HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	濕った砂の熱伝導率 ： 不定常熱流法による測定
Author(s)	岡垣, 理; 斎藤, 武
Citation	北海道大學工學部研究報告, 16, 113-129
Issue Date	1957-06-05
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40603
Type	departmental bulletin paper
File Information	16_113-130.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

濕つた砂の熱伝導率

(不定常熱流法による測定)

岡　垣　　理
斎　藤　　武

(昭和32年2月28日 受理)

Thermal Conductivities of Wet Sand

Measured by the Transient Heat Flow Method

Osamu OKAGAKI
Takeshi SAITO

Abstract

This paper presents the thermal conductivities of wet sand measured by means of the transient heat flow method with a thermal probe.

In this measurement without any considerable effect of the mass transfer owing to the diffusion of moisture, thermal conductivities of sand were obtained in the range of 0～42 % (volume) moisture content. The values of thermal conductivities were about doubled at 1～2 % moisture content compared with dry condition and raised gradually with the increase of moisture.

These relations between the thermal conductivities and the moisture content of the specimen measured in this experimental study was analyzed by the aids of some simplified models which were represented by the combination of three elemental materials of sand, air, and water.

目　　次

Ⅰ. はしがき …… 2
Ⅱ. 測定法および測定装置 …… 2
　1. 測定法理論の概略 …… 2
　2. 測定装置および測定方法 …… 3
Ⅲ. 測定結果 …… 4
Ⅳ. 測定結果の検討 …… 5
　1. 拡散等価熱伝導率と見掛けの熱伝導率との関係 …… 5
　2. 蒸汽拡散が水分分布に及ぼす影響 …… 6
　3. 含水率と熱伝導率との関係 …… 9
Ⅴ. むすび …… 12
文　献 …… 12
附　録 …… 13

I. はしがき

湿つた状態にある物質の熱伝導率は，乾いた状態にあるときよりも大きく，また熱伝導率の低い物質ほど，含有水分の増加により熱絶縁効果の低下は著しい。すなわち，物質が乾いた状態にあるときは，内部に含まれている熱伝導率の小さい気孔の影響で，熱絶縁効果は高まるが，物質の含水量を増すにつれて，空隙内の空気は熱伝導率の大きな水で置きかえられ，さらに，物質内に温度差があれば，含有水分の蒸汽拡散を生ずることとなり，そのための熱移動も加わつて，所謂見掛けの熱伝導率は増大し，熱絶縁は一層劣下する。

このような湿つた状態にある物質の伝熱特性を究明するため，さきに，著者らは平板試料について，定常熱流法による熱伝導率測定を行い，含有水分および温度が熱伝導率に及ぼす影響を求めた[1]。しかし，この場合測定し得る値は，湿つた物質の純熱伝導によるものと蒸汽拡散によるものとの和である見掛けの熱伝導率であり，しかも，水分分布の偏倚のため，平均含水率についての値である。

このような蒸汽拡散による熱移動量を抑え，均等な水分分布のもとで，直接湿つた物質の熱伝導率を測定することについては，例えば一部 O. Krischer[2]，棚沢泰[3] らの発表があるが，著者らは，さきに発表した不定常熱流による迅速測定法[4] により，湿つた砂を試料とし，含水率 42% までの広い範囲にわたり熱伝導率を実測し，含水率との関係を検討した。

II. 測定法および測定装置

当測定法の詳細な理論，および測定上の諸問題については，さきに報告[4] したので，ここでは，その概略を述べる。

1. 測定法理論の概略

いま，初期温度一定の充分大きい測定材料中に，一定熱量を連続的に発生するような棒状熱源を考えると，熱源自体の温度変化は，熱源と試料との間に熱抵抗のある棒状熱源に対する一般式として，つぎのように表わされる。

$$\theta = \theta_0 + A \log t + B + 0\left(\frac{1}{t}\right). \quad \cdots\cdots (1)$$

ここで，θ: 熱源の温度 [℃]，θ_0: 初期温度 [C$_0$]，t: 加熱後の経過時間 [h]，A，B: 測定材料，熱源の性質および熱源と試料との間の接触状態等により異なる常数。

式 (1) は時間 t をある程度長くとれば $\frac{1}{t}$ 次項以上の高次項は無視でき，つぎのような形となる。

$$\theta \fallingdotseq \theta_0 + A \log t + B \quad \cdots\cdots (2)$$

ここで常数 A は熱源単位長さ当りの熱発生量 q [kcal/h·m]，および試料の熱伝導率 λ [kcal/h·m·℃] のみの函数であり，次式によつて表わされる。

$$A = \frac{q}{4\pi\lambda} \quad \cdots\cdots (3)$$

いま，時刻 t_1，t_2 間の温度上昇を $\Delta\theta$ とすれば，試料の熱伝導率 λ は式 (2) および (3) よりつぎのように導かれる。

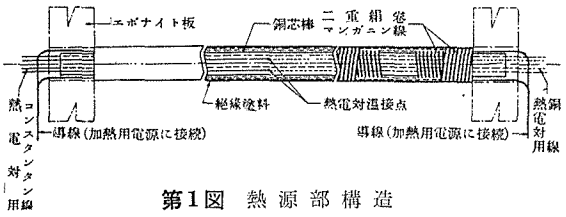
$$\lambda = \frac{q \log \frac{t_2}{t_1}}{4\pi\Delta\theta} \quad \cdots\cdots (4)$$

このようにして，試料の熱伝導率は，単に熱源自体の温度上昇を測定するのみで，しかも定常熱流法よりも遙かに短時間で測定することができる。

なお，熱源の温度変化を式 (2) で表わすことのできる最小時間 t は，熱源直径の小さいほど，試料の熱容量 $c\rho$ [kcal/m³·°C] の大きいほど，また熱源と試料との間の接触熱抵抗，または空気間隙の小さいほど短縮することができる。

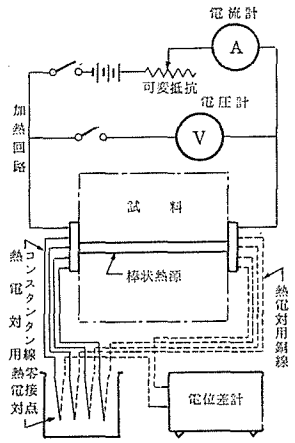
2. 測定装置および測定方法

第1図は測定装置の本体である熱源部の構造を示す。熱源として，直径 1.7 mm の銅線を軸芯とし，太さ 0.15 mm の加熱用絹巻マンガニン線を密巻きし，その中央に 4 組の太さ 0.23 mm の銅-コンスタンタン熱電対を置き，その上に再度マンガニン線を巻き，これを絶縁塗料またはセロテープ等で被覆保護した。完成した熱源の直径は 2.8 mm，長さは 145 mm である。熱源の長さと直径との比は 52 であり，この程度の寸法であれば，熱源長さが有限であるために生ずる測定値の誤差は無視できる[4]。



第1図　熱源部構造

装置配置図を第2図に示す。2 組の加熱用マンガニン線は並列連結し，電池に接続した。また熱源の温度は，直列に連結した 4 組の熱電対により，温度変化を 4 倍に拡大し．電位差計で測定した。



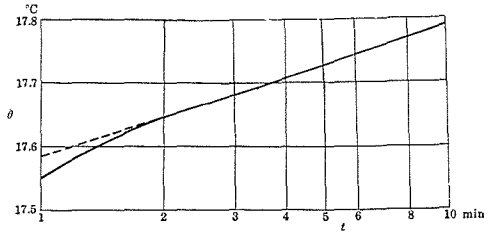
第2図　測定装置配置図

供試材とした河砂は，10 メッシュ篩（タイラー）を通つたものであり，乾燥時の空隙率 42%，比重量 1550 kg/m³ である。測定は，室温のもとで，乾いた状態から水浸しの状態（容積含水率 0 から 42%）までの含水率範囲で行なつた。

さて，所定の含水率となるように一様に加湿した試料を充分保温した縦，横，高さ各々 150 mm の気密容器に入れ，測定装置の熱源部を挿入する。試料寸法をこの程度にとれば，試料の大きさが有限であるために生ずる測定値の誤差は無視できる[4]。試料および熱源部が一様な温度となつた後，加熱線に所要の電流を通

じ，電位差計（最小目盛0.5 μV）で熱源の温度上昇を1分毎に読み取り，また熱源の熱発生量は加熱回路に挿入した電流計（最小目盛1 mA），電圧計（最小目盛0.1 V）で測定し，電圧は測定時間中常に一定に保たれるよう摺動抵抗により適宜調整した。当実験では加熱量を0.25 watt程度に抑え，測定時間を10 minとしたが，この間の温度上昇は1℃前後である。測定時間および温度上昇をこの程度に止めると，蒸汽拡散による水分移動の影響を受けずに測定できる。

熱源の温度変化を，縦軸に温度を，横軸に時間の対数をとつた片対数座標上に画くと，ある程度時間が経過した後では，第3図に示すように，温度変化は直線状となり前掲の式(2)を満足する。従つて，この直線の勾配が式(2)の係数Aとなり，式(3)の関係より熱伝導率の値は計算できる事になる。第3図の実測例は，容積含水率20.3%，初めの温度16.7℃，10 minの加熱でその温度上昇は1.1℃である。また約2 min後には温度上昇は片対数線図上で直線状になり，式(2)を満たしている事がわかる。所要の観測値を式(3)に代入して熱伝導率を求めると0.922 kcal/h.m.℃が得られる。



第3図　温度変化の実測例

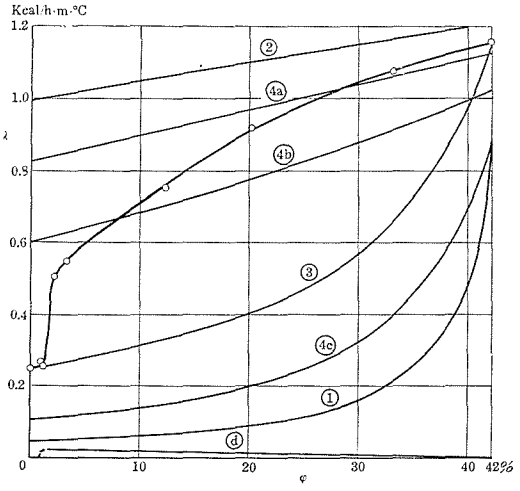
III. 測定結果

含水率を種々変え室温のもとで砂の熱伝導率を測定した結果，第1表に示すような値を得た。容積含水率42%というのは，試料内の空隙（乾燥時の空隙率42%）がことごとく水で置きかえられ水浸しとなつた状態であり，この場合含水率は最大となり，また熱伝導率も最大値を

第1表　測定結果

容積含水率 φ [%]	熱伝導率 λ [kcal/h·m·°C]	平均温度 θ_m [°C]
0	0.250	17.5
0.8	0.283	18.0
1.1	0.272	18.5
2.1	0.504	17.3
2.9	0.545	19.5
12.3	0.755	18.5
20.3	0.922	18.2
33.3	1.08	19.5
42.0	1.16	17.8

供試材：河　　砂
粒度……10メッシュ篩通過
乾燥時空隙率　$\phi=42\%$
乾燥時比重量　$\rho=1550$ kg/m^3



第4図　熱伝導率と含水率との関係

とる。含水率が減少するに従い，熱伝導率は漸減し，含水率1%から2%の間で急激に低下している。そして，含水率0，すなわち乾燥した状態では，熱伝導率は最低値を示す。第4図は熱伝導率と含水率との関係を表わしたものである。

IV. 測定結果の検討

1. 拡散等価熱伝導率と見掛けの熱伝導率との関係

さきに述べたように，湿つた物質の熱伝導率を測定する場合，得られる値は，純熱伝導率と拡散等価熱伝導率とを加え合せた見掛けの熱伝導率となる。しかし，以下に述べるごとく，砂について行なつた当実験では，見掛けの熱伝導率に及ぼす拡散等価熱伝導率の影響を少なくすることができる。

一般に，温度の異なる飽和蒸汽が存在する場合，蒸汽分圧差のため，高温側の蒸汽は低温側え拡散移動するが，その拡散量 g_D は Stefan の法則[5]に基づき，次式で与えられる。

$$g_D = -\frac{k}{\mu R_D T}\frac{P_0}{P_0-P_s}\frac{dP_s}{d\theta}\frac{d\theta}{dr}\cdot\ [\mathrm{kg/m^2\cdot h}] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

ここで，θ: 温度[℃]，$T=\theta+273$: 絶対温度[°K]，P_0: 全圧力[kg/m²]，P_s: θ[℃]における飽和蒸汽の分圧，R_D: 飽和蒸汽のガス恒数=47.06[m·kg/kg·°K]，$\frac{1}{\mu}$: 拡散に対する抵抗係数，大気中を蒸汽が拡散する場合1となり，一般に多孔材料では1より小さい値をとる。r: 拡散方向にとつた半径座標[m]，k: 拡散係数，Krischer[6]によればつぎのように表わされる。

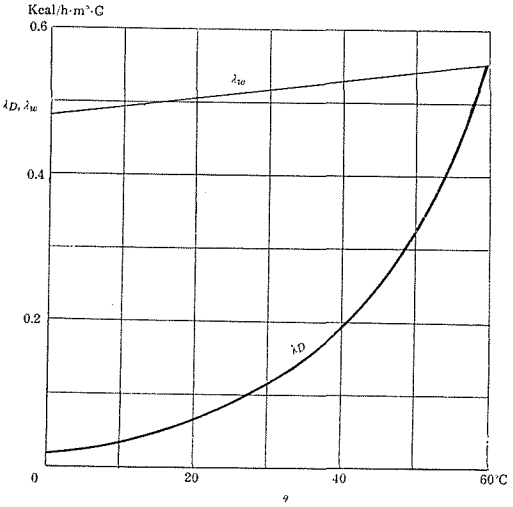
$$k = 0.086\frac{10000}{P_0}\left(\frac{T}{273}\right)^{2.3}\ [\mathrm{m^2/h}]$$

また，拡散蒸汽の運ぶ熱量は，拡散量 g_D に蒸汽の潜熱 γ[kcal/kg] を乗じた $g_D\gamma$[kcal/h·m²] となる。他方，拡散による熱移動量は，拡散等価熱伝導率を λ_D で表わせば，熱伝導に関する Fourier の基本式より $-\lambda_D\frac{d\theta}{dr}$ と与えられるので，前記の $g_D\gamma$ と $-\lambda_D\frac{d\theta}{dr}$ とを等置し，式(5)を用いて拡散等価熱伝導率 λ_D はつぎのように求まる。

$$\lambda_D = \frac{\gamma k}{\mu R_D T}\frac{P_0}{P_0-P_s}\frac{dP_s}{d\theta}\cdot$$

$$[\mathrm{kcal/h\cdot m\cdot ℃}] \quad \cdots\cdots (6)$$

上式の右辺はパラメータ μ および P_0 を含む温度 θ のみの函数であり，いま，$\mu=1$，$P_0=10000\ \mathrm{kg/m^2}$，すなわち1気圧の大気中で蒸汽拡散が行なわれるとして，λ_D, θ-関係を求めれば，第5図に示すように，等価熱伝導率は温度



第5図　拡散等価熱伝導率と水の熱伝導率

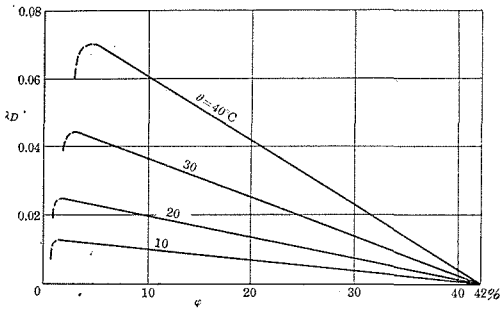
上昇とともに著しく増大することがわかる。また，同図には，比較のため水の熱伝導率 λ_w を掲げた。例えば，λ_D は 20°C において 0.062 kcal/h·m·°C という値を示し，乾燥状態の保温材の熱伝導率と同程度の値となり，約 60°C で水の熱伝導率 0.55 kcal/h·m·°C と等しくなる。

湿つた物質の熱伝導率を測定するとき，物質内の含有水分の一部は蒸汽となり拡散移動するが，この際にも上式は適用できる。この場合，蒸汽は物質内の空隙を通つて拡散するので，いま物質の容積含水率を φ，乾燥時の空隙率を Ψ で表わせば，試料単位面積当りの拡散蒸汽量 g_D，および拡散等価熱伝導率 λ_D はそれぞれつぎのようになる。

$$g_D = -(\Psi-\varphi)\frac{k}{\mu R_D T}\frac{P_0}{P_0-P_s}\frac{dP_s}{d\theta}\frac{d\theta}{dr}, \quad [\mathrm{kg/m^2h}] \quad \cdots\cdots (7)$$

$$\lambda_D = (\Psi-\varphi)\frac{\gamma k}{\mu R_D T}\frac{P_0}{P_0-P_s}\frac{dP_s}{d\theta}. \quad [\mathrm{kcal/h\cdot m\cdot °C}] \quad \cdots\cdots (8)$$

すなわち，拡散蒸汽量と等価熱伝導率は温度および温度勾配により変化するとともに，含水率によつても変化することになる。いま，当試料につき，等価熱伝導率と温度および含水率の間の関係を，式(8)に基づき計算，図示すれば第6図のように表わされる。実際上，物質はその温度に固有の，蒸汽拡散を伴わない水分を含むので，等価熱伝導率は図中の破線のように低含水率域において急に低下することとなる。



第6図 含水率と拡散等価熱伝導率との関係

当実験では，室温附近で測定を行なつたので，拡散等価熱伝導率は実測される見掛けの熱伝導率に比して極めて小さい。このことは，第4図において，最下部に画いた 20°C (室温) に対する等価熱伝導率と実測値とを比較すれば，明らかである。例えば，含水率 3% における実測値に対し，等価熱伝導率の占める割合は約 4% であり，含水率 20% では僅か 1% 程度となる。また，試料の温度上昇を 1°C 前後に抑えたので，第5または6図からわかるように，温度変化による等価熱伝導率の変化も無視できる。

2. 蒸汽拡散が水分分布に及ぼす影響

つぎに，当実験では，蒸汽拡散による水分分布の乱れなしに，均等な水分分布のもとで測定できることを計算によつて確かめる。

物質内の空隙を通して拡散する蒸汽量は，温度勾配と空隙率に比例し，高温度となるほど著しく増加する。

他方，いま試料内に熱源を中心として半径がそれぞれ r および $r+\Delta r$，高さが単位長さであるような二つの円筒面を考えると，この二つの円筒面で囲まれた微小環状部分に蓄積される

水分，言いかえると，その微小部分における含水量の変化は半径 r の円筒面を通して拡散流入する蒸汽量 $2\pi r g_D(r)$ と半径 $r+\Delta r$ の円筒面から拡散流出する蒸汽量 $2\pi(r+\Delta r)g_D(r+\Delta r)$ との差に等しい。すなわち，単位長さの微小環状部分における含水量の変化 ΔG_D は近似的につぎのように求められる。

$$\Delta G_D \fallingdotseq -2\pi r\Delta r\left(\frac{1}{r}g_D(r)+\frac{dg_D(r)}{dr}\right).$$

ここで，$g_D(r)$ は試料内任意点における蒸汽拡散量であり，式(7)で与えられる。

加熱開始後 t[h] の間に微小環状部分に蓄積される水分は，次式のごとく表わされる。

$$\Delta G_D\Big|_{t=0}^{t=t} = -2\pi r\Delta r\int_0^t\left\{\frac{1}{r}g_D(r)+\frac{dg_D(r)}{dr}\right\}dt$$

これを容積含水率 $\Delta\varphi$ で表わせば

$$\Delta\varphi\Big|_{t=0}^{t=t} = -\int_0^t\left\{\frac{1}{r}g_D(r)+\frac{dg_D(r)}{dr}\right\}dt \quad \cdots\cdots (9)$$

とくに，熱源と試料が接する部分では，含有水分は熱源の半径方向に拡散放出されるのみで，含水率の変化は最も著しく，次式で表わされる。

$$\Delta\varphi\Big|_{t=0,\,r=a}^{t=t} = -\int_0^t\left\{g_D(a)+2\left.\frac{dg_D(r)}{dr}\right|_{r=a}\right\}dt \quad \cdots\cdots (9')$$

式(9)，(9′)の右辺の $g_D(r)$ に式(7)を代入して積分計算を行い，含水率の変化を求めるためには，試料の温度 θ が知られていなければならない。試料の温度は，試料と熱伝導率の無限に大きい熱源とが完全に接触していると看做せば，附録に示すように，計算に便利なつぎのような型で表わされる。

時間 t の小さい値に対して

$$\begin{aligned}\theta \cong \theta_0 + q\sqrt{\frac{a}{r}}\Bigg[&\frac{4}{M_1c_1}t\cdot i^2\operatorname{erfc}\frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_2 t}}+\frac{8}{M_1c_1}\Bigg\{-\frac{\sqrt{\kappa_2}}{8r}-\frac{1}{M_1c_1}\left(\frac{2\pi a\lambda_2}{\sqrt{\kappa_2}}\right.\\ &\left.-\frac{M_1c_1\sqrt{\kappa_2}}{8a}\right)\Bigg\}t^{\frac{3}{2}}i^3\operatorname{erfc}\frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_2 t}}+\frac{16}{M_1c_1}\Bigg\{\frac{9\kappa_2}{128r^2}-\frac{1}{M_1c_1}\left(\frac{3\pi\lambda_2}{2}\right.\\ &\left.+\frac{9M_1c_1\kappa^2}{128a^2}\right)-\frac{1}{M_1c_1}\left(\frac{2\pi a\lambda_2}{\sqrt{\kappa_2}}-\frac{M_1c_1\sqrt{\kappa_2}}{8a}\right)\Bigg[-\frac{\sqrt{\kappa_2}}{8r}-\frac{1}{M_1c_1}\left(\frac{2\pi a\lambda_2}{\sqrt{\kappa_2}}\right.\\ &\left.-\frac{M_1c_1\sqrt{\kappa_2}}{8a}\right)\Bigg]\Bigg\}t^2\cdot i^4\operatorname{erfc}\frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_2 t}}+0\left(t^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg]. \quad \cdots\cdots (10)\end{aligned}$$

とくに，熱源と試料の接触面では，

$$\begin{aligned}\theta|_{r=a} \cong \theta_0 + \frac{q}{M_1c_1}\Bigg[&t-\frac{2\pi a^2\lambda_2}{M_1c_1\sqrt{\kappa_2}}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\\ &+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{2\pi a^2\lambda_2}{M_1c_1\sqrt{\kappa_2}}\right)^2-\frac{\pi a\lambda_2}{M_1c_1}\right\}t^2+0\left(t^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg]. \quad \cdots\cdots (10')\end{aligned}$$

ここで，q: 熱源の単位長さ，単位時間当りの発生熱量 [kcal/h·m]，a: 熱源の半径 [m]，M_1: 熱源単位長さ当りの重量 [kg/m]，c_1: 熱源材料の比熱 [kcal/kg·°C]，λ_2: 試料の熱伝導率 [kcal/h·m·°C]，κ_2: 試料の温度伝播率 [m²/h]，および

$$i^2\operatorname{erfc}x=\frac{1}{4}\left[(1+2x^2)\operatorname{erfc}x-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,x\,e^{-x^2}\right],$$

$$i^3\operatorname{erfc}x=\frac{1}{6}\left[(1+x^2)\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}-\left(\frac{3}{2}x+x^3\right)\operatorname{erfc}x\right],$$

$$i^4\operatorname{erfc}x=\frac{1}{8}\left[\left(\frac{1}{4}+x^2+\frac{x^4}{3}\right)\operatorname{erfc}x-\left(\frac{5}{6}x+\frac{x^3}{3}\right)\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\right],$$

$$\operatorname{erfc}x=\text{余誤差函数}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt,$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=1.3293\cdots\cdots.$$

時間 t の大きい値に対しては

$$\theta\fallingdotseq\theta_0+\frac{q}{4\pi\lambda_2}\left[\log\frac{4\kappa_2}{r^2}t-\gamma+\frac{1}{2t}\left\{\frac{a^2+r^2}{2\kappa_2}+\left(\frac{a^2}{\kappa^2}-\frac{M_1c_1}{\pi\lambda_2}\right)\times\left(\log\frac{4\kappa_2}{ar}t-\gamma\right)\right\}+0\left(\frac{1}{t^2}\right)\right].\quad\cdots\cdots(11)$$

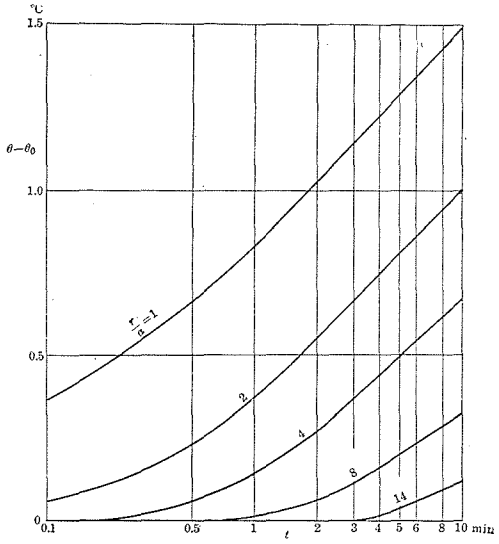
とくに，熱源と試料の接触面では

$$\theta|_{r=a}\fallingdotseq\theta_0+\frac{q}{4\pi\lambda_2}\left[\log\frac{4\kappa_2}{a^2}t-\gamma+\frac{1}{2t}\left\{\frac{a^2}{\kappa_2}+\left(\frac{a^2}{\kappa_2}-\frac{M_1c_1}{\pi\lambda_2}\right)\times\left(\log\frac{4\kappa_2}{a^2}t-\gamma\right)\right\}+0\left(\frac{1}{t^2}\right)\right].\quad\cdots\cdots(11')$$

ここで，γ: Euler 常数 $=0.5772\cdots\cdots$

このようにして，試料の含水率変化は，式 (7), (9), (9′), (10), (10′), (11) および (11′) 等により計算できる。以下，これら諸式を用いた計算例を掲げ，当実験においては，含水率の変化を無視して熱伝導率の測定を行なうことができるということを示す。

さて，水分分布の変化は，熱源に近いほど，また温度変化の激しいほど大きい。前述のように熱源に接する部分で含水量の低減は最も著しい。また，試料の温度変化は，同一の加熱条件のもとでは，試料が湿つている場合よりも乾いているときの方が大きい。この



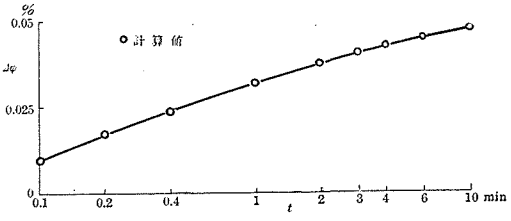
第7図 試料内の温度上昇

ような理由から，熱源に接する部分の含水率の変化を，乾いた状態にある試料の温度変化を基にして計算すれば，その結果から，水分分布を一様と看做し得るか否かの目安がつく。

まず，試料の温度変化を，乾燥した砂につき式(10), (10′), (11), (11′)等を用いて計算すれば第7図のようになる。縦軸は温度差 $\theta-\theta_0$[℃]，横軸は時間 t[min] の対数であり，各曲線は無次元数 $\frac{r}{a}$ の種々の値に対する温度変化を示している。本例で使用した諸特性値のうち，熱源単位長さ当りの重量 M_1，および熱源半径 a は直接測定でき，また試料熱伝導率 λ_2 には当実験で得た値を引用した。熱源の比熱 c_1 に対しては，熱源総体を銅と看做して銅の比熱値をとり，試料の温度伝播率 κ_2 には ten Bosch[7] が乾いた河砂に対して与えている値をとつた。熱源単位長さ当りの発生熱量 q は，温度上昇に対しては単に比例的に作用するのみであるが，ここでは，q の値として当実験条件に合う値を用いた。すなわち，上記の諸特性値はつぎの通りである。

$$M_1 = 0.0234\ \text{kg/m},\quad c_1 = 0.092\ \text{kcal/kg·℃},\quad a = 0.0014\ \text{m},\quad \lambda_2 = 0.26\ \text{kcal/h·m·℃}$$
$$\kappa_2 = 0.001\ \text{m}^2\text{/h},\qquad q = 1.4\ \text{kcal/h·m}$$

上に求めた乾燥試料の温度変化を式(9′)に入れて数値積分を行なえば，湿つた試料の最大含水率変化が求まる。第8図は，この計算結果を例示したもので，初温度 20℃，含水率 10% の砂につき，加熱開始後 10 min $\left(t=\frac{10}{60}\ \text{h}\right)$ に生ずる，熱源と試料の接触面での含水率変化を表わしている。10 min 後には，わずか 0.05% の含水率の減少となつているが，この減少割合は初めの含水率に対して無視できる。前にのべたように，熱源から離れるにつれて含水率の変化は少なくなり，また，同じ温度変化に基づき計算する限り，含水率の変化は空隙率 $\Psi-\varphi$ に比例する。例えば，上例において，初めの含水率を 5% とすれば，その減少は含水率にして 0.06% となり，含水率 30% とすれば 0.02% の減少となる。

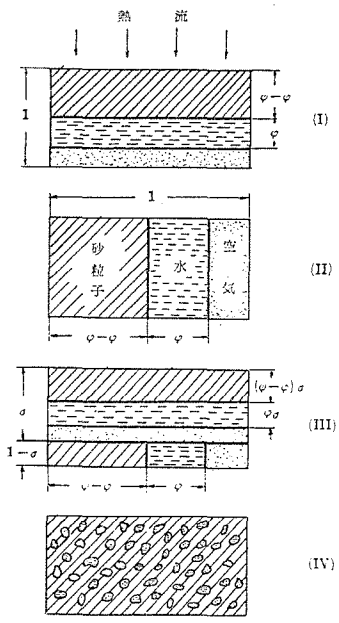


第8図　蒸汽拡散による含水率変化

上記計算例で示したように，当測定法を用いる場合には，含有水分の蒸汽拡散に基く水分分布の乱れは無視でき，一様な水分分布のもとで，湿つた物質の熱伝導率を測定することができる。従つて，定常熱流法で得られる熱伝導率は，試料の平均含水率に対する値であるのに反し，当不定常熱流法を用いる場合には，実測される熱伝導率は一様な含水率に対する値となる。

3. 熱伝導率と含水率との関係

つぎに，熱伝導率と含水率との関係を検討する。前掲の第4図に示す実測値は，蒸汽拡散の影響を含む見掛けの熱伝導率であるが，前述した通り，拡散等価熱伝導率が見掛けの熱伝導率を占める割合は極めて少ないので，見掛けの熱伝導率と含水率との関係は，主に純熱伝導率



第9図 試料構成物質の配列模型

と含水率との関係に帰せられる。

純熱伝導率と含水率との関係を解析するため，当試料を砂粒子，水，空気で構成される3体混合物質と看做し，これら3構成物質が種々な配列状態を示す場合の熱伝導率と含水率との関係を求め，実測結果と比較する。

実際の構成物質の配列状態は，多くの因子に影響を受け，数式化するには余りに複雑であるので，ここでは O. Krischer[8] などの解析のように，混合体の配列を第9図に示すように極端に単純化した模型と，その組合せと看做して検討する。同図の (I), (II) は3構成物質を熱流方向に対しそれぞれ直角および平行に層状をなすよう配置した場合であり，極限配列を表わしている。一般に，ある材料を二つ以上の構成物質から成る混合物質と看做す限り，材料の熱伝導率は，配列 (I) に基づいて計算される値よりも大きく，(II) に基づいて求められる値よりも小さい値を示す。(III) はこの二つの配列を組合せた場合であり，(IV) は3構成物質の中2物質が均等に粒状分布し，残りの物質が所謂基礎物質となつて，その間隙を満たしている場合である。これら四つの配列状態に対する熱伝導率は，各構成物質の熱伝導率とその構成割合，云いかえると混合割合を用い，つぎの各式で与えられる。

配列 (I) に対しては

$$\lambda_{\mathrm{I}} = \frac{1}{\dfrac{1-\psi}{\lambda_s} + \dfrac{\varphi}{\lambda_w} + \dfrac{\psi-\varphi}{\lambda_l}}. \qquad \cdots\cdots (12)$$

配列 (II) に対しては

$$\lambda_{\mathrm{II}} = (1-\psi)\lambda_s + \varphi\lambda_w + (\psi-\varphi)\lambda_l. \qquad \cdots\cdots (13)$$

配列 (III) に対しては

$$\lambda_{\mathrm{III}} = \frac{1}{\dfrac{\sigma}{\lambda_{\mathrm{I}}} + \dfrac{1-\sigma}{\lambda_{\mathrm{II}}}} \qquad \cdots\cdots (14)$$

配列 (IV) に対しては，基礎物質にどの物質を選ぶかにより，3通りの場合が考えられる。まず，基礎物質を砂粒子とすれば

$$\lambda_{\mathrm{IV}} = \lambda_s \frac{1-2\left[\varphi\dfrac{\lambda_s-\lambda_w}{2\lambda_s+\lambda_w} + (\psi-\varphi)\dfrac{\lambda_s-\lambda_l}{2\lambda_s+\lambda_l}\right]}{1+\left[\varphi\dfrac{\lambda_s-\lambda_w}{2\lambda_s+\lambda_w} + (\psi-\varphi)\dfrac{\lambda_s-\lambda_l}{2\lambda_s+\lambda_l}\right]}. \qquad \cdots\cdots (15\,a)$$

基礎物質を水とすれば

$$\lambda_{IV}=\lambda_w\frac{1-2\left[(1-\psi)\frac{\lambda_w-\lambda_s}{2\lambda_w+\lambda_s}+(\psi-\varphi)\frac{\lambda_w-\lambda_l}{2\lambda_w+\lambda_l}\right]}{1+\left[(1-\psi)\frac{\lambda_w-\lambda_s}{2\lambda_w+\lambda_s}+(\psi-\varphi)\frac{\lambda_w-\lambda_l}{2\lambda_w+\lambda_l}\right]}. \quad \cdots\cdots (15\,b)$$

基礎物質を空気とすれば

$$\lambda_{IV}=\lambda_l\frac{1-2\left[(1-\psi)\frac{\lambda_l-\lambda_s}{2\lambda_l+\lambda_s}+\varphi\frac{\lambda_l-\lambda_w}{2\lambda_l+\lambda_w}\right]}{1+\left[(1-\psi)\frac{\lambda_l-\lambda_s}{2\lambda_l+\lambda_s}+\varphi\frac{\lambda_l-\lambda_w}{2\lambda_l+\lambda_w}\right]}. \quad \cdots\cdots (15\,c)$$

ここで，λ_I, λ_{II}, λ_{III}, λ_{IV}：それぞれ配列 (I), (II), (III), (IV) に対する合成熱伝導率 [kcal/h·m·°C]，λ_s：砂粒子の熱伝導率，λ_w：水の熱伝導率 $=0.477\,(1+0.003\theta)$ kcal/h·m·°C[9]，λ_l：空気の熱伝導率 $=0.00167\frac{1+0.000194\,T}{1+\frac{117}{T}}\sqrt{T}$[10]，$\varphi$：容積含水率，$\psi$：試料の乾燥時空隙率 $=0.42$，σ：配列 (III) における配列 (I) の構成割合。

上記の諸特性値のうち，砂粒子の熱伝導率 λ_s および配列構成割合 σ は未知であるが，これは，例えば配列 (III) を仮定すればつぎのようにして実験的に求めることができる。すなわち試料を乾燥し，含水率を 0 にした場合と，試料の内部の空気をすべて水で置きかえ，最大含水状態にした場合とにつき，熱伝導率を測定する。勿論，この場合，蒸汽拡散は起らず，純熱伝導率が測定される。この測定結果を式 (14) に代入して得られる連立方程式は，λ_s と σ を未知数として含んでいるので，これを解けばよい。計算の結果 $\lambda_s=1.71$ kcal/h·m·°C，$\sigma=0.157$ という値が求まる。

各配列状態に対し，これら諸値を用い，含水率を種々変えた場合の熱伝導率を求め，その結果を図示すれば，第 4 図に表わされるような λ, φ-関係が得られる。図中の曲線 ①, ②, ③ はそれぞれ式 (12), (13), (14) に対する計算値であり，また ⑭, ⑮, ⑯ は式 (15 a), (15 b), (15 c) に対する値を表わしている。同図から明らかなように，配列 (III), (IV) および実測結果の示す熱伝導率は，当然極限配列 (I), (II) の示す熱伝導率に挟まれる。なお，ここで計算した λ, φ-曲線は，純熱伝導率に対するものであり，拡散等価熱伝導率は含まれていないが，当実験においては，見掛けの熱伝導率に及ぼす等価熱伝導率の影響が極めて少ないので，同図では煩雑を避けるため，純熱伝導率と等価熱伝導率を別々に示した。図中の曲線 ⓓ は拡散等価熱伝導率と含水率との関係を表わしており，第 6 図の λ_v, φ-曲線をここに移したものである。従つて，曲線 ①, ②, ③ 等に曲線 ⓓ を重畳すれば，各種配列状態に応じて見掛けの熱伝導率を求めることができる。また逆に，実測値から曲線 ⓓ の示す値を差引けば，当試料の純熱伝導率は求まる。

さて，実測した λ, φ-関係の傾向としては，含水率 1% 以下の低含水率域では，曲線 ③ に沿つて変化するが，含水率 1% と 2% の間で熱伝導率は急に増し，以後，含水率の高まるにともない漸増しており，配列 (III) のような単純な模型とはかなり異なつた傾向を示す。すなわち

含水率1% 以下の場合は，水滴はまだたがいに不連続の状態で存在するが，含水率2% 程度になると砂粒子表面を覆う水膜がたがいに連絡し，砂粒子間の微細間隙を満し，その結果，接触部分の熱抵抗が著しく減少し，急激な熱伝導率の増加を表わすものと思われる。ゆえに，含水率約2% 以下においては，砂粒子，水，空気の3構成物質のうち，空気および砂粒子がたがいに連続の状態にあり，水はその間に点在しているが，含水率がこの範囲を越えると，逆に水および砂粒子が連続体となり，空気はその間に狭まれた型になると推測される。さらに，含水率が次第に増せば，$\lambda_l \fallingdotseq 0.02$ kcal/h·m·℃ の空気の部分が $\lambda_w \fallingdotseq 0.5$ kcal/h·m·℃ の水に置き換わり，混合体としての湿つ砂たの熱伝導率値は増加する。第4図の模型化した配列についての曲線群と比較すれば，含水率が30% を越える範囲では，測定値は配列(IV)の，砂粒子が基礎物質となり水と空気が粒状に存在すると看做して求めた㊹の曲線に近い傾向を示している。

V. むすび

不定常熱流による熱伝導率の迅速測定方式に基づき，湿つた物質の測定に適する装置を作製し，湿つた砂の熱伝導率を実測した。測定は室温のもとで行なつたが，試料内の水分分布の乱れは起らず，均等な水分分布のもとで，蒸汽拡散による影響の極めて少ない状態において熱伝導率を測定することができた。

熱伝導率と含水率の関係については，含水率1乃至2% の間で，熱伝導率は急激に上昇し乾燥時の2倍にも達する。以後，含水率が高まるにつれて熱伝導率も漸増し，試料が水浸しになつた状態で熱伝導率は乾燥時の約5倍となり，最大値を示した。また，このような関係を，試料を砂粒子，水，空気の3体混合物質と看做し，その配列を数種に模型化したものと比較検討した。

本研究における測定方式については，室蘭工大学長大賀悳二先生(前北大教授)の御示唆を受けた。その後絶えず温い御鞭撻を賜わつた。衷心謝意を表する次第である。なお，当研究は一部文部省科学研究費によることを附記する。

文　献

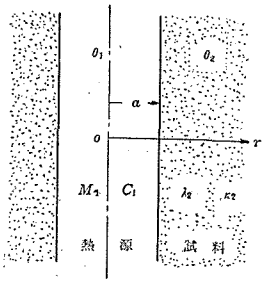
1) 大賀悳二・岡垣　理：含水多孔物質の熱伝導率．北大工学部彙報，第6号，昭27-3.
2) O. Krischer, H. Esdorn: Die Wärmeübertragung in feuchten, porigen Stoffen versuchiedener Struktur. VDI-Forsch. Bd. 22, 1956, Nr. 1.
3) 棚沢　泰：日本機械学会誌，第35巻，第181号，昭7-5, p. 390.
4) 斎藤　武・岡垣　理：不定常熱流による熱伝導率の迅速測定について．北大工学部研究報告，第14号昭31-4.
5) J. Stefan: Versuche über Verdampfung. Math. Naturwiss. Sitzungsber, Bd. 98 (1889) S. 1418.
6) O. Krischer, H. Rohnalter: Die Wärmeübertragung durch Diffusion des Wasserdampfes in den Poren von Baustoffen unter Einwirkung eines Temperaturgefälles. Gesundh.-Ing. Bd. 60 (1937) S. 621.

7) M. ten Bosch: Die Wärmeübertung. Springer, 1936.
8) 前掲 2).
9) M. Jakob: Ann. d. Physik. 1920, S. 537.
10) 前掲 7).

附　　錄

1. 式 (10) の誘導

第10図のように，熱源の半径，単位長さ単位時間当りの熱発生量，単位長さ当りの重量および比熱をそれぞれ a, q, M, c_1 試料の熱伝導率および温度伝播率をそれぞれ λ_2, κ_2 とすれば，熱源と試料の温度 θ_1, θ_2 はつぎに掲げる基礎微分方程式と初期および境界条件を満足しなければならない。ただし，r は熱源の軸を中心とする半径座標を表わし，また計算を便にするため，初期温度は 0 とする。



第10図

$$\frac{\partial^2\theta_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\theta_2}{\partial r}=\frac{1}{\kappa_2}\frac{\partial\theta_2}{\partial t},\quad a<r<\infty,\quad t>0;$$

$$\theta_1=\theta_2=0,\quad t=0;$$

$$\theta_1=\theta_2,\qquad r=a;$$

$$-2\pi a\lambda_2\frac{\partial\theta_2}{\partial r}=q-M_1c_1\frac{\partial\theta_1}{\partial t},\quad r=a,\quad t>0;$$

$$\theta_2=0,\quad r\to\infty$$

上諸式を t に関して Laplace 変換すれば，初期温度 0 なる条件を考慮して

$$\frac{d^2\bar{\theta}_2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\bar{\theta}_2}{dr}=q_2^2\bar{\theta}_2,\quad a<r<\infty;$$

$$\bar{\theta}_1=\bar{\theta}_2,\quad r=a;$$

$$-2\pi a\lambda_2\frac{d\bar{\theta}_2}{dr}=\frac{q}{s}-M_1c_1s\bar{\theta}_1,\quad r=a;$$

$$\bar{\theta}_2=0,\quad r\to\infty.$$

ここで，$\bar{\theta}_1$, $\bar{\theta}_2$ はそれぞれ θ_1, θ_2 の t に関する Laplace 変換を表わし，s は変換変数，また $q_2^2=\dfrac{s}{\kappa_2}$ である。

これら各条件を満たす常微分方程式の解は

$$\bar{\theta}_2=\frac{qK_0(q_2r)}{s[2\pi a\lambda_2q_2K_1(q_2a)+M_1c_1sK_0(q_2a)]}\qquad\cdots\cdots\cdots

上式に逆変換定理を適用すれば，試料温度 θ_2 はつぎの複素積分によつて表わされる。

$$\theta_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty}\bar{\theta}_2(s)\,e^{ts}ds. \qquad \cdots\cdots (2\,\mathrm{A})$$

この複素積分は，積分路を適当に選ぶことにより収斂し，つぎのような厳密解* が得られる。

$$\theta_2 = \frac{2q}{\pi M_1 c_1 \kappa_2}\int_0^{\infty}(1-e^{-\kappa_2 u^2 t})\,\frac{J_0(ur)[uY_0(ua)-kY_1(ua)]-Y_0(ur)[uJ_0(ua)-kJ_1(ua)]}{u^2\{[uY_0(ua)-kY_1(ua)]^2+[uJ_0(ua)-kJ_1(ua)]^2\}}\,du.$$

ここで，$k=\dfrac{2\pi a\lambda_2}{M_1c_1\kappa_2}$，$J_0$，$J_1$ はそれぞれ 0 次および 1 次の第 1 種 Bessel 函数，Y_0，Y_1 はそれぞれ 0 次および 1 次の第 2 種 Bessel 函数である。

いま，時間 t の小さい値に対し収斂の速い級数解を求めるため，式 (1 A) を s について降冪級数に展開する。そのため，K_0，K_1 をつぎの漸近展開公式によつて級数展開する。

$$K_\nu(z)\cong\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\left\{1+\frac{4\nu^2-1^2}{1!8z}+\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!(8z)^2}+\cdots\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)\cdots\cdots\{4\nu^2-(2m-3)^2\}}{(m-1)!(8z)^{m-1}}+\cdots\cdots\right\}^{**}$$

ただし，上式は ν 次の第 2 種変型 Bessel 函数に対する漸近展開式である。

式 (1 A) の分子を展開すれば

$$q\sqrt{\frac{\pi\sqrt{\kappa_2}}{2r\sqrt{s}}}\,e^{-\frac{r\sqrt{s}}{\sqrt{\kappa_2}}}\left\{1-\frac{\sqrt{\kappa_2}}{8r\sqrt{s}}+\frac{9\kappa_2}{128r^2s}-\frac{225\kappa_2^{\frac{3}{2}}}{3072r^3s^{\frac{3}{2}}}+0\left(\frac{1}{s^2}\right)\right\}. \qquad \cdots (3\,\mathrm{A})$$

分母を展開すれば

$$\sqrt{\frac{\pi\sqrt{\kappa_2}}{2a\sqrt{s}}}\,e^{-\frac{a\sqrt{s}}{\sqrt{\kappa_2}}}\left[M_1c_1s^2+\left(\frac{2\pi a\lambda_2}{\sqrt{\kappa_2}}-\frac{M_1c_1\sqrt{\kappa_2}}{8a}\right)s^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{3\pi\lambda_2}{4}+\frac{9M_1c_1\kappa_2}{128a^2}\right)s\right.$$
$$\left.-\left(\frac{15\pi\lambda_2\sqrt{\kappa_2}}{64a}+\frac{225M_1c_1\kappa_2^{\frac{3}{2}}}{3072a}\right)s^{\frac{1}{2}}+0(1)\right]. \qquad \cdots\cdots (4\,\mathrm{A})$$

$\bar{\theta}_2$ は式 (3 A) を (4 A) で割つてつぎのように表わされる。

$$\bar{\theta}_2\cong q\sqrt{\frac{a}{r}}\,e^{-\frac{(r-a)}{\sqrt{\kappa_2}}\sqrt{s}}\left[\frac{1}{M_1c_1}s^{-2}+\frac{1}{M_1c_1}\left\{-\frac{\sqrt{\kappa_2}}{8r}-\frac{1}{M_1c_1}\left(\frac{2\pi a\lambda_2}{\sqrt{\kappa_2}}-\frac{M_1c_1\sqrt{\kappa_2}}{8a}\right)\right\}s^{-\frac{5}{2}}\right.$$
$$+\frac{1}{M_1c_1}\left\{\frac{9\kappa_2}{128r^2}-\frac{1}{M_1c_1}\left(\frac{3\pi\lambda_2}{4}+\frac{9M_1c_1\kappa_2}{128a^2}\right)-\frac{1}{M_1c_1}\left(\frac{2\pi a\lambda_2}{\sqrt{\kappa_2}}-\frac{M_1c_1\sqrt{\kappa_2}}{8a}\right)\times\right.$$
$$\left.\left.\left[-\frac{\sqrt{\kappa_2}}{8r}-\frac{1}{M_1c_1}\left(\frac{2\pi a\lambda_2}{\sqrt{\kappa_2}}-\frac{M_1c_1\sqrt{\kappa_2}}{8a}\right)\right]\right\}s^{-3}+0\left(s^{-\frac{7}{2}}\right)\right]. \qquad \cdots\cdots (5\,\mathrm{A})$$

試料温度 θ_2 は，式 (5 A) に逆変換を施せば求まる。この場合，Carslow の与える変換表***

---

* H. S. Carslaw & J. C. Taeger: Conduction of Heat in Solids. Oxford University Press, 1948, p. 284.

** N. W. Mclachlan: Bessel Function for Engineers. Oxford University Press, 1934, p. 165.

*** 前掲脚注*, p. 380.

より，つぎの関係を引用して解を求めることができる。

$$\frac{e^{-q_2 x}}{s^{1+\frac{1}{2}n}} \subset (4t)^{\frac{1}{2}n} \cdot i^n \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\kappa_2 t}}. \quad \cdots\cdots (6\,\mathrm{A})$$

ただし，上式の左辺は Laplace 変換の像函数，右辺は原函数である。

この Laplace 対函数において，$n=2,\ 3,\ 4$ と置けば

$$\left.\begin{aligned} &e^{-\sqrt{\frac{s}{\kappa_2}}(r-a)} s^{-2} \subset (4t)\cdot i^2 \operatorname{erfc} \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_2 t}}, \\ &e^{-\sqrt{\frac{s}{\kappa_2}}(r-a)} s^{-\frac{5}{2}} \subset (4t)^{\frac{3}{2}} \cdot i^3 \operatorname{erfc} \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_2 t}}, \\ &e^{-\sqrt{\frac{s}{\kappa_2}}(r-a)} s^{-3} \subset (4t)\cdot i^4 \operatorname{erfc} \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_2 t}}. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (7\,\mathrm{A})$$

従つて，式 (5 A) および (7 A) より θ_2 は次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} \theta_2 \cong q\sqrt{\frac{a}{r}}\Bigg[&\frac{4}{M_1c_1} t\cdot i^2 \operatorname{erfc}\frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_2 t}} + \frac{8}{M_1c_1}\left\{-\frac{\sqrt{\kappa_2}}{8r} - \frac{1}{M_1c_1}\left(\frac{2\pi a\lambda_2}{\sqrt{\kappa_2}} - \frac{M_1c_1\sqrt{\kappa_2}}{8a}\right)\right\} \\ &\times t^{\frac{3}{2}}\cdot i^3 \operatorname{erfc}\frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_2 t}} + \frac{16}{M_1c_1}\left\{\frac{9\kappa_2}{128r^2} - \frac{1}{M_1c_1}\left(\frac{3\pi\lambda_2}{4} + \frac{9M_1c_1\kappa_2}{128a^2}\right)\right. \\ &\left. - \frac{1}{M_1c_1}\left(\frac{2\pi a\lambda_2}{\sqrt{\kappa_2}} - \frac{M_1c_1\sqrt{\kappa_2}}{8a}\right)\left[-\frac{\sqrt{\kappa_2}}{8r} - \frac{1}{M_1c_1}\left(\frac{2\pi a\lambda_2}{\sqrt{\kappa_2}} - \frac{M_1c_1\sqrt{\kappa_2}}{8a}\right)\right]\right\} \times \\ &t^2\cdot i^4 \operatorname{erfc}\frac{r-a}{2\sqrt{\kappa_2 t}} + 0\left(t^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg]. \quad \cdots\cdots (8\,\mathrm{A}) \end{aligned}$$

ここで，

$$i^{-n}\operatorname{erfc} x = \int_x^{\infty} i^{n-1}\operatorname{erfc}\xi\, d\xi, \quad n = 1,\ 2, \cdots\cdots . \qquad (9\,\mathrm{A})$$

ただし，

$$i^0 \operatorname{erfc} x = \operatorname{erfc} x, \qquad (10\,\mathrm{A})$$

$$2n\cdot i^n \operatorname{erfc} x = i^{n-2}\operatorname{erfc} x - 2x\cdot i^{n-1}\operatorname{erfc} x. \quad \cdots\cdots (11\,\mathrm{A})$$

(10 A) 式および漸化式 (11 A) を用い，(9 A) の右辺を部分積分すれば，つぎの関係式が導かれる。

$$\left.\begin{aligned} i^2 \operatorname{erfc} x &= \frac{1}{4}\left[\operatorname{erfc} x\,(1+2x^2) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, x\, e^{-x^2}\right., \\ i^3 \operatorname{erfc} x &= \frac{1}{6}\left[-\left(\frac{3}{2}x + x^3\right)\operatorname{erfc} x + (1+x^2)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2}\right], \\ i^4 \operatorname{erfc} x &= \frac{1}{8}\left[\left(\frac{1}{4} + x^2 + \frac{x^4}{3}\right)\operatorname{erfc} x - \left(\frac{5x}{6} + \frac{x^3}{3}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2}\right]. \end{aligned}\right\} \quad \cdots (12\,\mathrm{A})$$

式 (8 A) は初期温度 0 に対する試料の温度式であるが，初期温度 θ_0 なる場合の温度変化は，同式右辺に θ_0 を加えるのみで求まる。以上のようにして式 (10) は導かれる。

2. 式 (11) の 誘 導

つぎに，時間 t の大きい値に対し収斂の速い解を求めるため，式 (1A) を s について昇冪級数に展開する。このため K_0, K_1 の展開式

$$\left.\begin{aligned} K_0(x) &= -\left[\gamma+\log\frac{x}{2}\right]I_0(x)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{m}\right), \\ K_1(x) &= \left[\gamma+\log\frac{x}{2}\right]I_1(x)+\frac{1}{x} \\ &\quad -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m-1)!\,m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{m}-\frac{1}{2m}\right), \end{aligned}\right\} \quad (1\,B)$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned} I_0(x) &= 1+\frac{x^2}{2^2(1!)^2}+\frac{x^4}{2^4(2!)^2}+\cdots\cdots, \\ I_1(x) &= \frac{x}{2}+\frac{x^3}{2^3 1!2!}+\frac{x^5}{2^5 2!3!}+\cdots\cdots, \end{aligned}\right\}$$

を用いて (1A) 式を展開すれば，同式分子は

$$q\left[-\left(\gamma+\log\frac{r\sqrt{s}}{2\sqrt{\kappa_2}}\right)-\frac{r^2}{4\kappa_2}\left(\gamma+\log\frac{r\sqrt{s}}{2\sqrt{\kappa_2}}-1\right)s \right.$$
$$\left. -\frac{r^4}{64\kappa_2^2}\left(\gamma+\log\frac{r\sqrt{s}}{2\sqrt{\kappa_2}}-\frac{3}{2}\right)s^2-0(s^3)\right]. \quad \cdots\cdots (2\,B)$$

また，分母は

$$2\pi\lambda_2 s+\left\{\left(\frac{\pi a^2\lambda_2}{\kappa_2}-M_1c_1\right)\left(\gamma+\log\frac{a\sqrt{s}}{2\sqrt{\kappa_2}}\right)-\frac{\pi a^2\lambda_2}{2\kappa_2}\right\}s^2$$
$$+\left\{\left(\frac{\pi a^4\lambda_2}{8\kappa_2^2}-\frac{M_1c_1r^2}{4\kappa_2}\right)\left(\gamma+\log\frac{a\sqrt{s}}{2\sqrt{\kappa_2}}\right)-\left(\frac{5\pi a^4\lambda_2}{32\kappa_2^2}-\frac{M_1c_1r^2}{4\kappa_2}\right)\right\}s^3+0(s^4).$$
$$\cdots\cdots (3\,B)$$

ゆえに，$\bar{\theta}_2$ は式 (2B), (3B) に基づきつぎのように求まる。

$$\bar{\theta}_2=\frac{q}{2\pi\lambda_2}\left[\left\{-\frac{1}{2}\log\frac{r^2\beta^2}{4\kappa_2}s\right\}\frac{1}{s}+\left[-\frac{r^2}{8\kappa_2}\log\frac{r^2\beta^2}{4\kappa_2 e^2}s-\frac{a^2}{8\kappa_2}\log\frac{r^2\beta^2}{4\kappa_2}s\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{a^2}{2\kappa_2}-\frac{M_1c_1}{2\pi\lambda_2}\right)\left\{\log a\log r+\frac{1}{2}\log ar\log\frac{\beta^2}{4\kappa_2}s+\frac{1}{4}\left(\log\frac{\beta^2}{4\kappa_2}s\right)^2\right\}\right]+0(s)\right].$$
$$\cdots\cdots (4\,B)$$

ただし

$$\log\beta=\gamma.$$

試料温度 θ_2 は，式 (4B) を (2A) の右辺に代入し，複素積分を計算することによつて求められる。この複素積分の積分路，ならびに収斂性等については，前報* にのべたので，ここで

* 文献 2).

は，その結果を引用して θ_2 を導くに止める。

すなわち，上述の複素積分は，つぎの積分公式

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{Cr} ce^{ts}ds = 0,\\
&\frac{1}{2\pi i}\int_{Cr} \frac{1}{s}\log(cs)\,e^{ts}ds = -\left[\log\frac{t}{c}+\gamma\right],\\
&\frac{1}{2\pi i}\int_{Cr} \log(cs)\,e^{ts}ds = -\frac{1}{t},\\
&\frac{1}{2\pi i}\int_{Cr} \{\log(cs)\}^2 e^{ts}ds = \frac{2}{t}\left[\log\frac{t}{c}+\gamma\right].
\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5\,\mathrm{B})$$

を適用すれば計算できる。ここで，c は常数を表わし，積分路 Cr は，式(2 A)の積分路と等価であり，計算に便利なように選らんだものである。

計算結果はつぎのように表わされる。

$$\theta_2 = \frac{q}{4\pi\lambda_2}\left[\log\frac{4\kappa_2}{r^2}\,t-\gamma+\frac{1}{2t}\left\{\frac{a^2+r^2}{2\kappa_2} + \left(\frac{a^2}{\kappa_2}-\frac{M_1c_1}{\pi\lambda_2}\right)\left(\log\frac{4\kappa_2}{ar}\,t-\gamma\right)\right\}+0\left(\frac{1}{t^2}\right)\right]. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6\,\mathrm{B})$$

上式の右辺に θ_0 を加えたものが求める式(11)となる。