



# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	不定常熱流による熱伝導率の迅速測定について
Author(s)	斎藤, 武; Saito, Takeshi; 岡垣, 理 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 14, 83-102
Issue Date	1956-06-05
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/40587">https://hdl.handle.net/2115/40587</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	14_83-102.pdf



# 不定常熱流による熱伝導率の 迅速測定について

齋 藤 武  
岡 垣 理

(昭和31年2月29日受理)

## On a Transient Flow Method for Determination of Thermal Conductivities

Takeshi SAITO  
Osamu OKAGAKI

### Abstract

The theoretical relations have been developed on a transient flow method for determination of thermal conductivities by cylindrical thermal probe. Considering thermal resistance at the boundary between probe and surrounding material, a probe temperature  $\theta$  versus elapsed time  $t$  is written generally as follows,

$$\theta = A \log t + B + \frac{1}{t} (C \log t + D).$$

where  $A$  denotes  $q/4\pi\lambda$  and  $q$  is heat supplied per unit time. Then a thermal conductivity  $\lambda$  is determined from these relations about a probe temperature. The third term in this equation can be neglected under such conditions that probe diameter is small,  $c \cdot \rho$  (kcal/m<sup>3</sup>·°C) is large, and measurement of a probe temperature has been done at large time period. The limits of application of such simplified case is determined. And new cylindrical thermal probe was constructed and applied in measurement on some materials.

### 目 次

I. 緒 言	2
II. 測定法の理論	2
1. 熱源を線状と看做した場合	2
2. 線状熱源の周りに空気層のある場合	3
3. 熱源の太さを無視し得ない場合	4
a. 棒状熱源と試料が完全に接触している場合	5
b. 棒状熱源と試料との間に接触熱抵抗または空気層が存在する場合	8
4. 熱源の太さと長さとの関係, および試料の大きさについて	8
III. 測定装置および方法	10
IV. 測定結果	12
V. 結 言	13
文 献	15
附 録	16

## I. 緒 言

物体の熱伝導率測定には、それぞれ特徴のある多くの測定方法が用いられているが、大別して定常熱流法と不定常熱流法とになる。保温材、建築用材などの熱伝導率測定に最も広く用いられているのは定常熱流法であり、試料には平板型のものを用いるものが多い。この方式で測定精度を高めるためには、計測にかなりの長時間を要し、また、その間主熱板および補償熱板の加熱量を使用電源の電圧あるいは外気温度などの変動に対し調整しなければならぬ不便がある。さらに試料と熱板との間に接触抵抗や空気層抵抗が存在すれば、測定精度に及ぼす影響は無視し得なくなる。一方、球あるいは円柱など特殊形状の試料について、加熱または冷却曲線を利用する不定常熱流法、あるいは試料に周期的熱流を与えることによつて生ずる温度波を利用する準定常熱流法では、さきの定常熱流法の短所をある程度補い得ても、この方式は、いずれも温度伝播率を決定するもので、熱伝導率を求めるためには、さらに試料の比熱および比重を測定しなければならない。すなわち、この方法は熱伝導率の測定に対しては間接的方法となる。

当測定法は、不定常熱流法に属するが、試料内に線状熱源を挿入し、連続的に一定の熱量を放出せしめ熱源に接する試料の温度変化を測定することにより、比較的簡単な装置および操作で短時間に、しかも直接に熱伝導率を求めることができる。このような原理に基づく方式が、工学的測定法として採用されたのは比較的近年のことで、Van de Held<sup>1)</sup> (1948) により提唱され、その後 F. C. Hooper & F. R. Lepper<sup>2)</sup>, P. E. Glaser<sup>3)</sup>, J. H. Blackwell<sup>4)</sup> らにより、なお、わが国では岡山大(理)坂手邦夫、中峠哲朗氏<sup>5)</sup> らにより研究が行われているが、本測定法の諸特性、とくに装置および試料の寸法、試料の熱的特性値が、測定誤差に及ぼす影響などについては不明な点が多い。本報においては、これらの諸特性を解析し、試作した装置を概説し、なお、1, 2の試料について行つた熱伝導率の実測結果を報告する。

## II. 測定法の理論

### 1. 熱源を線状と看做した場合

温度一様な無限大の均質試料の中に、線状熱源が直線的に存在する場合を考える。初期温度  $\theta_0$  [°C] の試料に、熱源より一定熱量  $q$  [kcal/h·m] を連続的に供給加熱すると、加熱後時間  $t$  [h] において熱源より距離  $r$  [m] 上の試料温度  $\theta$  [°C] は、熱源を軸とする円柱座標をとれば、つぎのように表わされる<sup>6)</sup>。

$$\theta = \theta_0 + \frac{q}{4\pi\lambda_2} \int_{\frac{r^2}{4\kappa_2 t}}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \equiv \theta_0 - \frac{q}{4\pi\lambda_2} E_i\left(-\frac{r^2}{4\kappa_2 t}\right). \quad (1)$$

ここで、 $\lambda_2$  = 試料の熱伝導率 [kcal/m·h·°C],  $\kappa_2$  = 試料の温度伝播率 [m<sup>2</sup>/h],  $u$  = 積分変数,  $-E_i(-x) =$  指数積分  $= \int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$ .

指数積分を漸近展開すると、式(1)は時間  $t$  の充分大きい値に対しては、近似的につきのよう  
に示される。

$$\theta \doteq \theta_0 + \frac{q}{4\pi\lambda_2} \left( \log \frac{4\kappa_2 t}{r^2} - \gamma \right) \quad (2)$$

ただし、 $\gamma = \text{Euler 常数} = 0.57721 \dots$ 。

式(2)を用いて時間  $t_1, t_2$  間の温度差  $\Delta\theta$  を求めれば

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \theta_{t=t_2} - \theta_{t=t_1} = \frac{q}{4\pi\lambda_2} \log \frac{t_2}{t_1} \\ \therefore \lambda_2 &= \frac{q}{4\pi} \frac{\log \frac{t_2}{t_1}}{\Delta\theta} \end{aligned} \quad (3)$$

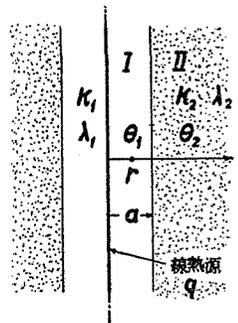
従つて、式(2)が近似的に成り立つ程度に測定時間が充分大きいときは、試料の熱伝導率  $\lambda_2$  は  
測温個所に関係なく任意の一点における時間  $t_1, t_2$  間の温度差  $\Delta\theta$  および供給熱量  $q$  を測定す  
るのみで求めることができる。

このような  $t_1$  値は、試料の温度伝播率  $\kappa_2$  および測温点  $r$  により異り、 $\kappa_2$  の大きいほど、ま  
た  $r$  の小さいほど短い時間をとることができる。例えば、一般工業用材料のうち、温度伝播率の  
低いコルク ( $\kappa_2 \doteq 0.0005 \text{ m}^2/\text{h}$ ) について、式(1)で表わされる厳密解と式(2)で表わされる  
近似解との差異が 1% 以内に留まるような時間  $t_1$  を計算すれば、測温点  $r = 1 [\text{mm}]$  に対し  
ては 1 [min]、また  $r = 3 [\text{mm}]$  に対しては 7 [min] となる。しかし、本法においては、測温  
用熱電対を直接熱源に取り付けて熱源自体の温度上昇を測定し熱伝導率を求めるので、 $t_1$  は上記  
の値よりもさらに短縮される。従つて、一般工業用材料に対しては、熱伝導率は、精々 10 ない  
し 15 分間の短時間測定で式(3)に基き算定できることとなる。

## 2. 線状熱源の周りに空気層のある場合

試料の熱伝導率測定は、あらかじめ試料に穿つた細孔中に熱源を挿入して行うため、熱源と試  
料との間に空隙を生ずることがある。このような場合には、空隙がな  
いとして導いた上記の関係式は補正されなければならない。

いま、第 1 図のごとく線状熱源周りに半径  $a [\text{m}]$  なる空隙を考え、  
空隙および試料をそれぞれ添字 1, 2 をつけて区別すれば、空隙内の  
温度  $\theta_1$  は  $t$  の大きい値に対し近似的につきのように表わされる。た  
だし、空隙内において空気の対流は伴わないものとする。なお、この  
式の誘導は附録に示した。

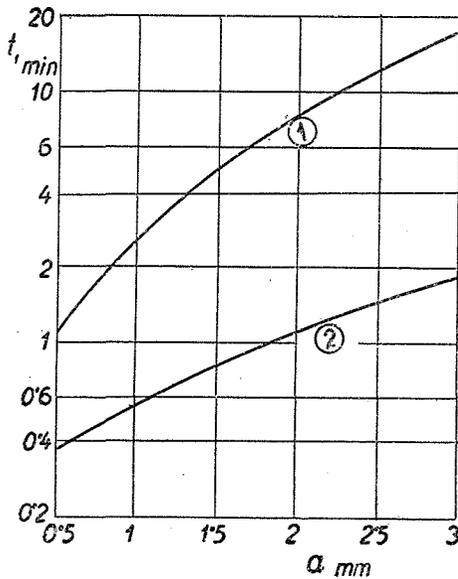


第 1 図

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_0 + \frac{q}{4\pi} \left[ \frac{1}{\lambda_2} \left( \log \frac{4\kappa_2 t}{a^2} - \gamma \right) + \frac{1}{\lambda_1} \log \frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{t} \left\{ \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \frac{r^2}{4\kappa_1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{a^2}{2} \frac{1}{\lambda_2} \left( \frac{1}{\kappa_2} - \frac{1}{\kappa_1} \right) + \frac{a^2}{2} \left( \frac{1}{\kappa_2 \lambda_2} - \frac{\lambda_1}{\kappa_1 \lambda_2^2} \right) \left( \log \frac{4\kappa_2 t}{a^2} - \gamma \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

上式は  $\lambda_1 = \lambda_2$  および  $\kappa_1 = \kappa_2$  と置くことにより, 式 (2) と全く一致し, 線熱源の周りに空隙のない場合の式に相当する. 従つて,  $\frac{1}{\lambda_1} \log \frac{a^2}{r^2}$  および  $\frac{1}{t}$  項が空隙の影響を表わす附加項となる. なお, 測温点を空隙と試料との境界面上にとり,  $r = a$  と置けば, 式 (4) はつぎのように示される.

$$\theta_1 = \theta_0 + \frac{q}{4\pi} \left[ \frac{1}{\lambda_2} \left( \log \frac{4\kappa_2 t}{a^2} - \gamma \right) + \frac{a^2}{2} \frac{1}{t} \left\{ \frac{1}{\lambda_2} \left( \frac{1}{\kappa_2} + \frac{1}{2\kappa_1} \right) - \frac{1}{2\lambda_1 \kappa_1} + \left( \frac{1}{\kappa_2 \lambda_2} - \frac{\lambda_1}{\kappa_1 \lambda_2^2} \right) \left( \log \frac{4\kappa_2 t}{a^2} - \gamma \right) \right\} \right] \quad (5)$$



第 2 図

式 (5) において  $\frac{1}{t}$  項を省いて得られる結果は, 式 (2) において  $r = a$  と置いたものに等しく, この場合  $\frac{1}{t}$  項が空隙の影響を表わす.

上述のように,  $\frac{1}{t}$  項を省略し得る程度に  $t$  を充分大きく選べば, 空隙の影響は無視できるので式 (3) に基く熱伝導率の算定が可能となる. 第 2 図は 1, 2 の物質につき, 測温点の温度変化に及ぼす空隙の影響, 換言すれば,  $\frac{1}{t}$  項の影響を 1% に抑えるために要する最小所要時間と空隙の大きさとの関係を示す. 同図の曲線 ①, ② はそれぞれコルク, 石炭に対して行つた計算結果を表わし, 各物質の特性値には, 第 1 表のごとき値を用いた. ただし, 比較を容易にするため, 測温点は空隙の

大小にかかわらず, すべて  $r = 0.5$  [mm] として計算した. 例えば, 式 (3) を用いて熱伝導率を求めるためには, 空隙 1.5 [mm] の場合コルクでは少くとも, 約 5 [min] 以上の測定時間を要するのに対し, 石炭では約 1 [min] で充分なこととなる. 勿論, 空隙の小さいほど所要測定時間は短縮できる.

第 1 表

曲線番号	物質	熱伝導率 $\lambda$ [kcal/m·h·°C]	温度伝播率 $\kappa$ [m <sup>2</sup> /h]	比熱 $c$ [kcal/kg·°C]	比重量 $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	引用文献
①	コルク	0.043	0.00048	0.3	300	M. ten Bosch: Die Wärmeübertragung. Springer, 1936.
②	石炭 (塊状)	0.20	0.00078	0.2	1300	
	空気	0.0216	0.077	0.242	1.16	

### 3. 熱源の太さを無視し得ない場合

上記諸式は, いずれも熱源は線状として求めたものである. すなわち, 線熱源は, 自体極めて

細く、かつ熱容量の無視できる場合についてのみ成り立つ。しかし実際には、熱源の保護ならびに機械的強度その他製作上の問題などから、熱源を線状と看做し得ない棒状の構造となる。さらに、一般には熱源材料の熱伝導率が有限であるため、熱源内部に半径方向の温度勾配を生じ、あるいは、また熱源と試料との間に空隙が存在するなど、問題は著しく複雑となる。とくに空隙が存在する場合に関する理論的解析は、極めて煩雑であるため、ここでは空隙の影響については、熱源が線状である場合について求めた式 (4) の結果より類推するに止める。

a. 棒状熱源と試料が完全に接触している場合

以下に述べる諸式は熱源部と試料とが完全に接触しているという条件のもとで成り立つ。簡単のため、線状熱源を熱源保護用の半径  $a$  [m] なる棒の軸心に収め、これら総体を熱源と考えるならばさきに求めた式 (4), (5) などが、ただちに適用できる。すなわち、この場合の熱源温度は同式における空隙を熱源部物質で置きかえるのみで求まる。

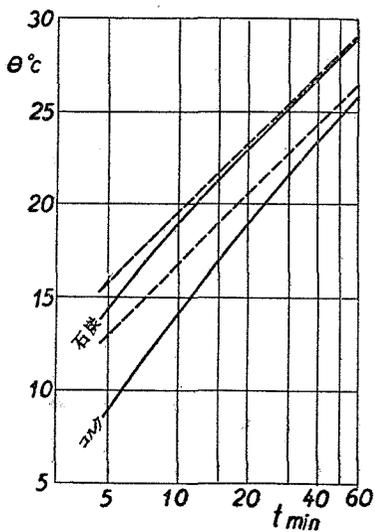
また、熱源部物質を熱的完全導体、すなわち、熱伝導率無限大とみなしたときの温度は、式 (4) または (5) において  $\lambda_1 \rightarrow \infty$  ならびに  $\kappa_1 \rightarrow \infty$  なる極限をとることにより、次式のように表わされる。

$$\theta_1 = \theta_0 + \frac{q}{4\pi} \left[ \frac{1}{\lambda_2} \left( \log \frac{4\kappa_2 t}{a^2} - \gamma \right) + \frac{a^2}{2t} \left\{ \frac{1}{\lambda_2 \kappa_2} + \left( \frac{1}{\kappa_2 \lambda_2} - \frac{c_1 \rho_1}{\lambda_2^2} \right) \left( \log \frac{4\kappa_2 t}{a^2} - \gamma \right) \right\} \right] \quad (6)$$

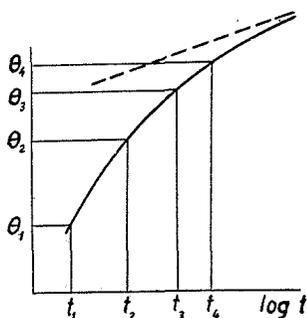
ここで、熱源部物質と試料との特性値を区別するため、それぞれ添字 1, 2 を用いた。また  $c$  は比熱 [kcal/kg $\cdot$ °C],  $\rho$  は比重 [kg/m $^3$ ] を表わし、 $c \cdot \rho = \frac{\lambda}{\kappa}$  の関係がある。

熱源を構成する物質を、銅のように熱伝導率の極めて大きい物質としたとき、および完全導体としたときの差異を求めるために、前掲の式 (5), (6) を用いて、この二つの場合に対する熱源部の外側面温度を比較する。いま、熱源直径  $2a = 0.006$  [m] (試作装置の熱源直径と同径)、銅の熱伝導率  $\lambda_1 = 320$  [kcal/m $\cdot$ h $\cdot$ °C], 温度伝播率  $\kappa_1 = 0.38$  [m $^2$ /h] として、式 (5), (6) の違いを表わす附加項  $\left( \frac{1}{\lambda_2 \kappa_1} - \frac{1}{2\lambda_1 \kappa_1} \right)$  が熱源の温度に及ぼす影響を計算すれば、その影響は、ほとんど計算誤差の範囲に入るので、近似的には銅を完全導体と看做し、式 (6) を用いても実用上差支えないことがわかる。

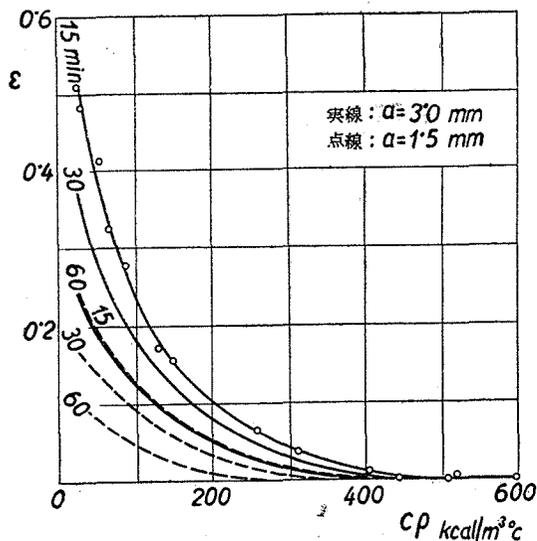
上述のように、式 (4), (5), (6) における  $\frac{1}{t}$  項は熱源の熱容量を無視し得ないときに現われる項であるが、相当長時間にわたつて測定を行い、 $t$  を充分大きく選べば、 $\frac{1}{t}$  項を省略して線熱源の場合と全く同様に熱伝導率を求めることができる。しかし、供試材の種類により線熱源として取扱うために要する測定時間は異り、とくに  $c \cdot \rho$  [kcal/m $^3 \cdot$ °C] 値の低い物質に対しては、長時間測定が必要となる。一例として前表に示した物質につき、式 (6) を用いて計算した温度変化の模様を第 3 図に示した。縦軸に温度、横軸に時間の対数をとれば、 $\frac{1}{t}$  項を省き線熱源と看做したときの温度変化は、破線で表わされ、実線は  $\frac{1}{t}$  項を含む棒状熱源の温度変化を表わす。



第 3 図



第 4 図



第 5 図

なお、同図においては 2 種の物質に対し破線の表わす温度変化が平行となるように、それぞれの供給熱量  $q$  を変えて計算し、比較を容易にした。図より明らかなように、 $c \cdot \rho$  値の大きい石炭においては  $\frac{1}{t}$  項の減衰は速く、従つて、比較的短時間の測定で、式 (3) を用いて熱伝導率を求めることができる。これに反し、 $c \cdot \rho$  値の小さいコルクに対しては、式 (3) を用いるためには、極めて長時間の測定を必要とする。

いま、第 4 図のように、温度曲線を  $\log t$  について分割し、順次各区間を直線で結び各区間の温度変化に対し、式 (3) より求めた熱伝導率  $\lambda_2'$  は、時間  $t$  の増大とともに一定値、すなわち、試料の熱伝導率  $\lambda_2$  に近づく。このように、式 (3) により熱伝導率を算定する際には、加熱後、測定を始めるまでの時間が不十分であれば、得られる熱伝導率に誤差を生じ、またその程度は、試料の  $c \cdot \rho$  値によつて異なる。第 5 図は、前記第 1 表ならびに第 2 表に示すような、特性値のそれぞれ異なる物質につき、棒状熱源の直径  $2a=6$  [mm] (実線)、3 [mm] (破線) なる二通りの熱源に対し、また測定時間をそれぞれ加熱後 15, 30, 60 [min] なる三通りの場合につき誤差  $\varepsilon = \frac{\lambda_2 - \lambda_2'}{\lambda_2}$  の計算を行つた結果を表わす。ここで、例えば、測定時間が加熱後 30 分というのは、 $t_1 = 25, t_2 = 30$  [min] のように測定時間の最後の 5 分間の値をとつて  $\varepsilon$  を算出することである。誤差  $\varepsilon$  は  $c \cdot \rho$  値および測定時間とともに、また熱源直径の細いほど減少するが、同図の曲線は、その傾向を示している。なお計算値のうち、熱源直径  $2a = 6$  [mm]、測

第 2 表

物 質	熱伝導率 $\lambda$ [kcal/m·h·°C]	温度伝播率 $\kappa$ [m <sup>2</sup> /h]	比 熱 $c$ [kcal/kg·°C]	比重量 $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$c \cdot \rho$ [kcal/m <sup>3</sup> ·°C]	引用文献
アスベスト-フェルト	0.040	0.0018	0.195	116	23	M. ten Bosch: Die Wärmeüber- tragung. Spring- er, 1936,
絹 屑	0.0425	0.0014	0.3	100	30	
羊 毛	0.033	0.00061	0.4	136	54	
珪 藻 土	0.066	0.00094	0.2	350	70	
煉 瓦	0.145	0.0011	0.18	710	128	
軽石-セメント壁	0.13	0.00086	0.24	630	151	
石膏板(3週間乾燥)	0.37	0.0012	0.25	1250	313	
エポナイト	0.14	0.00034	0.34	1190	405	
水 銀	6.0	0.013	0.033	13600	449	
石 灰 石	1.1	0.0022	0.2	2550	510	
コンクリート	0.4	0.00078	0.20	2600	520	
花 崗 岩	3.5	0.0058	0.2	3000	600	

定時間  $t = 15$  [min] に対する値を図に表した。また、熱源直径 6 [mm]、測定時間 60 [min] に対する誤差は、熱源直径 3 [mm]、測定時間 15 [min] に対する誤差と等しくなり、図の上では両曲線は一致する。この図より明らかなように、岩石、コンクリートなどのごとく  $c \cdot \rho$  値の大きい物質よりもフェルト、テックス類などのごとく  $c \cdot \rho$  値の小さい物質に対しては、より細かい熱源を選ばねばならない。前述のように、熱源の太さは強度上また製作上の理由で、その最小値におのずから制限があり、従つて、式 (3) を用いて熱伝導率を求めようとする限り測定に極めて長時間を要し、本測定法の利点を著しく減ずる結果となる。

もし、このような場合にも短時間測定を行わんとすれば、式 (3) は用い得ず、式 (6) を用いねばならぬ。このときは計算は少し煩雑となるがつぎのようにして熱伝導率は求められる。いま式 (6) をつぎのごとく書き換える。

$$\theta_1 = A \log t + B + \frac{1}{t} (C \log t + D) \quad (7)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{q}{4\pi\lambda_2}, \quad B = \frac{q}{4\pi\lambda_2} \log \frac{4\kappa_2\beta}{a^2}, \quad -\gamma = \log \beta, \\ C &= \frac{qa^2}{8\pi} \left( \frac{1}{\kappa_2\lambda_2} - \frac{c_1\rho_1}{\lambda_2^2} \right), \quad D = \frac{qa^2}{8\pi} \left\{ \left( \frac{1}{\kappa_2\lambda_2} - \frac{c_1\rho_1}{\lambda_2^2} \right) \log \frac{4\kappa_2\beta}{a^2} + \frac{1}{\lambda_2\kappa_2} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

最小自乗法により実測温度を式 (7) に当て嵌めて諸係数を定めると、試料の熱伝導率は、式 (8) の最初の表式にもとづき、つぎのように算定される。

$$\lambda_2 = \frac{q}{4\pi A} \quad (9)$$

この方法は、測定に長時間を必要とせず、かつ得られた熱伝導率に対する測定上の誤差評価も最

小自乗法を用いるため機械的に行い得るなどの利点をもつ。なお、式 (8) のうち  $A, B$  に対する関係式より試料の温度伝播率  $\kappa_2$  はつぎのごく算出できる。

$$\kappa_2 = \frac{Ea^2}{4\beta} \quad \text{ここで, } E = \log \frac{B}{A}. \quad (10)$$

b. 棒状熱源と試料との間に接触熱抵抗または空気層が存在する場合

前述のように、熱源の太さが線状熱源と看做されない程度に太く、さらに熱源と試料の間に空隙が存在する場合に対する理論的解析は、極めて複雑である。しかし、この空気層の厚さは無視することができ、すなわち、空気層の熱容量が省略でき、熱抵抗のみを考えるとときには、問題は比較的簡単となる。かかる場合の温度式は、Blackwell<sup>7)</sup> により次式のように与えられる。ただし、熱源自体は熱伝導率無限大の完全導体とする。

$$\theta_1 = \theta_0 + \frac{q}{4\pi} \left[ \frac{1}{\lambda_2} \left( \log \frac{4\kappa_2 t}{a^2} - \gamma \right) + \frac{2}{aH} \right. \\ \left. + \frac{1}{t} \frac{a^2}{2} \left\{ \frac{1}{\kappa_2 \lambda_2} + \left( \frac{1}{\kappa_2 \lambda_2} - \frac{c_1 \rho_1}{\lambda_2^2} \right) \left( \log \frac{4\kappa_2 t}{a^2} - \gamma \right) - \frac{2c_1 \rho_1}{aH\lambda_2} \right\} \right] \quad (11)$$

ここで、 $H$  は接触熱抵抗 [ $\text{kcal}/\text{m}^2 \cdot \text{h} \cdot ^\circ\text{C}$ ] を表わす。

熱源と試料との間に有限厚さの空気層が介在する場合、温度式は、式 (4), (6) および (11) などより類推することができる。すなわち、その温度式は、空隙の影響を表わす式 (4) と熱源の熱容量 (熱源の太さ) の影響を表わす式 (6) とを重畳した型をとり、結局、式 (4), (6), (11) などと同様、線熱源に対する基本式 (2) に  $\frac{1}{t}$  項を含む項を付け加えたつぎのような型で示されるものと推定される。

$$\theta_1 = A' \log t + B' + \frac{1}{t} (C' \log t + D') \quad (12)$$

ここで、 $A' = A = \frac{q}{4\pi\lambda_2}$ 、また  $B', C', D'$  などは熱源の太さ、熱源、試料間の空隙または接触抵抗の有無などにより異なり、前記の式 (2), (4), (5), (6), (7), (11) などは、すべてこれら諸係数の特殊な場合である。

式 (12) の  $\frac{1}{t}$  項を省き得る程度に長時間測定を行えば、式 (3) に基いて熱伝導率は算定できるが、所要測定時間は、式 (6), (7), (11) において必要とするよりも、さらに増加するものと予想される。

#### 4. 熱源の太さと長さとの関係、および試料の大きさについて

上記諸式は、すべて熱流が半径方向に向う一次元流れの場合について成り立つので、理論上無限に長い熱源を必要とするが、実際には熱源の長さは有限であるため、その端部において熱流は二次元流となる。従つて測温点の温度に及ぼす端効果の影響が無視せられる程度に熱源の長さと同半径との比を大きくとらねばならない。これについては、Blackwell<sup>7)</sup> により理論的につぎのご

とき関係が導かれている。

初期温度0の半無限試料内に半径  $a$  [m], 長さ  $2L$  [m] の円筒型熱源を考え, 境界条件としては,  $z = \pm L$ ,  $r > a$  が温度0に保たれるように定める. ただし  $z$  は軸方向の長さを表わす.

このような条件に対して求めた熱源中央の温度は,

$$\theta = \frac{16aq}{\pi^2\lambda_2} \int_0^r \left[ \int_0^\infty \frac{e^{-uy^2}}{y[J_1^2(y) + Y_1^2(y)]} dy \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2u}{4L^2}}}{2k+1} \right] du \quad (13)$$

となる. ここで,  $T = \frac{\kappa_2 t}{a^2}$ , また  $J_1(y)$ ,  $Y_1(y)$  はそれぞれ一次の第1種および第2種 Bessel 関数である. 一方,  $L \rightarrow \infty$  とした一次元熱流の場合の温度は, 次式のように表わされる.

$$\theta = \frac{4aq}{\pi^2\lambda_2} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ry^2}}{y^3 [J_1^2(y) + Y_1^2(y)]} dy \quad (14)$$

つぎに,  $\frac{\pi^2 a^2 T}{4L^2} \ll 1$  のごとき条件を満たすときは

$$M \equiv \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2r}{4L^2}}}{2k+1} \doteq 1 \quad (15)$$

となり, 式 (13) は近似的につぎのように示される.

$$\theta \doteq \frac{1+M}{2} \times \{\text{式 (14)}\} \quad (16)$$

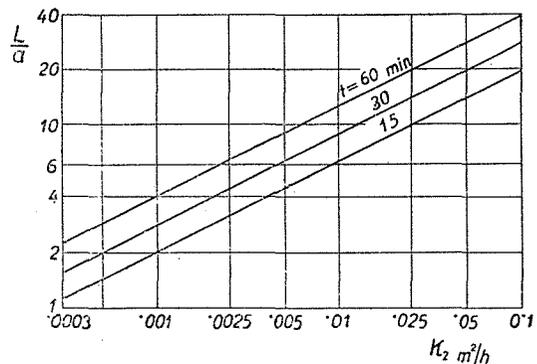
従つて, 例えば, 式 (13) と (14) との差異を 0.5% に抑えるためには,  $M > 0.99$  の関係を満足すればよいこととなり, 結局, つぎの関係式が求まる.

$$\frac{L}{a} \geq \sqrt{\frac{\kappa_2 t}{0.0632 a^2}} \quad (17)$$

第6図は, 上式において半径  $a$  を 1 [mm] としたときの  $t = 15, 30, 60$  [min] に対する  $\frac{L}{a}$  と  $\kappa_2$  との関係を示すもので, 試料の温度伝播率  $\kappa_2$  の大きいほど, また測定時間の長いほど  $\frac{L}{a}$  の値は大きくなる.

つぎに, 前述の諸式が表わす測温点の温度は, 試料の大きさが有限であることによつて影響を受けるので, この点に関しても考慮を払わねばならない. 簡単のため熱源を線状として計算を進める. いま, 式 (2) を  $t$  につき微分すれば, 無限大試料に対する熱伝導率は, つぎのごとく表わされる.

$$\lambda_2 = \frac{q}{4\pi} \frac{1}{t} \frac{1}{\frac{d\theta}{dt}} \quad (18)$$



第 6 図

式 (18) は、 $r$  を含まず測温個所に無関係なるゆえ  $r \rightarrow 0$  においても成立する。一方、半径  $R$  [m] の充分長い円柱状試料の軸に線熱源を置き、円柱側面  $r = R$  の温度を初期温度  $\theta_0$  と等しく保つものとするれば、試料内温度は、Carslaw<sup>8)</sup> によりつぎのように与えられている。

$$\theta = \theta_0 + \frac{q}{\pi \lambda_2 R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(r \alpha_n) [1 - e^{-\lambda_2 \alpha_n^2 t}]}{[\alpha_n J_1(R \alpha_n)]^2} \quad (19)$$

ここで、 $J_0$  は 0 次の第 1 種 Bessel 函数、 $\alpha_n$  は  $J_0(R \alpha) = 0$  の根を表わし、小さい値から順次  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  とする。

上式を  $t$  について微分し、 $r \rightarrow 0$  の極限をとれば、

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{q}{\pi R^2 c_2 \rho_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_2 \alpha_n^2 t}}{J_1^2(R \alpha_n)} \equiv \left( \frac{d\theta}{dt} \right)_{\text{finite}} \quad (20)$$

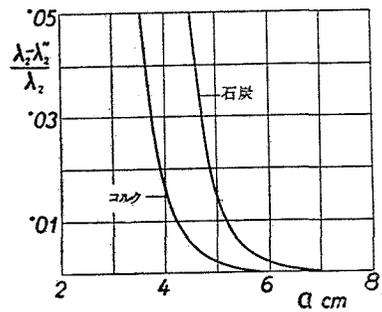
となる。従つて、有限半径  $R$  なる試料につき式 (18) を用いて熱伝導率を求めれば

$$\lambda_2'' = \frac{q}{4\pi} \frac{1}{t} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)_{\text{finite}} \quad (21)$$

となり、試料を無限に大きいと看做したことによつて生ずる熱伝導率の誤差は、次式によつて求めることができる。

$$\frac{\lambda_2 - \lambda_2''}{\lambda_2} = \frac{\frac{dt}{d\theta} - \left( \frac{dt}{d\theta} \right)_{\text{finite}}}{\frac{dt}{d\theta}} \quad (22)$$

第 7 図において、1, 2 の物質につき熱伝導率測定に及ぼす試料半径の影響を例示する。図中の曲線は、各物質に対し測定時間を 30 [min] として計算を行つた結果を表わす。例えば、測定時間を 30 [min] と限れば、この影響を 0.5% 以内に抑えるために要する試料半径は、コルク ( $\lambda_2 = 0.043 \text{ kcal/m} \cdot \text{h} \cdot ^\circ\text{C}$ ) では少くとも 4.5 [cm]、石炭 ( $\lambda_2 = 0.2 \text{ kcal/m} \cdot \text{h} \cdot ^\circ\text{C}$ ) では 5.6 [cm] 以上に選ばねばならない。なお、式 (20) の収斂は極めて速く、2 ないし 3 項をとれば充分であるゆえ、式 (22) の計算は簡単に行うことができる。



第 7 図

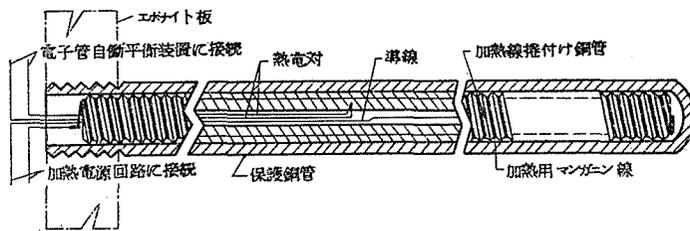
### III. 測定装置および方法

前述の理論に基づいて試作した棒状熱源および測定装置をそれぞれ第 8, 9 図に示す。熱源材料には銅を用い、熱源が完全導体である場合の温度式 (6), (7), (11) または (12) を適用して熱伝導率が算定できるようにし、また熱源自体に取り付けた熱電対にて熱源の温度変化を測定した。

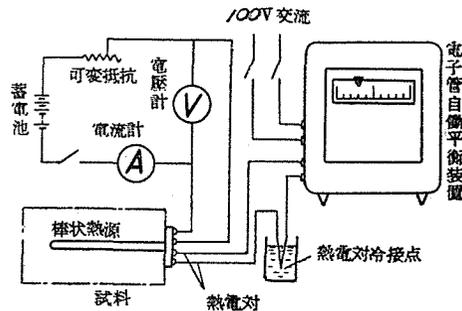
測定装置の本体となる熱源部としては第8図に示すごとく、長さ約49[cm]、外径4.5[mm]、内径2.0[mm]の銅管外側面にネジを切り、その溝に加熱線として外径約0.08[mm]の二重絹巻マンガン線線を3本一組にして捲きつけ、ビニールで被覆絶縁した熱源温度測定用の銅、コンスタンタン-熱電対を銅管を通して管壁中央に半田付けした。この銅管をさらに長さ約48[cm]、外径6.0[mm]、内径4.5[mm]の、一端を閉じた保護用銅管内に嵌め込み、これら総体を熱源とした。保護用銅管の他端は、エポナイト板にネジ込み、熱電対および加熱線は同板に取りつけた端子を経て、それぞれ温度自記装置および加熱電源回路に接続する。このように製作した熱源寸法は、長さ47[cm]、外径6[mm]であり、長さと直径との比 $\frac{L}{a}$ は78となり、熱源部の端効果は無視できる。なお、加熱線としてマンガン線を用いたのは、その電気抵抗の温度係数が小さく温度上昇に伴う発生熱量の変化がほとんどないためである。

温度測定には、2 mV の電位差計式電子管自働平衡計器を用いた。また加熱用電源には蓄電池(24V)を用い、それぞれ電流計および電圧計にて熱供給量を測定した。供給熱量は供試材の種類により異なるが、一般に熱伝導率の大きい試料ほど多く供給しなければならない。このため第9図に示すごとく可変抵抗を接続して所要電圧を調整できるようにした。例えば、当装置においては石炭( $\lambda \doteq 0.2 \text{ kcal/m} \cdot \text{h} \cdot ^\circ\text{C}$ )では、200 mA, 22V程度、フェルト( $\lambda \doteq 0.05 \text{ kcal/m} \cdot \text{h} \cdot ^\circ\text{C}$ )では、120 mA, 15V程度として測定を行った。

測定に際しては、試料の大きさが実測結果に及ぼす誤差を考慮してなるべく大きい試料をとり試料および試料に挿入した熱源の初期温度が等しい状態で電源スイッチを閉じ、加熱を開始し、



第 8 図



第 9 図

自記装置にて温度変化を記録せしめた。この場合、加熱電源の電圧は、あらかじめ所要電圧に調整しておく。このようにして求められた温度変化および供給熱量より、前記のごとき算定法に基づいて熱伝導率を求めた。

なお、固形試料の熱伝導率測定を行う際には、あらかじめ試料に熱源挿入用の孔をあけておく必要があるので、直径 6 [mm]、長さ約 50 [cm] の鋼棒に同径の市販ドリルを取りつけ、熱源部の長さよりも長くしたものをドリルとして用い、孔あけを便にした。ドリルに熱源と同径のものを選り、熱伝導率測定に及ばず熱源、試料間の空隙の影響をできるだけ僅少ならしめるように注意した。

#### IV. 測定結果

さきに述べたごとく、当測定法の利点は、迅速にしかも直接に熱伝導率を求めることができ、また試料としては、平板、球、円柱などのような特殊形状のものを要しないという点にある。従つて、石炭、岩石などのように特殊形状を与えにくい試料に対し、また湿つた物質のごとく定常熱流法を用いれば、含有水分の移動を生じ、著しくその組成が変るような試料などに対し、本法を適用することは極めて有効である。また、多くの試料を短期間に測定し得ることは言うまでもないが、例えば、各種空隙率の石炭につき熱伝導率測定を行つた際、1日に6乃至7回程度の測定が可能であつた。

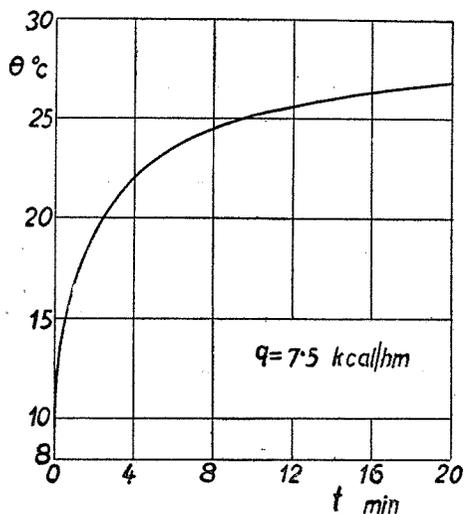
この装置を用いて、すでに各種試料の熱伝導率を実測し、現在なお実験継続中であるが、ここでは石炭の実測例につきその結果を述べる。

さて、前述のごとく、熱伝導率の算定法として、式 (3) および (7) または (12) を用いる二つの方法があり、前者によれば、供試材ならびに熱源の太さなどによつて長時間の測定が要求されることもあるに対し、後者の方法は、常に短時間測定で熱伝導率を求めることができる。すなわち、迅速測定を目的とする本法において、式 (3) の適用し得る供試材は  $c \cdot \rho$  [kcal/m<sup>3</sup>·°C] 値の極めて高い材料 (例えば、金属、岩石類) に限られ、さらに熱源、試料間に空隙または接触熱抵抗が介在することによつて測定時間の延長を余儀なくされるなど、式 (3) の使用に著しい制限を受ける。従つて、試料の種類、熱源の太さ、空隙または接触熱抵抗の有無などに関係なく成立する熱源温度の一般式 (12)、すなわち

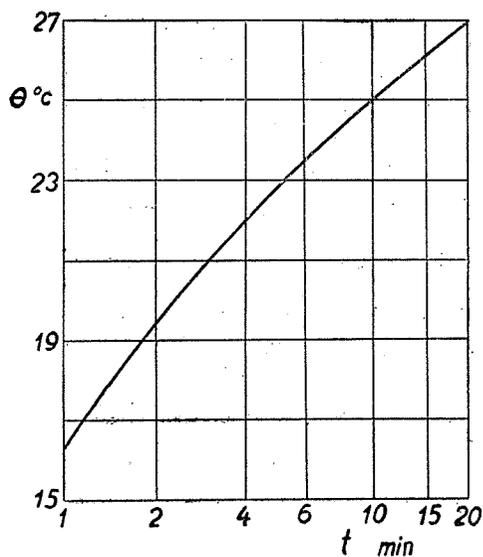
$$\theta = A' \log t + B' + \frac{1}{t} (C' \log t + D')$$

に実測温度曲線を当て嵌め、その結果得られる係数  $A'$  ( $= A$ ) より熱伝導率を算定すれば、上記のごとき制限は全く除かれることとなる。しかし、この場合は熱伝導率の算出にはかなりの手数を要するという不便がある。

以下、石炭につき行つた実測の結果を述べる。試料は平均直径約 40 [cm]、平均長さ約 550



第 10 図

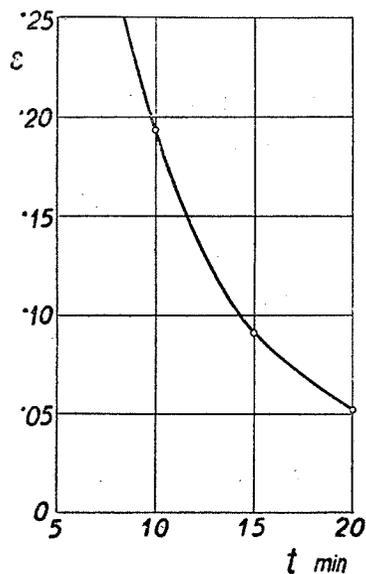


第 11 図

[cm] の塊状石炭であり、試料寸法が有限であることにより生ずる誤差は、この程度の大きさに対しては無視できる。この石炭にドリルで孔をあけ、棒状熱源を挿入し測定を行つた。第 10 図は、その試料につき電子管自働平衡装置で自記した熱源温度変化の一例を示す。図の縦軸は温度、横軸は時間を表わしている。測定時間は 20 [min]、熱源の発生熱量  $q$  は 7.50 [kcal/h·m] である。また、横軸に時間の対数をとつた片対数線図上にこの温度曲線を移せば、第 11 図のごとくなる。同図より明らかなように、時間の経過とともに温度変化に及ぼす  $\frac{1}{t}$  項の影響は漸減するため温度曲線は、次第に直線状に近づいている。

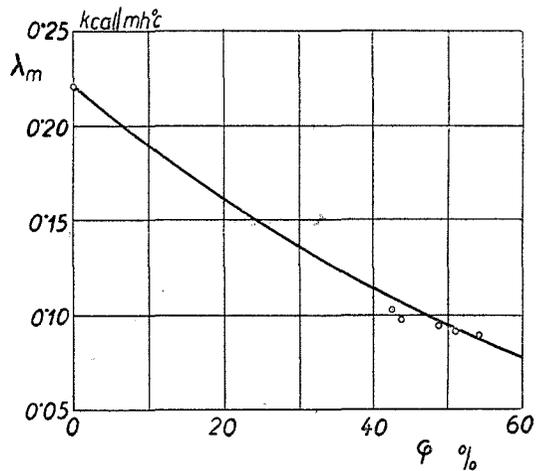
さて、熱伝導率を求めるため最小自乗法により、式 (7) または (12) に実測温度を当て嵌めて係数  $A$  を定めると  $A = 2.698$  となり、式 (8) の関係より熱伝導率を算定すれば、 $\lambda_2 = \frac{q}{4\pi A} = \frac{7.50}{4\pi \times 2.698} = 0.221$  [kcal/m·h·°C] なる結果が求まる。つぎに、式 (3) を用いる場合、測定時間の不十分のために生ずる熱伝導率の誤差  $\varepsilon$  を計算すると、第 12 図のように表わされ、式 (3) の適用に対しては、かなり長時間にわたつて測定を続けなければならないことが判る。

また、使用した石炭塊を 17 [mm] 角の篩を通過するよう破碎し、これら総体を試料として測定を行つた。なお、この程度の粒度をもつ石炭は、いわゆる粉炭に属する。さらにこの試料を逐次 10, 16, 20 メッシュの篩にか



第 12 図

けて微粒を除き空隙率のそれぞれ異なる試料を作り、これらについても同様の測定を重ね、第 13 図に示すごとき結果を得た。ここで言う空隙率とは、各石炭粒の間に存在する空隙容積と試料全容積との比である。同図に表わされているように、熱伝導率  $\lambda$  は空隙率  $\varphi$  とともに低減している。図中の曲線は試料を石炭粒と空気が均等に混合していると看做して、2 体混合物質に対するつぎのごとき平均熱伝導率の算定式により求めた計算値であり、実測値とほぼ一致している。



第 13 図

$$\lambda_m = \lambda_c \frac{1 - 2\varphi \frac{\lambda_c - \lambda_a}{2\lambda_c + \lambda_a}}{1 + \varphi \frac{\lambda_c - \lambda_a}{2\lambda_c + \lambda_a}} \quad (23)$$

ここで、 $\lambda_m$  = 平均熱伝導率 [kcal/m·h·°C]、 $\lambda_c$  = 石炭自体の熱伝導率 = 0.221 [kcal/m·h·°C]、 $\lambda_a$  = 空気の熱伝導率 = 0.0207 (1 + 0.003  $\theta_a$ ) [kcal/m·h·°C]、 $\theta_a$  = 空気温度 [°C]、 $\varphi$  = 空隙率。

上式は、さきに著者らがテックスなど数種類の多孔物質に対し熱伝導率算定式として適用した式<sup>9)</sup>であるが、本測定における粒状の石炭についても同式を用い得ることが確かめられた。

## V. 結 言

不定常熱流による熱伝導率の迅速測定法について理論的考察を行い、その特性を明らかにするとともに、試作測定装置により熱伝導率を実測した結果に基づいて本測定法の得失を検討した。これを要約すればつぎのようになる。

- 1) 本測定法は、迅速にしかも直接に熱伝導率を求めることができ、試料としては平板、球、円柱のような特殊形状のものを要しないなどの利点をもつ。
- 2) 熱源の太さおよび熱源、試料間の空隙又は接触熱抵抗を考慮した場合の熱源温度一般式は

$$\theta = A \log t + B + \frac{1}{t} (C \log t + D)$$

の型で表わされる。実測した熱源の温度変化を同式に当て嵌めて係数  $A$  を求めれば、

$$\lambda_2 = \frac{q}{4\pi A}$$

より供給熱量  $q$  を測定することにより熱伝導率は算定することができる。

3) 熱源が細く熱容量を無視し得るか、または供試材の  $c \cdot \rho$  [kcal/m<sup>3</sup>·°C] 値が極めて大きいようなときには、

$$\lambda_2 = \frac{q}{4\pi} \frac{\log \frac{t_2}{t_1}}{\Delta\theta}$$

を用いて時間  $t_1, t_2$  間の温度上昇  $\Delta\theta$  および供給熱量  $q$  を測定するのみで簡単に熱伝導率を定めることができる。しかし、熱源、試料間の空隙または接触熱抵抗の無視し得ないようなときには、測定にかなりの時間を要する。

4) 数値計算の点では、上記2方法のうち、後者が遙かに簡単であるが、実測結果の誤差評価という点では前者の方法が勝っている。

5) 試料の大きさが熱伝導率測定に及ぼす影響につき検討を行つたが、この影響は、一般に試料の熱伝導率および温度伝播率の大きいほど増大する。

6) 1例として石炭自体およびそれを破碎して作つた粒状石炭の熱伝導率測定結果を述べ、本測定法の理論的解析を実験的に検討した。なお、粒状石炭に対する熱伝導率と空隙率との間の関係は、さきに著者らが多孔物質に対して適用した熱伝導率算定式による計算値とほぼ一致することを確めた。

以上この迅速測定法の諸特性について一応取り纏め得たことを報告したが、現在なお実験継続中であり、とくに水分を含む多孔物質の熱伝導率測定に関しては、後日発表の予定である。また試作装置にも改良すべき点が少ないので、これについてさらに検討、改善を加えたいと思う。

この研究に対し、始終御教示を賜わつた大賀恵二教授に謹んで感謝の意を表わす。また計算の一部と実験の遂行には大学院学生岸田徹郎君の協力を得た。附記して謝意を表す。

## 文 献

- 1) E. M. F. van de Held & F. G. van Drunen: *Physica* **15**, 1949.
- 2) F. C. Hooper & F. R. Lepper: *Transient Heat Flow Apparatus for the Determination of Thermal Conductivities*. A. S. H. V. E. Journal Section, Heating, Piping & Air Conditioning. 1950. Aug.
- 3) P. E. Glaser: *Measuring Thermal Conductivity by Transient Flow Analysis*. *Columbia Engineering Quarterly*, 7-3, 1954.
- 4) J. H. Blackwell: *Transient-Flow Method for Determination of Thermal Constants of Insulating Materials in Bulk*. *J. Appl. Phys.* **25**, 1954.
- 5) 坂手邦夫, 中峠哲朗: 迅速な熱伝導率測定について. *応用物理* **23-7**, 1954.
- 6) H. S. Carslaw & J. C. Jaeger: *Conduction of Heat in Solids*. Oxford University Press, 1948, P. 221.
- 7) 前掲 4).
- 8) 前掲 6). P. 306.
- 9) 大賀恵二, 岡垣理: 含水多孔物質の熱伝導率. *北大工学部彙報* 第6号, 昭 27-3.

## 附録 式(4)の誘導

いま、求めようとする空気層の温度  $\theta_1$  を、次のように二つに分解して考える。ただし、以下の計算において初期温度は 0 とする。

$$\theta_1 = v + w \quad (1a)$$

ここで、 $v$  は空気層 I の厚さが無限に厚いと仮定した場合の線状熱源に基づく温度変化を表わし、 $w$  は厚さ  $a$  の空気層 I 内にて熱伝導の基礎微分方程式

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \kappa_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right), \quad 0 < r < a \quad (2a)$$

を満たす解である。

$v$  は  $\theta_0 = 0$  とし、前掲の式 (1) と等しく、

$$v = \frac{q}{4\pi\lambda_1} \int_0^t e^{-4\kappa_1(r-\tau)} \frac{d\tau}{t-\tau}. \quad (3a)$$

また、 $w$  の一般解は

$$w = C_1 J_0(\alpha r) e^{-\kappa_1 \alpha^2 t}, \quad 0 > r > a. \quad (4a)$$

他方、空気層周りの試料 II に対する温度  $\theta_2$  はつぎのごとく表わされる。

$$\theta_2 = C_2 Y_0(\alpha r) e^{-\kappa_2 \alpha^2 t} \quad a < r < \infty \quad (5a)$$

ここで、 $Y_0$  は 0 次の第 2 種 Bessel 函数である。また、式 (4a) および (5a) における係数  $C_1$ ,  $C_2$  はともにつぎに示す境界条件を満足するように選ばれる。

境界条件としては、 $r = a$  において

$$\theta_1 = \theta_2 \quad (6a)$$

および

$$\lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial r} = \frac{\partial \theta_2}{\partial r} \quad (7a)$$

これら諸条件のもとに  $\theta_1$  を求めるため、ここでは Laplace 変換による解法を適用する。 $t$  に関する Laplace 変換を式 (1a), (3a), (4a), および (5a) に施せば、初期温度 0 なる条件を考慮して

$$\bar{v} = \frac{q}{2\pi\lambda_1} K_0(q_1 r) \frac{1}{p} \quad (8a)$$

$$\bar{w} = C_1 I_0(q_1 r) \quad (9a)$$

$$\theta = \bar{v} + \bar{w} = \frac{q}{2\pi\lambda_1} K_0(q_1 r) \frac{1}{p} + C_1 I_0(q_1 r) \quad (10a)$$

および

$$\bar{\theta}_2 = C_2 K_0(q_2 r) \quad (11a)$$

境界条件に対しては、 $r = a$  で

$$\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 \tag{12 a}$$

$$\lambda_1 \frac{d\bar{\theta}_1}{dr} = \lambda_2 \frac{d\bar{\theta}_2}{dr} \tag{13 a}$$

ここで、 $\bar{v}, \bar{w}, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2$  はそれぞれ  $v, w, \theta_1, \theta_2$  の  $t$  に関する Laplace 変換を表わし、 $p$  は変換変数、 $q_1 = \sqrt{\frac{p}{\kappa_1}}, q_2 = \sqrt{\frac{p}{\kappa_2}}$  である。

式 (10 a), (11 a) および境界条件 (12 a), (13 a) より係数  $C_1, C_2$  は求まり、その結果  $\bar{\theta}_1$  はつぎのように表わされる。

$$\bar{\theta}_1 = \frac{q}{2\pi\lambda_1} \frac{1}{p} \left[ K_0(q_1 r) + \frac{\lambda_1 q_1 K_1(q_1 a) K_0(q_2 a) - \lambda_2 q_2 K_0(q_1 a) K_1(q_2 a)}{\lambda_1 q_1 I_1(q_1 a) K_0(q_2 a) + \lambda_2 q_2 I_0(q_1 a) K_1(q_2 a)} I_0(q_1 r) \right] \tag{14 a}$$

ただし、 $I_0, I_1,$  は 0 次および 1 次の第 1 種変型 Bessel 函数、 $K_0, K_1$  は 0 次および 1 次の第 2 種変型 Bessel 函数である。

上式 (14 a) に逆変換定理を適用すれば、 $\theta_1$  はつぎのごとき複素積分によつて表わされる。

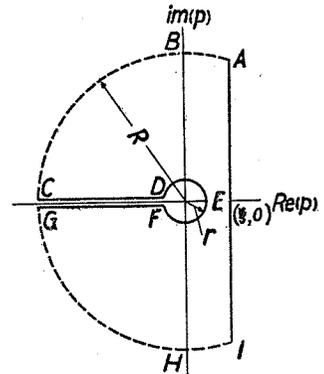
$$\theta_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} \bar{\theta}_1(p) e^{pt} dp \tag{15 a}$$

ここで、領域  $R_c(p) > \xi$  に不正則点が存在しないように  $\xi$  を選ぶ。

式 (15 a) の被積分函数は原点に単分岐点をもつほかすべて正則であり、かつ Jordan の補助定理\*の条件を満足しているので第 14 図に示すごとき積分路  $ABCDEFGHI$  を考え  $R \rightarrow \infty$  とすれば、式 (15 a) の積分路は  $CDEFG$  と等価になる。(Cauchy の定理\*\*と Jordan の補助定理に基く) この等価積分路を  $C_r$  で表わせば小円  $EFG$  の半径  $r$  を 0 に収斂させることにより  $\theta_1$  はつぎのごとく示される。

$$\theta_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \bar{\theta}_1(p) e^{pt} dp \tag{16 a}$$

さて、 $\bar{\theta}_1(p)$  を昇冪級数に展開することによつて式 (16 a) の複素積分を計算する。このため  $I_0, I_1, K_0, K_1$  の展開式



第 14 図

\* L. A. Pipes: Applied Mathematics for Engineers and Physicists. McGraw-Hill 1946. p. 470.

\*\* 前掲. p. 452.

$$\left. \begin{aligned}
 I_0(x) &= 1 + \frac{x^2}{2^2(1!)^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} + \cdots \\
 I_1(x) &= \frac{x}{2} + \frac{x^3}{2^3 1! 2!} + \frac{x^5}{2^5 2! 3!} + \cdots \\
 K_0(x) &= - \left[ \gamma + \log \frac{x}{2} \right] I_0(x) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(r!)^2} \left( \frac{x}{2} \right)^{2r} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{r} \right) \\
 K_1(x) &= \left[ \gamma + \log \frac{x}{2} \right] I_1(x) + \frac{1}{x} \\
 &\quad - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(r-1)! r!} \left( \frac{x}{2} \right)^{2r-1} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{r} - \frac{1}{2r} \right)
 \end{aligned} \right\} (17 a)$$

を用いて式 (14 a) を展開すれば、同式括弧内の分子はつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
 & \{ \lambda_1 q_1 K_1(q_1 a) K_0(q_2 a) - \lambda_2 q_2 K_0(q_1 a) K_1(q_2 a) \} I_0(q_1 r) \\
 &= \frac{\lambda_2}{2} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_1}} \right) - \frac{\lambda_1}{a} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} \right) + \left[ \frac{r^2}{4\kappa_1} \left\{ \lambda_2 \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_1}} \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{\lambda_1}{a} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} \right) \right\} + \left\{ \frac{a\lambda_2}{4\kappa_1} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_1}} - 1 \right) - \frac{a\lambda_1}{4\kappa_2} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} - 1 \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{a\lambda_2}{2\kappa_2} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_1}} \right) \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} - \frac{1}{2} \right) - \frac{a\lambda_1}{2\kappa_1} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} \right) \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_1}} \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \right) \right\} \right] p + \left[ \frac{r^4}{64\kappa_1^2} \left\{ \frac{\lambda_2}{a} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_1}} \right) - \frac{\lambda_1}{a} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} \right) \right\} + \frac{r^2}{4\kappa_1} \left\{ \frac{a\lambda_2}{4\kappa_1} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_1}} \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - 1 \right) - \frac{a\lambda_1}{4\kappa_2} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} - 1 \right) + \frac{a\kappa_2}{2\kappa_2} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_1}} \right) \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} - \frac{1}{2} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{a\lambda_1}{2\kappa_1} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} \right) \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_1}} - \frac{1}{2} \right) \right\} + \left\{ \frac{a^3\lambda_2}{64\kappa_1^2} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_1}} - \frac{3}{2} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{a^3\lambda_1}{64\kappa_2^2} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} - \frac{3}{2} \right) + \frac{a^3\lambda_2}{16\kappa_2^2} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_1}} \right) \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} - \frac{5}{4} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{a^3\lambda_1}{16\kappa_1^2} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} \right) \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_1}} - \frac{5}{4} \right) + \frac{a^3\lambda_2}{8\kappa_1\kappa_2} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} - \frac{1}{2} \right) \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_1}} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - 1 \right) - \frac{a^3\lambda_1}{8\kappa_1\kappa_2} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_1}} - \frac{1}{2} \right) \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} - 1 \right) \right\} \right] p^2 + O(p^3). \quad (18 a)
 \end{aligned}$$

また分母は

$$\begin{aligned}
 & \{ \lambda_1 q_1 I_1(q_1 a) K_0(q_2 a) + \lambda_2 q_2 I_0(q_1 a) K_1(q_2 a) \} p \\
 &= \frac{\lambda_2}{a} p + \left\{ \frac{a\lambda_2}{2\kappa_2} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} - \frac{1}{2} \right) - \frac{a\lambda_1}{2\kappa_1} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} \right) + \frac{a\lambda_2}{4\kappa_1} \right\} p^2 + O(p^3). \quad (19 a)
 \end{aligned}$$

ゆえに、 $\bar{\theta}_1$  は式 (18 a), (19 a) に基づいてつぎのごとく求まる。

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}_1 = & \frac{q}{2\pi\lambda_1} \frac{1}{p} K_0(q_1 r) + \frac{q}{2\pi\lambda_1} \left[ \left\{ \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_1}} \right) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} \right) \right\} \frac{1}{p} \right. \\
& + \frac{a r^2}{4\lambda_2\lambda_1} \left\{ \lambda_2 \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_1}} \right) - \frac{\lambda_1}{a} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} \right) \right\} - \frac{a^2}{4\kappa_1} + \frac{a^2\lambda_1}{4\kappa_2\lambda_2} \\
& - \frac{a^2\lambda_1}{2\kappa_2\lambda_2} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} \right) + \frac{a^2\lambda_1}{2\kappa_1\lambda_2} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} \right) + \frac{a^2\lambda_1}{2\kappa_2\lambda_2} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} \right)^2 \\
& \left. - \frac{a^2\lambda_1^2}{2\kappa_1\lambda_2^2} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} \right)^2 \right] + O(p) \quad (20 a)
\end{aligned}$$

従つて、上記の式 (16 a) は

$$\begin{aligned}
\theta_1 = & \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{q}{2\pi\lambda_1} K_0(q_1 r) \frac{e^{t p}}{p} dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{q}{2\pi\lambda_1} \left[ \left\{ \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_1}} \right) \right. \right. \\
& - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} \right) \left. \right\} \frac{1}{p} + \frac{a r^2}{4\lambda_2\lambda_1} \left\{ \lambda_2 \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_1}} \right) - \frac{\lambda_1}{a} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} \right) \right\} \\
& - \frac{a^2}{4\kappa_1} + \frac{a^2\lambda_1}{4\kappa_2\lambda_2} - \frac{a^2\lambda_1}{2\kappa_2\lambda_2} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} \right) + \frac{a^2\lambda_1}{2\kappa_1\lambda_2} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} \right) \\
& \left. + \frac{a^2\lambda_1}{2\kappa_2\lambda_2} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} \right)^2 - \frac{a^2\lambda_1^2}{2\kappa_1\lambda_2^2} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} \right)^2 \right] e^{t p} dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} O(p) e^{t p} dp \quad (21 a)
\end{aligned}$$

ここで、右辺第1項の積分は前掲の式 (3 a) または (1) となり、ただし式 (1) において  $\theta_0 = 0$  とおくと、

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{q}{2\pi\lambda_1} K_0(q_1 r) \frac{e^{t p}}{p} dp = \frac{q}{4\pi\lambda_1} \int_0^t e^{-\frac{r^2}{4\kappa_1(t-\tau)}} \frac{d\tau}{t-\tau} = \frac{q}{4\pi\lambda_1} \left( \log \frac{4\kappa_1 t}{r^2} - r \right). \quad (22 a)$$

また、残りの各項の積分については積分公式\*

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} c e^{t p} dp = 0 \\
& \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{1}{p} \log (c p) e^{t p} dp = - \left[ \log \frac{t}{c} + r \right] \\
& \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \log (c p) e^{t p} dp = dp - \frac{1}{t} \\
& \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \{ \log (c p) \}^2 e^{t p} dp = \frac{2}{t} \left[ \log \frac{t}{c} + r \right]
\end{aligned} \right\} \quad (23 a)$$

を適用してつきのごとく計算することができる。ただし、上諸式中  $c$  は正の常数であり、また  $t$  は正である。いま、 $\gamma = \log \beta$  と置けば

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_1}} \right) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} \right) \right\} \frac{1}{p} \\
& = \left\{ \frac{1}{2} \log \frac{a^2\beta^2}{4\kappa_1} p - \frac{\lambda_1}{2\lambda_2} \log \frac{a^2\beta^2}{4\kappa_2} p \right\} \frac{1}{p} \quad (24 a)
\end{aligned}$$

\* 前掲文献 4), p. 139.

および

$$\begin{aligned}
 & \frac{ar^2}{4\lambda_2\kappa_1} \left\{ \frac{\lambda_2}{a} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_1}} \right) - \frac{\lambda_1}{a} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} \right) \right\} - \frac{a^2}{4\kappa_1} + \frac{a^2\lambda_1}{4\kappa_2\lambda_2} \\
 & - \frac{a^2\lambda_1}{2\kappa_2\lambda_2} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} \right) + \frac{a^2\lambda_1}{2\kappa_1\lambda_2} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} \right) + \frac{a^2\lambda_1}{2\kappa_2\lambda_2} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} \right)^2 \\
 & - \frac{a^2\lambda_1^2}{2\kappa_1\lambda_2^2} \left( \gamma + \log \frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{\kappa_2}} \right)^2 = \text{常数} + \frac{r^2}{8\kappa_1} \log \frac{a^2\beta^2}{4\kappa_1} p - \left( \frac{r^2\lambda_1}{8\kappa_1\kappa_2} + \frac{a^2\lambda_1}{4\kappa_2\lambda_2} \right. \\
 & \left. - \frac{a^2\lambda_1}{4\kappa_1\lambda_2} \right) \log \frac{a^2\beta^2}{4\kappa_2} p + \left( \frac{a^2\lambda_1}{8\kappa_2\lambda_2} - \frac{a^2\lambda_1^2}{8\kappa_1\lambda_2^2} \right) \left\{ \log \frac{a^2\beta^2}{4\kappa_2} p \right\}^2. \quad (25 \text{ a})
 \end{aligned}$$

このように変型することによつて式 (24 a), (25 a) は (23 a) を用いて逆変換を行い得ることとなり, 結局  $\theta_1$  は次式のように表わされる.

$$\begin{aligned}
 \theta_1 = & \frac{q}{4\pi} \left[ \frac{1}{\lambda_2} \left( \log \frac{4\kappa_2}{a^2} t - \gamma \right) + \frac{1}{\lambda_1} \log \frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{t} \left\{ \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \frac{r^2}{4\kappa_1} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{a^2}{2} \frac{1}{\lambda_2} \left( \frac{1}{\kappa_2} - \frac{1}{\kappa_1} \right) + \frac{a^2}{2} \left( \frac{1}{\kappa_2\lambda_2} - \frac{\lambda_1}{\kappa_1\lambda_2^2} \right) \left( \log \frac{4\kappa_2}{a^2} t - \gamma \right) \right\} + 0 \left( \frac{1}{t^2} \right) \right]. \quad (26 \text{ a})
 \end{aligned}$$

上式の右辺における  $0 \left( \frac{1}{t^2} \right)$  は,  $t$  がある程度大きくなれば省略できる. また, 初温度  $\theta_0$  なる場合の温度変化は, 上式の右辺に  $\theta_0$  を加算するのみで求まる. このようにして式 (4) は導かれる.