



Title	両端固定梁の横挫屈
Author(s)	久野, 陸夫; Kuno, Rokuo
Citation	北海道大學工學部研究報告, 16, 89-94
Issue Date	1957-06-05
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40609
Type	departmental bulletin paper
File Information	16_89-94.pdf



両端固定梁の横挫屈

久野 陸 夫

(昭和32年2月28日 受理)

Buckling of a Deep Beam Clamped at the Ends

Rokuo KUNO

Abstract

Buckling of a beam clamped at the ends against the horizontal displacement and supported in vertical direction carrying a concentrated load at the middle point is well known. However, the case, when the ends are supported in the horizontal direction and clamped against the vertical displacement, is not solved yet. In this case, the fixing condition at the ends is

$$2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{d\beta}{dz} \frac{du}{dz} dz + \frac{dv}{dz} \Big|_{z=\frac{l}{2}} = 0$$

The critical loads is

$$J_{\frac{1}{4}} \left[KM^2 \right] J_{\frac{3}{4}} \left[K \left(\frac{Pl}{4} - M \right)^2 \right] = J_{-\frac{1}{4}} \left[KM^2 \right] J_{-\frac{3}{4}} \left[K \left(\frac{Pl}{4} - M \right)^2 \right]$$
$$M = \frac{Pl}{8} \quad K^2 = \frac{1}{B_1 C P^2}$$

but, the deformation does not increase so much above this critical load, when the thickness of the beam is small compared with its width. The beam becomes unstable when

$$P_{cr} = \frac{58.3\sqrt{B_1 C}}{l^2}$$

緒 言

著者は数年来帯鋸の切削理論について研究して居るのであるが、帯鋸は上下の鋸車に掛り回転するものであり、帯鋸の鋸車に接しない部分を梁と考えれば、その両端が鋸車に接する所に固定と支持との中間状態になつて居ると考える事が出来る。故に帯鋸の切削力による横挫屈も両端固定梁の横挫屈と両端支持梁の横挫屈との中間状態になるわけである。両端支持で中央に集中荷重のある場合は多くの教科書¹⁾に示されて居るが両端固定梁の場合は研究²⁾が少ない。この様な矩形断面の帯板の横挫屈の問題を解く場合、両端の固定条件を如何に取るかで問題は異なつて来る。固定条件として考え得るのは、

(A) 固定モーメント N の為に $y-z$ 面内の回転を両端で許さない。

(B) 固定モーメント M の為に $x-z$ 面内の回転を両端で許さない。

(C) 引張力 Q を生じて z 方向の移動を両端で許さない。

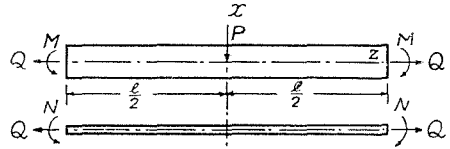


図-1

これ等の条件の中いくつかを満足した場合が両端を固定したと称し得る。教科書に示されて居るのは(A)の条件のみを満足した場合の解¹⁾である。ここでは主として(B)の条件を満足した解について考えて見る。

基本式

問題を簡単にする為集中荷重 P が梁の中心線上の中央に有る矩形断面の梁とし、両端の条件は z 軸のまわり及び $x-z$ 面内の回転を許さないものとし、 z 方向の移動及び $y-z$ 面内の回転は許すものとする。故に

$$N = 0 \quad Q = 0$$

この様な場合の横撓屈の約合条件式は次の如くである。但し原点は板の中心に取る。

$$\left. \begin{aligned} B_1 \frac{d^2 u}{dz^2} &= \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right) \beta - M \beta \\ B_2 \frac{d^2 v}{dz^2} &= - \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right) + M \\ C \frac{d\beta}{dz} &= - \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right) \frac{du}{dz} + M \frac{du}{dz} + \frac{P}{2} (\delta - u) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

u : 帯板の y 方向の変位 ($\delta = u_{,ax}$)

v : 帯板の x 方向の変位

β : 帯板の捩れ角

b : 帯板の厚さ

h : 帯板の巾

E : 縦弾性係数

G : 横弾性係数

$$B_1 = \frac{hb^3}{12} E \quad B_2 = \frac{bh^3}{12} E \quad C = \frac{hb^3}{3} G$$

問題を解く為には、この微分方程式を直接解くか又はエネルギー法でも解く事が出来る。その為には(1)の第1式に $\frac{d^2 u}{dz^2}$ を両辺に掛けて積分すると

$$\int_0^{\frac{l}{2}} B_1 \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 dz = \frac{P}{2} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{l}{2} - z \right) \beta \frac{d^2 u}{dz^2} dz + M \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{d\beta}{dz} \frac{du}{dz} dz$$

第2式の両辺に $\frac{d^2v}{dz^2}$ を掛けて積分すると

$$\int_0^{\frac{l}{2}} B_2 \left(\frac{d^2v}{dz^2} \right)^2 dz = + \frac{P}{2} v_{z=0} + M \frac{dv}{dz_{z=\frac{l}{2}}}$$

第3式を z で微分して β を掛けて積分すれば

$$\int_0^{\frac{l}{2}} C \left(\frac{d\beta}{dz} \right)^2 dz = + \frac{P}{2} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{l}{2} - z \right) \frac{d^2u}{dz^2} \beta dz + M \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{d\beta}{dz} \frac{du}{dz} dz$$

以上3つの式を合計すれば

$$\begin{aligned} & B_1 \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{d^2u}{dz^2} \right)^2 dz + B_2 \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{d^2v}{dz^2} \right)^2 dz + C \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{d\beta}{dz} \right)^2 dz \\ & = P \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{l}{2} - z \right) \beta \frac{d^2u}{dz^2} dz + \frac{P}{2} v_{z=0} + 2M \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{d\beta}{dz} \frac{du}{dz} dz + M \frac{dv}{dz_{z=\frac{l}{2}}} \end{aligned} \quad (2)$$

左辺は曲げ及び振りの両歪エネルギーであり、右辺は P 及び M のした仕事になる。右辺第1項の積分値は横撓屈を生じたが為に荷重点が下る距離である。第3項の積分値は横撓屈を起した為に両端が傾く角度になる。これは帯板の上縁と下縁との撓み曲線の長さの差を求めて見ると

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \left\{ \frac{d}{dz} \left(u + \frac{h}{2} \beta \right) \right\}^2 - \left\{ \frac{d}{dz} \left(u - \frac{h}{2} \beta \right) \right\}^2 dz = 2h \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{du}{dz} \frac{d\beta}{dz} dz$$

故に傾斜角は $2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{du}{dz} \frac{d\beta}{dz} dz$ になる。

結局微分方程式(1)を解きその両端条件として

$$\left. \begin{aligned} z = \frac{l}{2} \quad & u = 0, \quad \frac{d^2u}{dz^2} = 0, \quad \beta = 0, \\ & 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{d\beta}{dz} \frac{du}{dz} dz + \frac{dv}{dz_{z=\frac{l}{2}}} = 0 \\ z = 0 \quad & \frac{d\beta}{dz} = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0, \quad u = \delta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

を満足すればよいわけである。

計 算

最初に両端即ち $z = \frac{l}{2}$ で傾斜しないと云う条件
即ち

$$2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{d\beta}{dz} \frac{du}{dz} dz + \frac{dv}{dz_{z=\frac{l}{2}}} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

を除いて考える。微分方程式の解は $1/B_1CP^2 = K^2$ と置く事によつて

$$\begin{aligned} \beta &= A\sqrt{M-\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2}-z\right)}J_{\frac{1}{4}}\left[K\left\{M-\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2}-z\right)\right\}^2\right] \\ &\quad + B\sqrt{M-\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2}-z\right)}J_{-\frac{1}{4}}\left[K\left\{M-\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2}-z\right)\right\}^2\right], \quad M-\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2}-z\right) > 0 \\ \beta &= A'\sqrt{\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2}-z\right)-M}J_{\frac{1}{4}}\left[K\left\{\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2}-z\right)-M\right\}^2\right] \\ &\quad + B'\sqrt{\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2}-z\right)-M}J_{-\frac{1}{4}}\left[K\left\{\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2}-z\right)-M\right\}^2\right], \quad M-\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2}-z\right) < 0 \end{aligned}$$

この式に上の両端条件を入れれば $Pl/4 > M > 0$ の場合には

$$J_{\frac{1}{4}}\left[KM^2\right]J_{\frac{3}{4}}\left[K\left(\frac{Pl}{4}-M\right)^2\right] = J_{-\frac{1}{4}}\left[KM^2\right]J_{-\frac{3}{4}}\left[K\left(\frac{Pl}{4}-M\right)^2\right] \dots\dots\dots (5)$$

その他の場合には

$$J_{\frac{1}{4}}\left[KM^2\right]J_{\frac{3}{4}}\left[K\left(M-\frac{Pl}{4}\right)^2\right] = -J_{-\frac{1}{4}}\left[KM^2\right]J_{-\frac{3}{4}}\left[K\left(M-\frac{Pl}{4}\right)^2\right] \dots\dots\dots (6)$$

これ等の式は中央に集中荷重 P がかり、両端にモーメント M がかかる場合の条件式である。故に両端が支持されて居る場合は $M=0$ であるから

$$J_{-\frac{3}{4}}\left[K\left(\frac{Pl}{4}\right)^2\right] = 0 \quad P_{cr} = 16.94\frac{\sqrt{B_1C}}{l^2}$$

のよく知られた値となり、又中央に集中荷重なく両端にモーメント M のみ働く場合には、 P が 0 に近づく為 K が極めて大きくなるからベッセル函数の漸近数の第 1 項のみを取つて

$$\begin{aligned} \lim_{P \rightarrow 0} \cos\left\{KM^2 - K\left(M - \frac{Pl}{4}\right)^2\right\} &= 0 \\ M &= \pm \frac{\pi\sqrt{B_1C}}{l} \end{aligned}$$

のよく知られた値になる。

図-2 は (5) 式, (6) 式を図示したものである。上に示した値が円で示して有り、ループの中が安定領域であり、ループの外が不安定領域である。

次に (4) の条件式即ち両端 $z = \frac{l}{2}$ で傾斜しないと云う条件を加えて考えると中央の集中荷重が小さい間は、両端の固定モーメント M は $M = \frac{Pl}{8}$ の関係にしたがつて変化し、 P を増せば単純な曲げが矢印の方向に進行し安定領域内

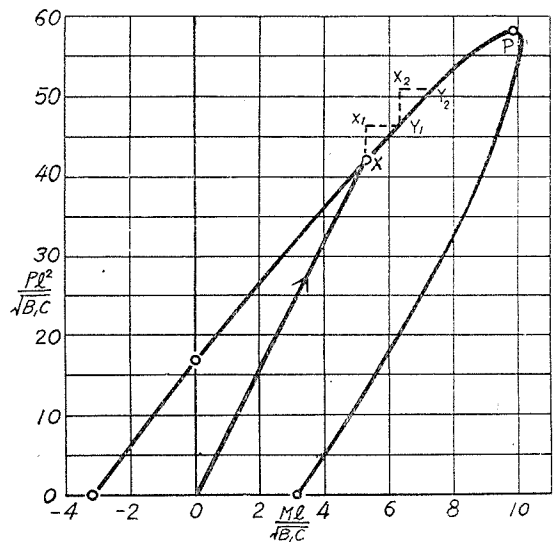


図-2

で曲げは安定に進行する。遂に荷重 P が X 点即ち

$$P = 42.3 \frac{\sqrt{B_1 C}}{l^2} \dots\dots\dots (7)$$

に達すると、これ以上この直線にそつて進行することは不安定領域に入るために不可能であり横撓屈を起す事になる。しかしながら(5)(6)の横撓屈の条件式は横撓屈を起してしまつても成立すると考えられるから、此の如く横撓屈を起してもこの曲線上の点で示される M と P との関係になるわけである。即ち横撓屈を起し初めるならば、横撓屈の為に両端に生ずる傾斜角 $2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{du}{dz} \frac{d\beta}{dz} dz$ は増大し初めなければならぬ筈であるが、両端が固定されて居る為に自由には増大する事が出来ずに、その代りとして固定モーメント M が増大する。故に集中荷重が X_1 なる場合は固定モーメント Y_1 なる値になつて釣合を保つ筈である。集中荷重が X_2 なる場合は固定モーメント Y_2 で釣合を保つ。この釣合を保つ点は条件式(4)を計算して見ると

$$\frac{4A^2}{\pi^2 P B_1 K^{\frac{2}{3}}} \left[\frac{1}{(KM^2)^{\frac{1}{2}} \left[J_{-\frac{1}{4}}(KM^2) \right]^2} - \frac{1}{\left[K \left(\frac{Pl}{4} - M \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[J_{\frac{1}{4}} \left\{ K \left(\frac{Pl}{4} - M \right)^2 \right\} \right]^2} \right] + \frac{l}{2B_2} \left(M - \frac{Pl}{8} \right) = 0 \dots\dots\dots (8)$$

で示される値となる。此の如く梁は横撓屈を起しては居るが釣合状態を保ちつつ進行し、 P が最大点 P_{max} に達した時に遂に本当に撓屈するのである。この P_{max} を求める為には(5)式を M で微分して $\frac{dP}{dM} = 0$ と置く事によつて求まる。

$$\frac{\frac{Pl}{4} - M}{M} = \frac{\left[J_{-\frac{1}{4}} \{ KM^2 \} \right]^2}{\left[J_{\frac{1}{4}} \left\{ K \left(\frac{Pl}{4} - M \right)^2 \right\} \right]^2} = \frac{\left[J_{\frac{1}{4}} \{ KM^2 \} \right]^2}{\left[J_{-\frac{1}{4}} \left\{ K \left(\frac{Pl}{4} - M \right)^2 \right\} \right]^2} \dots\dots\dots (9)$$

この式を補間法で計算すると

$$P_{cr} = \frac{58.3 \sqrt{B_1 C}}{l^2}$$

$$M_{cr} = \frac{9.81 \sqrt{B_1 C}}{l}$$

この値は(8)式について考えて見ると A が有限な間は横撓屈を起しても釣合を保つけれども A が無限大になれば不安定で釣合を保つ事は出来ない。故にこの様な不安定になる条件式は(8)から

$$\frac{1}{(KM^2)^{\frac{1}{2}} \left[J_{-\frac{1}{4}}(KM^2) \right]^2} - \frac{1}{\left[K \left(\frac{Pl}{4} - M \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[J_{\frac{1}{4}} \left\{ K \left(\frac{Pl}{4} - M \right)^2 \right\} \right]^2} = 0$$

即ちその元の積分の形

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{du}{A^2 dz} \frac{d\beta}{dz} dz = 0$$

である事がわかる。この式で(9)と同じ条件を得る。

故にこの様な場合の横挫屈は「二つの異なつた変形様式が有り何れも釣合状態が成立する場合の分岐点を以て挫屈荷量を定義する」ならば X 点即ち(7)式が挫屈荷重を示す事になるが、この点を超えても厚さに比して巾が広い場合には撓みは極めて微量なわけであり、普通の如く挫屈荷重を超えると急に撓みが増すと云う様な事はない。そして遂に P_{\max} に達して急に撓みは増加しあたかもこの点で挫屈したかの如くなる。これは帯板の厚さ巾が異なつて居る場合挫屈を起し 図-2 の曲線上の或る一点に来た場合、即ち同じ $\frac{Pl^2}{\sqrt{B_1 C}}$, $\frac{Ml}{\sqrt{B_1 C}}$ に来た場合の β は $\sqrt{\frac{B_1}{B_2}}$ に比例する事が証明出来るからである。

以上と同じ傾向は条件(A)(B)を共に満足する様な場合に於いても生ずる筈である。

しかし(C)の条件が更に加わつた場合に於いては中心線が延びないとするならば挫屈は有り得ない事になり、中心線が延びるとするならば、挫屈を起せば引張力 Q はどれ程でも増大し得るから上の如く不安定になる場合はないが、やはり $Q=0$ として解いた値が二つの変形様式に分岐点であるから例えば(5)(6)が条件式である。

結 論

帯板の両端をその面内で固定した場合の横挫屈を解くときの両端の条件は(3)式である。この条件を用い帯板の中心軸の中心に集中荷重が有る場合で面に直角の方向には両端が支持されて居る場合の解は次の如くである。

$$J_{\frac{1}{2}} \left[KM^2 \right] J_{\frac{3}{4}} \left[K \left(\frac{Pl}{4} - M \right)^2 \right] = J_{-\frac{1}{4}} \left[KM^2 \right] J_{-\frac{3}{4}} \left[K \left(\frac{Pl}{4} - M \right)^2 \right]$$

$$M = \frac{Pl}{8}$$

この時横挫屈を起し初めるが、厚さの割合に巾の広い場合にはその為に生ずる変形は少なく本當に不安定になるのは(9)式である。即ち

$$P_{cr} = \frac{58.3\sqrt{B_1 C}}{l^2}$$

$$M_{cr} = \frac{9.81\sqrt{B_1 C}}{l}$$

文 献

- 1) チモシェンコ：挫屈理論(邦訳)(162~172頁)。
- 2) 長柱研究委員会：弾性安定要覧(182頁)。