c) より u を含む項を消去して，

$$\begin{aligned}&\Lambda_{13}\cdot(2·8\,\mathrm{b})-\Lambda_{12}(2·8\,\mathrm{c})\\
&\quad=(\Lambda_{13}\Lambda_{22}-\Lambda_{12}\Lambda_{23})\,v+(\Lambda_{13}\Lambda_{23}-\Lambda_{12}\Lambda_{33})\,w=0,\end{aligned} \tag{2·11 a}$$

また (2·8 a) と (2·8 c) より v を含む項を消去して，

$$\begin{aligned}&\Lambda_{23}\,(2·8\,\mathrm{a})-\Lambda_{12}\,(2·8\,\mathrm{c})\\
&\quad=(\Lambda_{11}\Lambda_{23}-\Lambda_{12}\Lambda_{13})\,u+(\Lambda_{13}\Lambda_{23}-\Lambda_{12}\Lambda_{33})\,w=0,\end{aligned} \tag{2·11 b}$$

故に (2·11) 式より次の関係式を得る.

$$\Gamma^1 u = \Gamma^2 v = \Gamma^3 w, \tag{2·12}$$

但し

$$\begin{aligned} \Gamma^1 &= \Lambda_{11}\Lambda_{23} - \Lambda_{12}\Lambda_{13}, \\ \Gamma^2 &= \Lambda_{22}\Lambda_{13} - \Lambda_{12}\Lambda_{23}, \\ \Gamma^3 &= \Lambda_{33}\Lambda_{12} - \Lambda_{13}\Lambda_{23}. \end{aligned} \tag{2·13}$$

よつて (2·12) 式より次の如く置ける

$$u = \Gamma^2\Gamma^3\phi,\ \ v = \Gamma^1\Gamma^3\phi,\ \ w = \Gamma^1\Gamma^2\phi. \tag{2·14}$$

但し　$\phi \equiv \phi\,(x, y, z).$

(2·14) 式が得られた一般解であるが, $\phi(x, y, z)$ は或る特定の方程式を満足しなくてはならない. 今その ϕ に関する偏微分方程式を見出すために, (2·14) の基本解の形を (2·8 a) に代入すれば, 次式を得る.

$$\begin{aligned} \Lambda_{12}\Lambda_{13}\,\{&\Lambda_{11}\Lambda_{22}\Lambda_{33} + 2\Lambda_{12}\Lambda_{23}\Lambda_{13} - \Lambda_{11}(\Lambda_{23})^2 + \\ &- \Lambda_{22}(\Lambda_{13})^2 - \Lambda_{33}(\Lambda_{12})^2\}\,\phi = 0, \end{aligned} \tag{2·15}$$

(2·15) 式は 10 階の同階偏微分方程式であり, 上述の H. A. Elliott や A. S. Lodge の横等方性問題の一般解や三次元問題の他の諸考慮よりして, ϕ に関する方程式は 6 階の同階偏微分方程式であることは容易に推知されるとともに, (2·15) 式中の

$$\Lambda_{12}\phi = 0, \qquad \Lambda_{13}\phi = 0.$$

の解は釣合式 (2·8) に照しても殆ど無意味であり, (2·8 b), (2·8 c) の諸式よりもまた (2 15) 式中の brace 中の operator を得, 且つその形は対称的である故, ϕ の満足すべき式は次の 6 階同階偏微分方程式であることは明瞭であろう.

$$\{\Lambda_{11}\Lambda_{22}\Lambda_{33} + 2\Lambda_{23}\Lambda_{13}\Lambda_{12} - \Lambda_{11}(\Lambda_{23})^2 - \Lambda_{22}(\Lambda_{13})^2 - \Lambda_{33}(\Lambda_{12})^2\}\,\phi = 0, \tag{2·16}$$

この (2·16) 式を満たす ϕ 函数により得られる (2·14) の変位の解が釣合式 (2·7) 或いは (2·8) を満たすこと明白である.

しかして基本方程式 (2·16) の brace 中の operator が 2 階の operator のみを含む 3 箇の operator に分解されるとすれば, 次の形となる.

$$\begin{aligned} &\{\Lambda_{11}\Delta_{22}\Lambda_{33} + 2\Lambda_{23}\Lambda_{13}\Lambda_{12} - \Lambda_{11}(\Lambda_{23})^2 - \Lambda_{22}(\Lambda_{13})^2 - \Lambda_{33}(\Lambda_{12})^2\} \\ &\quad = \left\{(a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ \frac{1}{2}a_{14},\ \frac{1}{2}a_{15},\ \frac{1}{2}a_{16})\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)^2\right\} \times \\ &\quad \times \left\{(a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ \frac{1}{2}a_{24},\ \frac{1}{2}a_{25},\ \frac{1}{2}a_{26})\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)^2\right\} \times \\ &\quad \times \left\{(a_{31},\ a_{32},\ a_{33},\ \frac{1}{2}a_{34},\ \frac{1}{2}a_{35},\ \frac{1}{2}a_{36})\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)^2\right\}. \end{aligned} \tag{2·17}$$

但し

$$(a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ \frac{1}{2}a_{14},\ \frac{1}{2}a_{15},\ \frac{1}{2}a_{16})\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)^2$$

は次のものを示すとする．

$$\left(a_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+a_{12}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_{13}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+a_{14}\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}+a_{15}\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}+a_{16}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right). \tag{2·18}$$

その時は，(2·16) の解は，

$$\phi=\phi_1+\phi_2+\phi_3, \tag{2·19}$$

但し

$$\begin{aligned}
&(a_{11},\cdots,\frac{1}{2}a_{14},\cdots)\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)^2\phi_1=0,\\
&(a_{21},\cdots,\frac{1}{2}a_{24},\cdots)\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)^2\phi_2=0,\\
&(a_{31},\cdots,\frac{1}{2}a_{34},\cdots)\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)^2\phi_3=0.
\end{aligned} \tag{2·20}$$

弾性常数 $c_{\alpha\beta}$ に関して有理な係数 $a_{\alpha\beta}$ を有するように分解される見込は殆どないこと明白である．横等方性の場合に正の実数である $a_{\alpha\beta}$ をもつて，(2·19)，(2·20) のように置けるが，その他の場合は極く特殊な値を $c_{\alpha\beta}$ がとる場合に (2·17) や (2·20) のように置き得るようである．例え $a_{\alpha\beta}$ が虚数を含んでも，兎に角 (2·20) のように分解することができれば計算は大いに簡易化される．然し多くの場合に於いて分解することは困難である．(2·19)，(2·20) は多分に形式的であり，等方性物体の場合との比較上そのように表わして見たものである．分解できるならば，確かにその対応は判然としている．S. G. Lexnitzky[9] は平面変形問題で $z=0$ 平面が plane of elastic symmetry であると仮定して一般異方性物体から出発し，(2·16) の基本方程式に相当する式（相当するといつてもかなり異なるが）が，実数係数を有するように分解出来ないことを間接に示した．然しこの結果は，上述の仮定や平面変形近似に原因したものに過ぎない．(2·20) 中の $a_{\alpha\beta}$ が実数であり，且つ直交異方性の場合ならば，計算の難易は等方性の場合と同等であろう．

弾性常数 $c_{\alpha\beta}$ がいかなる不等式的関係を満足しなければならぬかは，別に知られていないようである．然し次のことは当然いえるであろう．即ち (2·4) の歪エネルギー函数は正値であることを要し，(2·4) 式は $e_x,\ e_y,\ e_z,\ \gamma_{yz},\ \gamma_{xz},\ \gamma_{xy}$ に関する正値二次形式であるから，(2·2) 式の $c_{\alpha\beta}$ に関する matrix に関する行列式の首座行列式は総て正でなければならないことになる．

$$c_{11}>0,\quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{vmatrix}>0,\ \cdots. \tag{2·21}$$

しかして実際の物体では，微小変位弾性論の諸仮定に背く因子も少くないことであろうから，実

験により定められる弾性常数 $c_{\alpha\beta}$ の値のみをもつて，(2·17) や (2·20) のように分解されること，及び $a_{\alpha\beta}$ の性質を論ずることは適当でないように思われる．

(2·20) のように分解できなければ，(2·16) の基本微分方程式を直接解かなければならないが，直交異方性の場合ならば，その計算は問題により比較的やさしい．然し一般異方性の場合なら，6次の数字方程式を必要箇数解かなければならないようなことも起り煩雑である．然し (2·14)，(2·16)，(2·13)，(2·9)，(2·10) の変位の一般解は横等方性の場合を除く異方性弾性体に関する限り完全である事は容易に確かめられる．独立な弾性常数の箇数の余り多い異方性体である工業材料はかなり巨視的な見方をしても，その例は比較的少いであろうから，これにとどめたい．

§3. 直交異方性弾性問題の三次元解

ついでながら，第2節の一般解が等方性弾性体の問題に対する一般解を含むという訳ではないことを述べる．

等方性物体に対しては，弾性常数 $c_{\alpha\beta}$ は次のもの．

$$c_{11}=c_{22}=c_{33},\qquad c_{23}=c_{13}=c_{12},$$
$$c_{44}=c_{55}=c_{66}=\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12}), \tag{3·1}$$

他の諸常数は零．(2·9) と (2·10) より，

$$\begin{aligned}
A_{11}&=c_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+c_{66}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right), & A_{23}&=\frac{1}{2}(c_{11}+c_{12})\frac{\partial^2}{\partial y\partial z},\\
A_{22}&=c_{11}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+c_{66}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right), & A_{13}&=\frac{1}{2}(c_{11}+c_{12})\frac{\partial^2}{\partial x\partial z},\\
A_{33}&=c_{11}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+c_{66}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right), & A_{12}&=\frac{1}{2}(c_{11}+c_{12})\frac{\partial^2}{\partial x\partial y},
\end{aligned} \tag{3·2}$$

(2·16)，(3·2) より

$$c_{11}c_{66}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^3\phi=0, \tag{3·3}$$

$$\therefore\quad \nabla^6\phi=0, \tag{3·3$'$}$$

但し
$$\nabla^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right).$$

しかして (2·13)，(3·2) より

$$\Gamma^1=c_{66}(c_{12}+c_{66})\nabla^2\frac{\partial^2}{\partial y\partial z},\quad \Gamma^2=c_{66}(c_{12}+c_{66})\nabla^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial z},$$
$$\Gamma^3=c_{66}(c_{12}+c_{66})\nabla^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}. \tag{3·4}$$

よつて (2·14)，(3·4) より

$$c_{66}^2(c_2+c_{66})^2\nabla^4\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\phi=\psi\equiv\psi(x,y,z), \tag{3·5}$$

と置けば変位の式は，次のようになる．

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad w=\frac{\partial\psi}{\partial z},\tag{3·6}$$

但し ψ は (3·3)′ 式より

$$\nabla^2\psi=0,$$

を満足し，調和函数である．等方性弾性問題の Boussinesq の三次元解は，ベクトル形式で書いて，

$$2G\boldsymbol{u}=\mathrm{grad}\,\varphi+2\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\vartheta}+\mathrm{grad}\,(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\lambda})-4(1-\nu)\,\boldsymbol{\lambda},\tag{3·7}$$

但し $\boldsymbol{\vartheta}=(\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3)$，$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ であり，φ, ϑ, λ 函数は調和函数であり，ν は Poisson 比．(2·14) の形式からは到底 $2\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\vartheta}$ は出ないように見えるが，何れにしても他の項も釣合式及び (3·4) の形と (2·12) 式を考慮して決定できるものである．

(3·3) 式は (2·19)，(2·20) に相応せしめて考えることのできる式であるが，(2·17) が (3·3) に見られるように縮退している場合は (2·12) 式より (2·14) 式の様に形をきめることが適当でないだけであり，異方性体の場合にはなんら欠点はない．異方性の場合には (3·7) の等方性の場合の第一項 $\mathrm{grad}\,\varphi$ に相応している解しか存在していないことになる．異方性体の場合，独立な 3 箇の弾性常数を有する等軸晶或いは立方晶 cubic crystals ですら，(2·17)，(2·20) のように分解されるとしても，(2·20) の三式の各式は異るのである．因に等方性の場合は独立な弾性常数は c_{11}, c_{12} の 2 箇である．横等方性弾性体は独立な弾性常数が 5 箇もあるが，その名の示す通り，かなり等方性に近いところがある．然し三つの ϕ 函数は互いに独立である．而して (2·14)，(2·16) の解は横等方性弾性問題の一般解を含むとは云えないのである．ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 の三つの ϕ 函数が独立であれば，三次元解として充分なること明らかである．先述せるように，ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 中のいずれか二つが等価となるおそれはないようである．

次に一般直交異方性の場合の一般解は，上記等方性の場合と同様にして容易に得ることができる．この場合 (2·2) の一般化された Hooke の法則は次のもの．

$$\begin{aligned}\sigma_x&=c_{11}e_x+c_{12}e_y+c_{13}e_z, & \tau_{yz}&=c_{44}\gamma_{yz},\\ \sigma_y&=c_{12}e_x+c_{22}e_y+c_{23}e_z, & \tau_{xz}&=c_{55}\gamma_{xz},\\ \sigma_z&=c_{13}e_x+c_{23}e_y+c_{33}e_z, & \tau_{xy}&=c_{66}\gamma_{xy}.\end{aligned}\tag{3·8}$$

(2·9)，(2·10)，(3·8) より

$$\begin{aligned}\Lambda_{11}&=c_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+c_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+c_{55}\frac{\partial^2}{\partial z^2},\\ \Lambda_{22}&=c_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+c_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+c_{44}\frac{\partial^2}{\partial z^2},\\ \Lambda_{33}&=c_{55}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+c_{44}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+c_{33}\frac{\partial^2}{\partial z^2},\end{aligned}\tag{3·9}$$

$$A_{23}=(c_{23}+c_{44})\frac{\partial^2}{\partial y\partial z},\quad A_{13}=(c_{13}+c_{55})\frac{\partial^2}{\partial x\partial z},\quad A_{12}=(c_{12}+c_{66})\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}. \tag{3·10}$$

故に (2·16) 式は次のようになる.

$$\begin{aligned}
&\{A_{11}A_{22}A_{33}+2A_{23}A_{13}A_{12}-A_{11}(A_{23})^2-A_{22}(A_{13})^2-A_{33}(A_{12})^2\}\phi=\\
&=\Big[c_{11}c_{55}c_{66}\frac{\partial^6}{\partial x^6}+c_{22}c_{44}c_{66}\frac{\partial^6}{\partial y^6}+c_{33}c_{44}c_{55}\frac{\partial^6}{\partial z^6}+\\
&+\Big\{c_{11}c_{22}c_{33}+2c_{44}c_{55}c_{66}+2(c_{23}+c_{44})(c_{13}+c_{55})(c_{12}+c_{66})+\\
&-c_{11}c_{23}(c_{23}+2c_{44})-c_{22}c_{13}(c_{13}+2c_{55})-c_{33}c_{12}(c_{12}+2c_{66})\Big\}\frac{\partial^6}{\partial x^2\partial y^2\partial z^2}+\\
&+\Big\{c_{22}c_{44}c_{55}+c_{22}c_{33}c_{66}-c_{23}c_{66}(c_{23}+2c_{44})\Big\}\frac{\partial^6}{\partial y^4\partial z^2}+\\
&+\Big\{c_{33}c_{44}c_{66}+c_{22}c_{33}c_{55}-c_{23}c_{55}(c_{23}+2c_{44})\Big\}\frac{\partial^6}{\partial y^2\partial z^4}+\\
&+\Big\{c_{11}c_{44}c_{55}+c_{11}c_{33}c_{66}-c_{13}c_{66}(c_{13}+2c_{55})\Big\}\frac{\partial^6}{\partial x^4\partial z^2}+\\
&+\Big\{c_{33}c_{55}c_{66}+c_{11}c_{33}c_{44}-c_{13}c_{44}(c_{13}+2c_{55})\Big\}\frac{\partial^6}{\partial x^2\partial z^4}+\\
&+\Big\{c_{11}c_{44}c_{66}+c_{11}c_{22}c_{55}-c_{12}c_{55}(c_{12}+2c_{66})\Big\}\frac{\partial^6}{\partial x^4\partial y^2}+\\
&+\Big\{c_{22}c_{55}c_{66}+c_{11}c_{22}c_{44}-c_{12}c_{44}(c_{12}+2c_{66})\Big\}\frac{\partial^6}{\partial x_2\partial y^4}\Big]\phi=0.
\end{aligned} \tag{3·11}$$

しかして (2·13), (3·9), (3·10) により次式を得る.

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1=\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\Gamma^1{}_B,\\
&\Gamma^1{}_B=\Big\{c_{11}(c_{23}+c_{44})-(c_{13}+c_{55})(c_{12}+c_{66})\Big\}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(c_{23}+c_{44})\Big(c_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+c_{55}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big),\\
&\Gamma^2=\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\Gamma^2{}_B,\\
&\Gamma^2{}_B=\Big\{c_{22}(c_{13}+c_{55})-(c_{23}+c_{44})(c_{12}+c_{66})\Big\}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+(c_{13}+c_{55})\Big(c_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+c_{44}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big),\\
&\Gamma^3=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Gamma^3{}_B,\\
&\Gamma^3{}_B=\Big\{c_{33}(c_{12}+c_{66})-(c_{23}+c_{44})(c_{13}+c_{55})\Big\}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+(c_{12}+c_{66})\Big(c_{55}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+c_{44}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big).
\end{aligned} \tag{3·12}$$

今次の如く置けば,

$$\frac{\partial^3\phi}{\partial x\partial y\partial z}=\psi\equiv\psi(x,y,z), \tag{3·13}$$

ψ は (3·11) の基本微分方程式の解であり，(2·14) の変位表現は次のようになる.

$$u = \frac{\partial}{\partial x}\Gamma^2{}_B\Gamma^3{}_B\psi,\ \ v = \frac{\partial}{\partial y}\Gamma^3{}_B\Gamma^1{}_B\psi,\ \ w = \frac{\partial}{\partial z}\Gamma^1{}_B\Gamma^2{}_B\psi. \tag{3·14}$$

この (3·14)，(3·12)，(3·11) は一般直交異方性弾性問題の一般解であることは明かである.

然し，一般直交異方性弾性体の解を最初より，即ち (2·8) の釣合式より導出する場合には，(2·11 a)，(2·11 b) 式の処で一度積分できるから，些か簡単に処理される. 即ち (2·11a) より

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left[(c_{13}+c_{55})\left(c_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+c_{44}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+\left\{c_{22}(c_{13}+c_{55})-(c_{23}+c_{44})(c_{12}+c_{66})\right\}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]v =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[(c_{12}+c_{66})\left(c_{55}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+c_{44}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\left\{c_{33}(c_{12}+c_{66})-(c_{23}+c_{44})(c_{13}+c_{55})\right\}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]w. \tag{3·15}$$

若し

$$v = \frac{\partial}{\partial y}v',\quad w = \frac{\partial}{\partial z}w', \tag{3·16}$$

と置くならば，

$$\Gamma^2{}_B v' = \Gamma^3{}_B w', \tag{3·17}$$

を得る.

同様にして (2·11 b) 式より，

$$u = \frac{\partial}{\partial x}u', \tag{3·18}$$

と置くことにより，

$$\Gamma^1{}_B u' = \Gamma^3{}_B w'. \tag{3·19}$$

を得る. (3·17)，(3·19) より次のように書ける.

$$u' = \Gamma^2{}_B\Gamma^3{}_B\phi,\ \ v' = \Gamma^1\ \Gamma^3{}_B\phi,\ \ w' = \Gamma^1{}_B\Gamma^2{}_B\phi. \tag{3·20}$$

故に

$$u = \frac{\partial}{\partial x}\Gamma^2{}_B\Gamma^3{}_B\phi,\ \ v = \frac{\partial}{\partial y}\Gamma^1{}_B\Gamma^3{}_B\phi,\ \ w = \frac{\partial}{\partial z}\Gamma^1\ \Gamma^2{}_B\phi. \tag{3·21}$$

次に釣合式 (2·8 a) に (3·16)，(3·18) を代入して一度 x につき積分し

$$\left(c_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+c_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+c_{55}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u' + (c_{12}+c_{66})\frac{\partial^2}{\partial y^2}v' + (c_{13}+c_{55})\frac{\partial^2}{\partial z^2}w' = 0, \tag{3·22}$$

(3·22) に (3·20) を代入して

$$\left\{\left(c_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+c_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+c_{55}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Gamma^2{}_B\Gamma^3{}_B + (c_{12}+c_{66})\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Gamma^1{}_B\Gamma^3{}_B +\right.$$
$$\left. + (c_{13}+c_{55})\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Gamma^1{}_B\Gamma^2{}_B\right\}\phi = 0, \tag{3·23}$$

(3·23) 式は正に (3·11) 式 × $(c_{13}+c_{55})(c_{12}+c_{66})$ の形式である．(3·21), (3·12), (3·11) は一般直交異方性弾性問題の一般解である．

(3·11) 式を $c_{11}c_{55}c_{66}$ で除したものは，分解され得るならば，(2·17) 式に対応して次の形をとる．

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+a_{12}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_{13}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+a_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_{23}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+a_{32}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_{33}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi=0, \tag{3·24}$$

よつて ϕ は次の如く書ける．

$$\phi=\phi_1+\phi_2+\phi_3, \tag{3·25}$$

但し

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+a_{12}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_{13}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi_1&=0,\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+a_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_{23}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi_2&=0,\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+a_{32}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_{33}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi_3&=0.\end{aligned} \tag{3·26}$$

(3·24), (3·25), (3·26) のように分解できることがはつきり分つているのは横等方性の場合のみである．勿論他の場合にも分解できることはあるであろう．弾性常数 $c_{\alpha\beta}$ が特定の場合には無論分解できる．苟も分解できるならば，(3·26) 式の一つの式の $a_{\alpha\beta}$ は実数である．然し (3·11) 式は比較的簡単な形をした微分方程式であるから，(3·26) の如く分解され得なくとも大した支障はないようである．第2節と同じく，現在のところ上式はかなり便宜的なものである．

しかして (3·21) の変位式中の $\Gamma^2{}_B\Gamma^3{}_B, \cdots\cdots$ を少しく具体的に表わして置く．

(3·12) より

$$\Gamma^2{}_B\Gamma^3{}_B=A\Pi_1,\quad \Gamma^1{}_B\Gamma^3{}_B=A\Pi_2,\quad \Gamma^1{}_B\Gamma^2{}_B=A\Pi_3, \tag{3·27}$$

但し

$$A=(c_{23}+c_{44})(c_{13}+c_{55})(c_{12}+c_{66}),$$

とすれば，変位の式 (3·21) は次の形となる．

但し $A\phi$ を ϕ と書くことにする．ϕ は (3·11) 式を満足するものとする．

$$u=\frac{\partial}{\partial x}\Pi_1\phi,\quad v=\frac{\partial}{\partial y}\Pi_2\phi,\quad w=\frac{\partial}{\partial z}\Pi_3\phi. \tag{3·28}$$

(3·28) 式中の Π_1, Π_2, Π_3 は次のもの．

$$
\begin{aligned}
(z_{23}+c_{44})\,\Pi_1 &= \left(d_{11}, d_{22}, d_{33}, \frac{1}{2}d_{23}, \frac{1}{2}d_{31}, \frac{1}{2}d_{12}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2 \\
&= d_{11}\frac{\partial^4}{\partial x^4} + d_{22}\frac{\partial^4}{\partial y^4} + d_{33}\frac{\partial^4}{\partial z^4} + d_{23}\frac{\partial^4}{\partial y^2\partial z^2} \\
&\qquad + d_{31}\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial z^2} + d_{12}\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}. \\
(c_{13}+c_{55})\,\Pi_2 &= \left(e_{11}, e_{22}, \cdots, \frac{1}{2}e_{23}, \cdots, \cdots\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2, \\
(c_{12}+c_{66})\,\Pi_3 &= \left(f_{11}, \cdots, \cdots, \frac{1}{2}f_{23}, \cdots, \cdots\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2.
\end{aligned}
\tag{3·29}
$$

(3·29) 中の $d_{\alpha\beta}$, $e_{\alpha\beta}$, $f_{\alpha\beta}$ $(\alpha,\beta=1,2,3)$ は次のものである.

$$
\left.
\begin{aligned}
&d_{11}=c_{55}c_{66},\quad d_{22}=c_{44}\left(c_{22}-\frac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2}\right),\quad d_{33}=c_{44}\left(c_{33}-\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3}\right),\\
&d_{23}=\left(c_{22}-\frac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2}\right)\left(c_{33}-\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3}\right)+c_{44}^2,\quad d_{31}=c_{66}\left(c_{33}-\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3}\right)+c_{44}c_{55},\\
&\qquad\qquad d_{12}=c_{55}\left(c_{22}-\frac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2}\right)+c_{44}c_{66},
\end{aligned}
\right\}
\tag{3·30}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&e_{11}=c_{55}\left(c_{11}-\frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1}\right),\quad e_{22}=c_{44}c_{66},\quad e_{33}=c_{55}\left(c_{33}-\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3}\right),\\
&e_{23}=c_{66}\left(c_{33}-\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3}\right)+c_{44}c_{55},\quad e_{31}=\left(c_{11}-\frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1}\right)\left(c_{33}-\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3}\right)+c_{55}^2,\\
&\qquad\qquad e_{12}=c_{44}\left(c_{11}-\frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1}\right)+c_{55}c_{66},
\end{aligned}
\right\}
\tag{3·31}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&f_{11}=c_{66}\left(c_{11}-\frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1}\right),\quad f_{22}=c_{66}\left(c_{22}-\frac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2}\right),\quad f_{33}=c_{44}c_{55},\\
&f_{23}=c_{55}\left(c_{22}-\frac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2}\right)+c_{44}c_{66},\quad f_{31}=c_{44}\left(c_{11}-\frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1}\right)+c_{55}c_{66},\\
&\qquad\qquad f_{12}=\left(c_{11}-\frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1}\right)\left(c_{22}-\frac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2}\right)+c_{66}^2,
\end{aligned}
\right\}
\tag{3·32}
$$

但し $\alpha_1=(c_{23}+c_{44})$, $\alpha_2=(c_{13}+c_{55})$, $\alpha_3=(c_{12}+c_{66})$.

transverse isotropy を有する弾性問題の場合 ϕ の基本式 (3·11) は分解されて，しかも $a_{\alpha\beta}$ は正の実数である．正の実数であれば，計算は非常に簡単である．cubic crystals のように c_{11}, c_{12}, c_{44}, の三つの独立な常数しか有しないものさえ，一般に分解できないように思える．

因に前述の H. A. Elliott 及び A. S. Lodge の transverse isotropy を有する弾性体の三次元問題の一般解は次のものである．

直角座標 (x, y, z) をとり，z 軸は弾性の対称軸に平行に択ぶ．

$$u = \frac{\partial}{\partial x}(\phi_1 + \phi_2) + \frac{\partial}{\partial y}\phi_3,$$
$$v = \frac{\partial}{\partial y}(\phi_1 + \phi_2) - \frac{\partial}{\partial x}\phi_3, \tag{3·33}$$
$$w = \frac{\partial}{\partial z}(k_1\phi_1 + k_2\phi_2),$$

但し $\phi_i\ (i = 1,2,3)$ は次式を満足する.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu_i \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi_i = 0, \tag{3·34}$$

ν_1 と ν_2 は次の二次式の二根,

$$c_{11}c_{44}\nu^2 + (c_{13}{}^2 - c_{11}c_{33} + 2c_{13}c_{44})\nu + c_{33}c_{44} = 0, \tag{3·35}$$

$$\nu_3 = \frac{2c_{44}}{c_{11} - c_{12}}{}^{*}, \tag{3·36}$$

$$k_\alpha = (c_{11}\nu_\alpha - c_{44})/(c_{13} + c_{44}),\quad (\alpha = 1,2) \tag{3·37}$$

横等方性弾性体については後日述べたいと思う. A. S. Lodge は上記の解が完全な一般性を有するか否かは知られていない旨を述べられているが, 筆者は一般性ありと考えている. 但しこのことは説明を要するものと思われる. 第2節に述べた解法では無論 (3·33)～(3·37) の解と同形にはならないが ϕ の満足する方程式は (3·34) と同じである. (3·33) 式の ϕ_3 に関する項は z 軸まわりの廻転的な解のために挿入されたもので, (3·7) 式右辺第二項に相当するものであり, A. S. Lodge が完全性に関し疑を持たれるのはやむを得ないことであろう. 次節に一般直交異方性を有する直方体或いは矩形断面短柱に対してこの節の一般解に基き一つの解の形を些か具体的に示してみよう.

§4. 直交異方性直方体の surface tractions の問題

直方体の中心に座標の原点をとり, 直方体の表面は

$$x = \pm a,\ y = \pm b,\ z = \pm h. \tag{4·1}$$

であらわされるものとする. 表面荷重は $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,$ 平面に関して対称的に分布している場合を扱う. 弾性の対称軸は x 軸, y 軸, z 軸に平行であるとする. 一般化された Hooke の法則は (3·8) の形である. 以下導出せんとする解の最後的な形に関する考え方は前の等方性直方体に関する報告[10]中のものと同じで, 表面荷重函数を重 Fourier 級数に展開するものである.

今 ϕ について次の如く置く.

$$\phi = A\,e^{\beta iy + kiz + \delta x}. \tag{4·2}$$

(4·2) 式は指数函数であり, i は虚数単位, β, k は与えられる常数, δ は決定せられるべき常数. この ϕ を (3·11) 或いは (3·23) に代入すれば, δ に関する6次の数字方程式を得る. 但し

$$\beta \equiv \beta_s = \frac{s\pi}{b}, \quad k \equiv k_n = \frac{n\pi}{h}, \tag{4·3}$$

$$(s, n = 0, 1, 2, 3 \cdots\cdots)$$

s と n を指定して β と k は与えられ，その (4·2) を (3·11) に代入して，δ^2 に関する3次の数字方程式を得る．明らかにその方程式の係数は実数である．この方程式を解けば，A. E. H. Love の書に記載せられる処の一般直交異方性物質の

黄　玉 (topaz)

$(c_{11} = 2.87,\ c_{22} = 3.56,\ c_{33} = 3)$, $(c_{23} = 0.9,\ c_{13} = 0.86,\ c_{12} = 1.28)$,

$(c_{44} = 1.1,\ c_{55} = 1.35,\ c_{66} = 1.33)$

重晶石 (Barytes)

$(c_{11} = 0.907,\ c_{22} = 0.8,\ c_{33} = 1.074)$, $(c_{23} = 0.273,\ c_{13} = 0.275,\ c_{12} = 0.468)$,

$(c_{44} = 0.122,\ c_{55} = 0.293,\ c_{66} = 0.283)$,　　　単位 $= 10^6\ \mathrm{kg/cm^2}$.

等では δ の6箇の根は，l, λ を実数として，

$${}_1\delta_{ns} = \pm\, {}_1l_{ns}, \quad {}_2\delta_{ns} = \pm\,({}_2l_{ns} + i_2\lambda_{ns}), \quad {}_3\delta_{ns} = \pm\,({}_3l_{ns} + i_3\lambda_{ns}), \tag{4·4}$$

の形となり，これにより先ず (n, s) 型の ϕ の解を次の如く置くことができる．

$$\begin{aligned}
\phi_{1(ns)} &= \sum_n \sum_s A^1_{ns} \cos\beta_s y \cos k_n z \cosh {}_1l_{ns} x,\\
\phi_{2(ns)} &= \sum_n \sum_s A^2_{ns} \cos\beta_s y \cos k_n z \cos {}_2\lambda_{ns} x \cosh {}_2l_{ns} x,\\
\phi_{3(ns)} &= \sum_n \sum_s A^3_{ns} \cos\beta_s y \cos k_n z \cos {}_3\lambda_{ns} x \cosh {}_3l_{ns} x.
\end{aligned} \tag{4·5}$$

同様にして (4·2) の代りに，

$$\phi = A e^{\alpha i x + k i z + \delta y}, \tag{4·6}$$

を設定し，

$$\alpha \equiv \alpha_r = \frac{r\pi}{a}, \quad k \equiv k_n = \frac{n\pi}{h}, \tag{4·7}$$

$$(r, n = 0, 1, 2 \cdots\cdots)$$

において r と n を指定して，α と k を決定し，(4·6) を (3·11) に代入して，一般に次の形の δ の根を得る．

$${}_1\delta_{nr} = \pm\, {}_1m_{nr}, \quad {}_2\delta_{nr} = \pm\,({}_2m_{nr} + i\, {}_2\mu_{nr}), \quad {}_3\delta_{nr} = \pm\,({}_3m_{nr} + i\, {}_3\mu_{nr}), \tag{4·7}$$

但し m_{nr}, μ_{nr} は実数．これより ϕ の (n, r) 型として次のものを得る．

$$\begin{aligned}
\phi_{1(nr)} &= \sum_n \sum_r B^1_{nr} \cos\alpha_r x \cos k_n z \cosh {}_1m_{nr} y,\\
\phi_{2(nr)} &= \sum_n \sum_r B^2_{nr} \cos\alpha_r x \cos k_n z \cos {}_2\mu_{nr} y \cosh {}_2m_{nr} y,\\
\phi_{3(nr)} &= \sum_n \sum_r B^3_{nr} \cos\alpha_r x \cos k_n z \cos {}_3\mu_{nr} y \cosh {}_3m_{nr} y.
\end{aligned} \tag{4·8}$$

同様に

$$\phi = A e^{\alpha i x + \beta i y + \delta z}, \tag{4·9}$$

を設定し,

$$\alpha \equiv \alpha_r = \frac{r\pi}{a}, \quad \beta \equiv \beta_s = \frac{s\pi}{b}, \qquad (r, s = 0, 1, 2 \cdots\cdots) \tag{4·10}$$

において, r と s を指定して α と β を決め, (3·11) 式より次の形の根を得る.

$${}_1\delta_{rs} = \pm\, {}_1\gamma_{rs}, \quad {}_2\delta_{rs} = \pm\, ({}_2\gamma_{rs} + i\, {}_2\nu_{rs}), \quad {}_3\delta_{rs} = \pm\, ({}_3\gamma_{rs} + i\, {}_3\nu_{rs}). \tag{4·11}$$

これらより ϕ の (r, s) 型として次の如く書くことができる.

$$\begin{aligned} \phi_{1(rs)} &= \sum_r \sum_s C^1_{rs} \cos \alpha_r x \cos \beta_s y \cosh {}_1\gamma_{rs} z, \\ \phi_{2(rs)} &= \sum_r \sum_s C^2_{rs} \cos \alpha_r x \cos \beta_s y \cos {}_2\nu_{rs} z \cosh {}_2\gamma_{rs} z, \\ \phi_{3(rs)} &= \sum_r \sum_s C^3_{rs} \cos \alpha_r x \cos \beta_s y \cos {}_3\nu_{rs} z \cosh {}_3\gamma_{rs} z. \end{aligned} \tag{4·12}$$

よつて (3·25) に相応するものは

$$\begin{aligned} &\phi_1 = \phi_{1(ns)} + \phi_{1(nr)} + \phi_{1(rs)}, \quad \phi_2 = \phi_{2(ns)} + \phi_{2(nr)} + \phi_{3(rs)}, \\ &\phi_3 = \phi_{3(ns)} + \phi_{3(nr)} + \phi_{3(rs)}, \quad \phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3. \end{aligned} \tag{4·13}$$

であるが, あまり実際的ではない. 無論 (3·26) の如く分解できれば, 正に (4·13) のようになる.

然し一般直交異方性物質でも, 複素根の虚数部分, λ, μ, ν が消えるものもあるであろうし, また巨視的な意味における一般直交異方性体についても勿論そのようなものはあろう. 等軸晶或いは立方晶 cubic crystal では上記の ${}_1\delta$, ${}_2\delta$, ${}_3\delta$ はともに実数である.

よつて今 ϕ に関する上式中 $\lambda = \mu = \nu = 0$, なる如き直交異方性直方体の surface tractions の問題における変位及び応力解の形を一般的に求めれば次の如くなる.

先ず x 方向変位 u は (3·28), (3·29), (3·30), (4·5), (4·8), (4·12) 等より容易に得られる.

(n, s) 型の ϕ (4·5) より得られるものを $u_{(ns)}$ とし, (4·8) によるものを $u_{(nr)}$, (4·12) によるものを $u_{(r\cdot s)}$ とすれば,

$$\begin{aligned} u_{(ns)} &= \frac{\partial}{\partial x} \Pi_1 \phi_{(ns)} = \frac{\partial}{\partial x} \Pi_1 (\phi_{1(ns)} + \phi_{2(ns)} + \phi_{3(ns)}) \\ &= \sum_{\nu=1}^{3} \sum_n \sum_s \cos \beta_s y \cos k_n z \sinh {}_\nu l_{ns} x \cdot {}_u A^\nu_{ns}, \\ u_{(nr)} &= \frac{\partial}{\partial x} \Pi_1 \phi_{(nr)} = \frac{\partial}{\partial x} \Pi_1 (\phi_{1(nr)} + \phi_{2(nr)} + \phi_{3(nr)}) \\ &= \sum_{\nu=1}^{3} \sum_n \sum_r \sin \alpha_r x \cos k_n z \cosh {}_\nu m_{nr} y \cdot {}_u B^\nu_{nr}, \\ u_{(rs)} &= \frac{\partial}{\partial x} \Pi_1 \phi_{(rs)} = \frac{\partial}{\partial x} \Pi_1 (\phi_{1(rs)} + \phi_{2(rs)} + \phi_{3(rs)}) \\ &= \sum_{\nu=1}^{3} \sum_r \sum_s \sin \alpha_r x \cos \beta_s y \cosh {}_\nu \gamma_{rs} z \cdot {}_u C^\nu_{rs}, \end{aligned} \tag{4·14}$$

(4·14) 中

$$
{}_uA^\nu_{ns} = \frac{1}{(c_{23}+c_{44})}{}_\nu l_{ns}A^\nu_{ns}\{(d_{22}\beta_s^4 + d_{33}k_n^4 + d_{23}\beta_s^2 k_n^2) + \\ + {}_\nu l_{ns}^2(d_{11}\,{}_\nu l_{ns}^2 - d_{12}\beta_s^2 - d_{31}k_n^2)\},
$$

$$
{}_uB^\nu_{nr} = \frac{1}{(c_{23}+c_{14})}\alpha_r B^\nu_{nr}\{-(d_{11}\alpha_r^4 + d_{33}k_n^4 + d_{31}\alpha_r^2 k_n^2) + \\ + {}_\nu m_{nr}^2(-d_{22}\,{}_\nu m_{nr}^2 + d_{12}\alpha_2^2 + d_{23}k_n^2)\},
$$

$$
{}_uC^\nu_{rs} = \frac{1}{(c_{23}+c_{44})}\alpha_r C^\nu_{rs}\{-(d_{11}\alpha_r^4 + d_{22}\beta_s^4 + d_{12}\alpha_r^2\beta_s^2) + \\ + {}_\nu\gamma_{rs}^2(-d_{33}\,{}_\nu\gamma_{rs}^2 + d_{23}\beta_s^2 + d_{31}\alpha_r^2)\}, \tag{4·15}
$$

$$
u = u_{(ns)} + u_{(nr)} + u_{(rs)}. \tag{4·16}
$$

同様に y 方向変位 v を求めれば,

$$
v_{(ns)} = \frac{\partial}{\partial y}\Pi_2\phi_{(ns)} = \sum_{\nu=1}^{3}\sum_n\sum_s \sin\beta_s y\cos k_n z\cosh{}_\nu l_{ns}x\cdot{}_vA^\nu_{ns},
$$

$$
v_{(nr)} = \frac{\partial}{\partial y}\Pi_2\phi_{(nr)} = \sum_{\nu=1}^{3}\sum_n\sum_r \cos\alpha_r x\cos k_n z\sinh{}_\nu m_{nr}y\cdot{}_vB^\nu_{nr}, \tag{4·17}
$$

$$
v_{(rs)} = \frac{\partial}{\partial y}\Pi_2\phi_{(rs)} = \sum_{\nu=1}^{3}\sum_r\sum_s \cos\alpha_r x\sin\beta_s y\cosh{}_\nu\gamma_{rs}z\cdot{}_vC^\nu_{rs},
$$

(4·17) 式中,

$$
{}_vA^\nu_{ns} = \frac{1}{(c_{13}+c_{55})}\beta_s A^\nu_{ns}\{-(e_{22}\beta_s^4 + e_{33}k_n^4 + e_{23}\beta_s^2 k_n^2) + \\ + {}_\nu l_{ns}^2(-e_{11}\,{}_\nu l_{ns}^2 + e_{12}\beta_s^2 + e_{31}k_n^2)\},
$$

$$
{}_vB^\nu_{nr} = \frac{1}{(c_{13}+c_{55})}{}_\nu m_{nr}B^\nu_{nr}\{(e_{11}\alpha_r^4 + e_{33}k_n^4 + e_{31}\alpha_r^2 k_n^2) + \\ + {}_\nu m_{nr}^2\{e_{22}\,{}_\nu m_{nr}^2 - e_{12}\alpha_r^2 - e_{23}k_n^2)\}, \tag{4·18}
$$

$$
{}_vC^\nu_{rs} = \frac{1}{(c_{13}+c_{55})}\beta_s C^\nu_{rs}\{-(e_{11}\alpha_r^4 + e_{22}\beta_s^4 + e_{12}\alpha_r^2\beta_s^2) + \\ + {}_\nu\gamma_{rs}^2(-e_{33}\,{}_\nu\gamma_{rs}^2 + e_{23}\beta_s^2 + e_{31}\alpha_r^2)\},
$$

$$
v = v_{(ns)} + v_{(nr)} + v_{(rs)}. \tag{4·19}
$$

同様に z 方向変位 w は次のもの.

$$
w = w_{(ns)} + w_{(nr)} + w_{(rs)}, \tag{4·20}
$$

但し

$$
w_{(ns)} = \frac{\partial}{\partial z}\Pi_3\phi_{(ns)} = \frac{1}{(c_{12}+c_{66})}\frac{\partial}{\partial z}\left(f_{11},\cdots,\frac{1}{2}f_{23},\cdots\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2},\frac{\partial^2}{\partial y^2},\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2\phi_{(ns)}
$$

$$
= \sum_{\nu=1}^{3}\sum_n\sum_s \cos\beta_s y\sin k_n z\cosh{}_\nu l_{ns}x\cdot{}_wA^\nu_{ns},
$$

$$
w_{(nr)} = \frac{\partial}{\partial z}\Pi_3\phi_{(nr)} = \sum_{\nu=1}^{3}\sum_n\sum_r \cos\alpha_r x\sin k_n z\cosh{}_\nu m_{nr}y\cdot{}_wB^\nu_{nr}, \tag{4·21}
$$

$$
w_{(rs)} = \frac{\partial}{\partial z}\Pi_3\phi_{(rs)} = \sum_{\nu=1}^{3}\sum_r\sum_s \cos\alpha_r x\cos\beta_s y\sinh{}_\nu\gamma_{rs}z\cdot{}_wC^\nu_{rs},
$$

但し ${}_wA^{\nu}_{ns}$, ${}_wB^{\nu}_{nr}$, ${}_wC^{\nu}_{rs}$ は次のものを示す.

$$
\begin{aligned}
{}_wA^{\nu}_{ns} &= \frac{1}{(c_{12}+c_{66})} k_n A^{\nu}_{ns} \{ -(f_{22}\beta_s^4 + f_{33}k_n^4 + f_{23}k_n^2\beta_s^2) + \\
&\qquad + {}_{\nu}l_{ns}^2(-f_{11}\,{}_{\nu}l_{ns}^2 + f_{12}\beta_s^2 + f_{31}k_n^2)\}, \\
{}_wB^{\nu}_{nr} &= \frac{1}{(c_{12}+c_{66})} k_n B^{\nu}_{nr} \{ -(f_{11}\alpha_r^4 + f_{33}k_n^4 + f_{31}k_n^2\alpha_r^2) + \\
&\qquad + {}_{\nu}m_{nr}^2(-f_{22}\,{}_{\nu}m_{nr}^2 + f_{12}\alpha_r^2 + f_{23}k_n^2)\}, \\
{}_wC^{\nu}_{rs} &= \frac{1}{(c_{12}+c_{66})} {}_{\nu}\gamma_{rs} C^{\nu}_{rs} \{ (f_{11}\alpha_r^4 + f_{22}\beta_s^4 + f_{12}\alpha_r^2\beta_s^2) + \\
&\qquad + {}_{\nu}\gamma_{rs}^2(f_{33}\,{}_{\nu}\gamma_{rs}^2 - f_{23}\beta_s^2 - f_{31}\alpha_r^2)\}.
\end{aligned} \tag{4·22}
$$

これらの変位表現を見れば，等方性の場合と殆ど変らぬ程度に思える．応力表現は上記変位表現と (2·6) 式，及び (3·8) の Hooke の法則より容易に得られる．

$$
\begin{aligned}
\sigma_{x(ns)} &= \sum_{\nu=1}^{3}\sum_{n}\sum_{s} \cos\beta_s y \cos k_n z \cosh {}_{\nu}l_{ns}x \cdot {}_xA^{\nu}_{ns}, \\
\sigma_{x(nr)} &= \sum_{\nu=1}^{3}\sum_{n}\sum_{r} \cos\alpha_r x \cos k_n z \cosh {}_{\nu}m_{nr}y \cdot {}_xB^{\nu}_{nr}, \\
\sigma_{x(rs)} &= \sum_{\nu=1}^{3}\sum_{r}\sum_{s} \cos\alpha_r x \cos\beta_s y \cosh {}_{\nu}\gamma_{rs}z \cdot {}_xC^{\nu}_{rs},
\end{aligned} \tag{4·23}
$$

但し

$$
\begin{aligned}
{}_xA^{\nu}_{ns} &= c_{11}\,{}_{\nu}l_{ns} \cdot {}_uA^{\nu}_{ns} + c_{12}\beta_s \cdot {}_vA^{\nu}_{ns} + c_{13}k_n \cdot {}_wA^{\nu}_{ns}, \\
{}_xB^{\nu}_{nr} &= c_{11}\alpha_r \cdot {}_uB^{\nu}_{nr} + c_{12}\,{}_{\nu}m_{nr} \cdot {}_vB^{\nu}_{nr} + c_{13}k_n \cdot {}_wB^{\nu}_{nr}, \\
{}_xC^{\nu}_{rs} &= c_{11}\alpha_r \cdot {}_uC^{\nu}_{rs} + c_{12}\beta_s \cdot {}_vC^{\nu}_{rs} + c_{13}\,{}_{\nu}\gamma_{rs} \cdot {}_wC^{\nu}_{rs},
\end{aligned} \tag{4·24}
$$

$$
\sigma_x = \sigma_{x(ns)} + \sigma_{x(n\ )} + \sigma_{x(rs)}. \tag{4·25}
$$

同様に

$$
\begin{aligned}
\sigma_y = &\sum_{\nu}\sum_{n}\sum_{s} \cos\beta_s y \cos k_n z \cosh {}_{\nu}l_{ns}x \cdot {}_yA^{\nu}_{ns} + \\
&+ \sum_{\nu}\sum_{n}\sum_{r} \cos\alpha_r x \cos k_n z \cosh {}_{\nu}m_{nr}y \cdot {}_yB^{\nu}_{nr} + \\
&+ \sum_{\nu}\sum_{r}\sum_{r} \cos\alpha_r x \cos\beta_s y \cosh {}_{\nu}\gamma_{rs}z \cdot {}_yC^{\nu}_{rs},
\end{aligned} \tag{4·26}
$$

但し

$$
\begin{aligned}
{}_yA^{\nu}_{ns} &= c_{21}\,{}_{\nu}l_{ns} \cdot {}_uA^{\nu}_{ns} + c_{22}\beta_s \cdot {}_vA^{\nu}_{ns} + c_{23}k_n \cdot {}_wA^{\nu}_{ns}, \\
{}_yB^{\nu}_{nr} &= c_{21}\alpha_r \cdot {}_uB^{\nu}_{nr} + c_{22}\,{}_{\nu}m_{n} \cdot {}_vB^{\nu}_{nr} + c_{23}k_n \cdot {}_wB^{\nu}_{nr}, \\
{}_yC^{\nu}_{rs} &= c_{21}\alpha_r \cdot {}_uC^{\nu}_{rs} + c_{22}\beta_s \cdot {}_vC^{\nu}_{rs} + c_{23}\,{}_{\nu}\gamma_{rs} \cdot {}_wC^{\nu}_{rs},
\end{aligned} \tag{4·27}
$$

σ_z に対して

$$
\begin{aligned}
{}_zA^{\nu}_{ns} &= c_{31}\,{}_{\nu}l_{ns} \cdot {}_uA^{\nu}_{ns} + c_{32}\beta_s \cdot {}_vA^{\nu}_{ns} + c_{33}k_n \cdot {}_wA^{\nu}_{ns}, \\
{}_zB^{\nu}_{nr} &= c_{31}\alpha_r \cdot {}_uB^{\nu}_{nr} + c_{32}\,{}_{\nu}m_{nr} \cdot {}_vB^{\nu}_{nr} + c_{33}k_n \cdot {}_wB^{\nu}_{nr}, \\
{}_zC^{\nu}_{rs} &= c_{31}\alpha_r \cdot {}_uC^{\nu}_{rs} + c_{32}\beta_s \cdot {}_vC^{\nu}_{rs} + c_{33}\,{}_{\nu}\gamma_{rs} \cdot {}_wC^{\nu}_{rs},
\end{aligned} \tag{4·28}
$$

また剪断応力に対しては,

$$\begin{aligned}\tau_{yz} &= \tau_{yz(ns)} + \tau_{yz(nr)} + \tau_{yz(rs)},\\ &= \sum_{\nu}\sum_{n}\sum_{s} \sin\beta_s y \sin k_n z \cosh {}_{\nu}l_{ns}x \cdot {}_{yz}A^{\nu}_{ns} + \\ &+ \sum_{\nu}\sum_{n}\sum_{r} \cos\alpha_r x \sin k_n z \sinh {}_{\nu}m_{nr}y \cdot {}_{yz}B^{\nu}_{nr} + \\ &+ \sum_{\nu}\sum_{r}\sum_{s} \cos\alpha_r x \sin\beta_s y \sinh {}_{\nu}\gamma_{rs}z \cdot {}_{yz}C^{\nu}_{rs},\end{aligned} \tag{4·29}$$

但し

$$\begin{aligned}&{}_{yz}A^{\nu}_{ns} = -c_{41}(k_n \cdot {}_{v}A^{\nu}_{ns} + \beta_s \cdot {}_{w}A^{\nu}_{ns}),\quad {}_{yz}B^{\nu}_{ns} = c_{44}(-k_n \cdot {}_{v}B^{\nu}_{nr} + {}_{\nu}m_{nr} \cdot {}_{w}B^{\nu}_{nr}),\\ &\qquad {}_{yz}C^{\nu}_{rs} = c_{44}({}_{\nu}\gamma_{rs} \cdot {}_{v}C^{\nu}_{rs} - \beta_s \cdot {}_{w}C^{\nu}_{rs}).\end{aligned} \tag{4·30}$$

$$\begin{aligned}\tau_{zx} &= \sum_{\nu}\sum_{n}\sum_{s} \cos\beta_s y \sin k_n z \sinh {}_{\nu}l_{ns}x \cdot {}_{zx}A^{\nu}_{ns} + \\ &+ \sum_{\nu}\sum_{n}\sum_{r} \sin\alpha_r x \sin k_n z \cosh {}_{\nu}m_{nr}y \cdot {}_{zx}B^{\nu}_{nr} + \\ &+ \sum_{\nu}\sum_{r}\sum_{s} \sin\alpha_r x \cos\beta_s y \sinh {}_{\nu}\gamma_{rs}z \cdot {}_{zx}C^{\nu}_{rs},\end{aligned} \tag{4·31}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \sum_{\nu}\sum_{n}\sum_{s} \sin\beta_s y \cos k_n z \sinh {}_{\nu}l_{ns}x \cdot {}_{xy}A^{\nu}_{ns} + \\ &+ \sum_{\nu}\sum_{n}\sum_{r} \sin\alpha_r x \cos k_n z \sinh {}_{\nu}m_{nr}y \cdot {}_{xy}B^{\nu}_{nr} + \\ &+ \sum_{\nu}\sum_{r}\sum_{s} \sin\alpha_r x \sin\beta_s y \cosh {}_{\nu}\gamma_{rs}z \cdot {}_{xy}C^{\nu}_{rs},\end{aligned} \tag{4·32}$$

但し

$$\begin{aligned}&{}_{zx}A^{\nu}_{ns} = c_{55}(-k_n \cdot {}_{u}A^{\nu}_{ns} + {}_{\nu}l_{ns} \cdot {}_{w}A^{\nu}_{ns}),\quad {}_{zx}B^{\nu}_{nr} = -c_{55}(k_n \cdot {}_{u}B^{\nu}_{nr} + \\ &\qquad + \alpha_r \cdot {}_{u}B^{\nu}_{nr}),\quad {}_{zx}C^{\nu}_{rs} = c_{55}({}_{\nu}\gamma_{rs} \cdot {}_{u}C^{\nu}_{rs} - \alpha_r \cdot {}_{w}C^{\nu}_{rs}),\\ &{}_{xy}A^{\nu}_{ns} = c_{66}(-\beta_s \cdot {}_{u}A^{\nu}_{ns} + {}_{\nu}l_{ns} \cdot {}_{v}A^{\nu}_{ns}),\quad {}_{xy}B^{\nu}_{nr} = c_{66}({}_{\nu}m_{nr} \cdot {}_{u}B^{\nu}_{nr} + \\ &\qquad - \alpha_r \cdot {}_{v}B^{\nu}_{nr}),\quad {}_{xy}C^{\nu}_{rs} = -c_{66}(\beta_s \cdot {}_{u}C^{\nu}_{rs} + \alpha_r \cdot {}_{v}C^{\nu}_{rs}).\end{aligned} \tag{4·33}$$

上記の変位並びに応力表現は λ_{ns}, μ_{nr}, ν_{rs} が零である場合のものであり，それらが零でない場合には表現は少しく崩れることになる．また上の表現は $x=0$, $y=0$, $z=0$, 平面に関して対称的な荷重分布に対するものであるが，一般的な荷重分布の場合には，座標の原点を直方体の一隅に移し，例えば

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \sum_{n}\sum_{s} \cos\beta_s y \cos k_n z\,(A^{1}_{ns} \cosh {}_{1}l_{ns}x + \bar{A}^{1}_{ns} \sinh {}_{1}l_{ns}x) + \\ &+ \sum_{n}\sum_{r} \cos\alpha_r x \cos k_n z\,(B^{1}_{nr} \cosh {}_{1}m_{nr}y + \bar{B}^{1}_{nr} \sinh {}_{1}m_{nr}y) + \\ &+ \sum_{r}\sum_{s} \cos\alpha_r x \cos\beta_s y\,(C^{1}_{rs} \cosh {}_{1}\gamma_{rs}z + \bar{C}^{1}_{rs} \sinh {}_{1}\gamma_{rs}z),\end{aligned} \tag{4·34}$$

のように置き，

$$\alpha_r=\frac{r\pi}{2a},\quad \beta_s=\frac{s\pi}{2h},\quad k_n=\frac{n\pi}{2h}. \tag{4·35}$$

のように変更して，δ に関する方程式を書き直す等のことにより，容易に一般的な解の形を書き下せることは等方性物体の場合と同様である．なお上記の解は，直方体の表面に直交する x, y, z 軸が異方性の対称軸と平行している場合であり，もし平行していなければ，極めて複雑化することと明らかである．この場合，一般には一般化された Hooke の法則は第2節におけるような 21 箇の弾性常数を有する異方性体の場合と同じ型となり，都合の悪い場合には，第4節のような直方体の扱い方によれば，δ の方程式は複素係数を有する 6 次の方程式となるので，δ の代りに $i\delta$ と置いて計算を進めれば，目的を同様に達し得る事は明かである．之については他日述べたい．

§5. 結　　言

一般異方性弾性体の三次元問題に関する一般解を筆者寡聞にして知らず，弾性学の教科書及び内外文献にもそれらしいものがあるようにも見えなかつたので，敢て一つの一般解を述べたものである．異方性弾性問題の一般三次元解の導出法に別に妙法があるとは思えないが，ここに述べたものは大分稚拙な点があるようである．この研究は H. A. Elliott 及び A. S. Lodge の解 (3·33)～(3·37) の完全性を調べるために始めたもので，得られた結果を大略述べて，諸方の御教示を得たいと思う次第である．

一般異方性弾性体や横等方性弾性体については，他日報告するつもりである．ここに直交異方性の場合が多いものと考えて，一つの例解の形を示した．cubic crystal ですら，横等方性弾性体の場合の変位表現 (3·33)～(3·37) のような簡単な解が得られず，複雑な形をとることが分つた．横等方性の場合，等方性弾性体の問題の一般解 (3·7) 等を考慮することにより，容易にその一般解が得られるのであるが，cubic crystal では到底そのように行かないようである．(3·28)，(3·11) 等より導出できることは前述した．このような結果では，直角座標系以外の座標系への適用は困難のようで遺憾である．横等方性の場合は容易であることは (3·33)～(3·37) の式を見れば了解されることと思う．(3·24) 式のように実数 $a_{\alpha\beta}$ をもつて分解されれば，他座標系への適用が容易である．扱う異方性は直交異方性が多いことと思われるが，横等方性弾性問題は直交異方性物体の平面変形問題の直接的な三次元への拡張に相当していると考えられるであろうから，先ず調べるべき直交異方性体であろう．しかして緒言に曲線直交異方性は省き度いということを述べたが，次のことを附言する．

即ち円壔座標 (r, θ, z) による次の (5·1) 表現が curvilinear anisotropy をあらわすとしても，制限された意味においてであると思われる．

軸対称問題を扱うこととし，z 軸を対称軸にとる．

$$
\begin{aligned}
e_r &= \frac{\partial u}{\partial r} = \alpha_{11}\sigma_r + \alpha_{12}\sigma_\theta + \alpha_{13}\sigma_z, \\
e_\theta &= \frac{u}{r} = \alpha_{12}\sigma_r + \alpha_{11}\sigma_\theta + \alpha_{13}\sigma_z, \\
e_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = \alpha_{13}\sigma_r + \alpha_{13}\sigma_\theta + \alpha_{33}\sigma_z,
\end{aligned}
\tag{5·1}
$$

但し
$$\gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} = \alpha_{44}\tau_{rz},\ \ \gamma_{\theta z} = \gamma_{r\theta} = 0$$

u は r 方向変位，w は z 方向変位として，又弾性係数は次の様にも書ける．

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{11} = \beta_{rr},\ \ \alpha_{12} = \beta_{r\theta},\ \ \alpha_{13} = \beta_{rz}, \\
&\alpha_{22} = \alpha_{11} = \beta_{\theta\theta},\ \ \alpha_{23} = \alpha_{13} = \beta_{\ z},\ \ \alpha_{33} = \beta_{zz}, \\
&\alpha_{44} = 1/G_{rz}.
\end{aligned}
\tag{5·2}
$$

(5·1) の表現を z 軸を共通とする ($x,\ y,\ z$) 座標系へ変換すると次のようになる．

$$
\begin{aligned}
e_x &= \alpha_{11}\sigma_x + \alpha_{12}\sigma_y + \alpha_{13}\sigma_z, \\
e_y &= \alpha_{12}\sigma_x + \alpha_{11}\sigma_y + \alpha_{13}\sigma_z, \\
e_z &= \alpha_{13}\sigma_x + \alpha_{13}\sigma_y + \alpha_{33}\sigma_z, \\
\gamma_{xz} &= \alpha_{44}\tau_{xz},\ \ \gamma_{yz} = \alpha_{44}\tau_{yz}.
\end{aligned}
\tag{5·3}
$$

しかして z 軸が axis of elastic symmetry に平行な場合の A. E. H. Love の書の記号による Hooke の法則は，横等方性に対して，次のもの．

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= c_{11}e_x + c_{12}e_y + c_{13}e_z, \quad & \tau_{xz} &= c_{44}\gamma_{xz}, \\
\sigma_y &= c_{12}e_x + c_{11}e_y + c_{13}e_z, \quad & \tau_{yz} &= c_{44}\gamma_{yz}, \\
\sigma_z &= c_{13}e_x + c_{13}e_y + c_{33}e_z, \quad & \tau_{xy} &= c_{66}\gamma_{xy},
\end{aligned}
\tag{5·4}
$$

但し $c_{66} = 1/2(c_{11}-c_{12})$，軸対称問題では先ず $\tau_{xy} = 0$，よつて (5·3) と (5·4) は全く同じ形をあらわしていることは明らかである．即ち，(5·4) は

$$
\begin{aligned}
e_x &= \alpha_{11}'\sigma_x + \alpha_{12}'\sigma_y + \alpha_{13}'\sigma_z, \quad & \gamma_{xz} &= \alpha_{44}'\tau_{xz}, \\
e_y &= \alpha_{12}'\sigma_x + \alpha_{11}'\sigma_y + \alpha_{13}'\sigma_z, \quad & \gamma_{yz} &= \alpha_{44}'\tau_{yz}, \\
e_z &= \alpha_{13}'\sigma_x + \alpha_{13}'\sigma_y + \alpha_{33}'\sigma_z.
\end{aligned}
\tag{5·5}
$$

故に (5·1) は曲線異方性物体に対する一般化された Hooke の法則を表わすといつても，正に横等方性物質の Hooke の法則そのものである．事柄は余りにも明瞭で以上の様な説明を要しない程である．直交曲線異方性の名にふさわしいものは別に考えられよう．

終に臨み，御指導を戴いた藤井教授，原稿を読んで頂いた久野教授，半沢助教授，並に御厄介になる機械科の諸先生に深く感謝の意を表します．

参 考 文 献

1) 例えば，倉西正嗣：“弾性学”日本機械学会，昭和 23 年，584 頁及び 586-7 頁脚註.
   大久保肇：日本機械学会論文集，16 巻，55 号，18 頁（昭和 25 年）.
   同 上， 17 巻，61 号，46 頁（昭和 26 年）.
   樋口正一：日本機械学会論文集，15 巻，50 号，101 頁（昭和 24 年）.
   同 上， 16 巻，55 号，67 頁（昭和 25 年）.
   鷲津久一郎：日本機械学会論文集，18 巻，68 号，47 頁（昭和 27 年）.
2) A. E. H. Love: “The Mathematical Theory of Elasticity”, Cambridge University Press, London, 1934, pp. 149-165, pp. 99-100.
3), 4) A. E. H. Love: ibid. p. 161, p. 160.
5) 秦 謹一：北海道大学工学部研究報告，13 号，17 頁（昭和 30 年 12 月）
6) 樋口正一：同上，15 巻，50 号，1-101 頁（昭和 24 年）.
7) A. S. Lodge: Quart. J. Mech. and Applied Math., Vol. 8, p. 211 (1955).
8) H. A. Elliott: Proc. Camb. Phil. Soc. Vol. 44, p. 522 (1948)
9) S. G. Lexnitzky: 倉西博士説明，応用数学力学，1巻，2号，51 頁（昭和 22 年 8 月）.
10) 秦 謹一：同上，11 号，105 頁（昭和 29 年 12 月）.

* A. S. Lodge の論文中に $\nu_3=\dfrac{2c_{44}}{c_{11}-c_{22}}$ とあるは印刷誤り.