HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	高周波表面焼入れにおける歯車の温度分布
Author(s)	黒部, 貞一; 桜庭, 一郎
Citation	北海道大學工學部研究報告, 17, 197-202
Issue Date	1957-12-20
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40616
Type	departmental bulletin paper
File Information	17_197-202.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

高周波表面焼入れにおける歯車の温度分布

黒　部　貞　一
桜　庭　一　郎
(昭和32年9月27日 受理)

Temperature Distribution in Gear for Surface Hardening by High Frequency

Teiichi KUROBE
Ichiro SAKURABA

Abstract

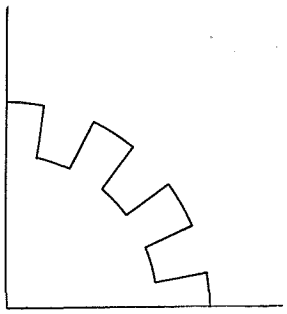
When one hardens the surface of the gear by high frequency, it is very difficult to harden uniformly each parts of top, bottom and side. Authors solved theoretically the temperature distribution in the gear and made a measure for the surface hardening of the gear. But it is so difficult to solve generally this problem that authors solved the temperature distribution at stationary state using Schwarz-Christoffel's transformation to simplify. Next the temperature gradient on the surface of the gear was obtained. The depths of the hardening are thick at the top and thin at the bottom and the side. The temperature gradients on the surface are small at the top. large at the bottom and the side and very large at the edge of the bottom.

1. 緒　　論

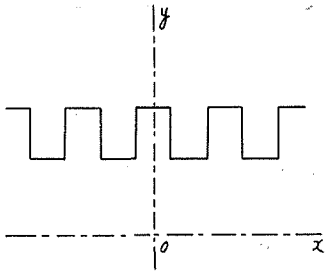
近時，高周波を用いた表面焼入れが盛んに行なわれる様になつたが，歯車にこれを用いた場合，歯の山の部分，谷の部分及び側面を総て一様の厚さに焼入れすることは極めて困難である。そこで著者は歯車の内部の温度分布が如何になるであろうかを理論的に求め，歯車の高周波焼入れに対して一つの目安すを与えた。しかし，この問題を一般的に解くことは極めて困難であるので簡単のため定常状態における温度分布，すなわち，温度が時間に対して無関係になつた時の温度分布を求めた。すなわち，ラプラスの方程式が成り立つものとした。又，歯車の表面の温度は一定とした。これらの仮定は歯車の表面の温度が低い間は成立しないが，充分高い温度特にキューリー点以上においては大体成り立つものと思われる。

2. 理　　論

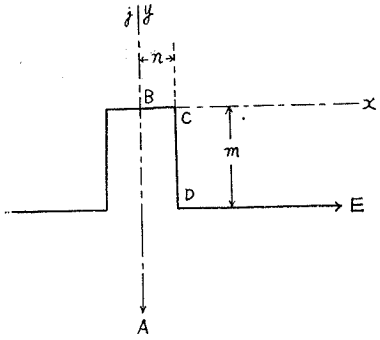
今，歯車の側面が第1図の如く半径方向であるとし，



第1図 歯 の 形



第2図 第1図を対数変換した形



第3図 第2図を簡単化した形

$$\left.\begin{aligned} x &= A\theta \\ y &= A\log r \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

なる変換を施せば第1図は第2図の如くなる。ただし A は任意の定数である。この場合，温度分布は定常状態に達した時の問題であり，歯の山の隣同志の影響は省略した。すなわち第3図の如き形に簡単化し，これに等角写像法を利用して解いた。ただし以下の記号は次の意味を持つている。

sn, cn, dn: k を母数とする Jacobi の楕円函数

$$\pi(\zeta,\ a)=\int_0^{\zeta}\frac{k^2\,sn\,a\cdot cn\,a\cdot dn\,a\cdot sn^2\zeta}{1-k^2sn^2\zeta\,sn^2a}\,d\zeta$$

: k を母数とする Jacobi の楕円積分

$Z_n(a)=E(\varphi)-Ea/K$: Jacobi の Zeta 函数

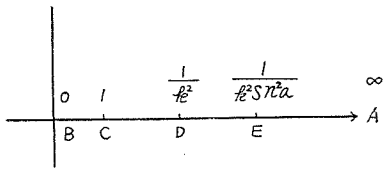
K, K': それぞれ k 及び k' を母数とする第一種完全楕円積分

$E(\varphi)$, E: k を母数とする第二種楕円積分及び第二種完全楕円積分

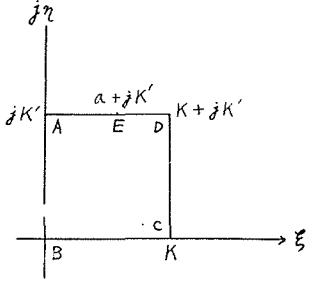
今，媒介平面として第4図如き t 平面を考える。ただし k, a は第3図の m 及び n によつて定まる定数である。今，Schwarz-Christoffel の変換を施せば

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{C_1}{t^{\frac{1}{2}}(t-1)^{\frac{1}{2}}\left(t-\frac{1}{k^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(t-\frac{1}{k^2sn^2a}\right)} \\ &= -C_1\,k\,sn^2a\sqrt{\frac{1-k^2t}{t(1-t)}}\cdot\frac{1}{1-tk^2sn^2a}\end{aligned} \qquad (2)$$

$t=sn^2\zeta$ とおけば ζ 平面は第5図の如くなる。



第4図 t 平 面



第5図 ζ 平 面

$$\frac{dz}{d\zeta} = -C_1 ksn^2 a \frac{dn^2\zeta}{1-k^2sn^2asn^2\zeta} \tag{3}$$

$M=-C_1 ksn^2 a$ とおけば

$$\frac{dz}{d\zeta} = M\frac{dn^2\zeta}{1-k^2sn^2asn^2\zeta} = M\left(1-\frac{cna}{sna\cdot dna}\cdot\frac{cna\cdot sna\cdot dna\cdot k^2sn^2\zeta}{1-k^2sn^2asn^2\zeta}\right)$$

故に

$$Z = M\left\{\zeta-\frac{cna}{sna\cdot dna}\Pi(\zeta, a)\right\} \tag{4}$$

次に M を決定するために，C 点に就いて考える。C 点においては $z=n$, $\zeta=K$, $\Pi(K, a)=KZ_n(a)$ なる故

$$n = MK\left[1-\frac{cna}{sna\cdot dna}Z_n(a)\right]$$

故に

$$M = \frac{n}{K\left[1-\frac{cna}{sna\cdot dna}Z_n(a)\right]} \tag{5}$$

故に

$$z = \frac{n}{K\left[1-\frac{cna}{sna\cdot dna}Z_n(a)\right]}\left[\zeta-\frac{cna}{sna\cdot dna}\Pi(\zeta, a)\right] \tag{6}$$

次に n/m を決定するために D 点に就いて考える。D 点においては $z=n+jm$, $\zeta=K+jK'$ 故に

$$\pi(K+jK', a) = KZ_n(a)+j[K'Z_n(a)+a\pi/2K]$$

故に

$$n+jm = MK\left\{1-\frac{cna}{sna\cdot dna}Z_n(a)\right\}+jM\left[K'-\frac{cna}{sna\cdot dna}\left\{K'Z_n(a)+\frac{a\pi}{2K}\right\}\right]$$

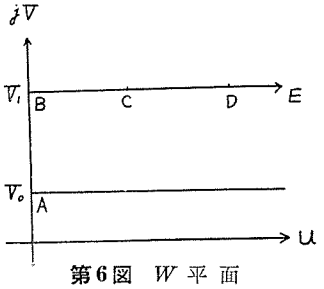
故に

$$m = M\left[K'-\frac{cna}{sna\cdot dna}\left\{K'Z_n(a)+\frac{a\pi}{2K}\right\}\right] \tag{7}$$

故に

$$\frac{n}{m} = \frac{K\{1-cna\cdot Z_n(a)/sna\cdot dna\}}{K'-\frac{cna}{sna\cdot dna}\left\{K'Z_n(a)+\frac{a\pi}{2K}\right\}} \tag{8}$$

今，歯車の表面は一定温度 V_1，歯車の中心は温度 V_0 とれば，$W=U+jV$ 平面（U: 熱流，V: 温度）は第6図の如くなる。W 平面を t 平面に就て Schwarz-Christoffel の変



第6図 W 平面

換を行えば

$$\frac{dW}{dt} = \frac{C_1'}{t^{\frac{1}{2}}(t-1/k^2sn^2a)} \tag{9}$$

故に

$$W = C_1' \log \frac{1+ksna\sqrt{t}}{1-ksna\sqrt{t}} + C_2' \tag{10}$$

C_2' を決定するために B 点に就いて考えれば，$W=jV_1$, $t=0$

故に

$$C_2' = jV_1 \tag{11}$$

C_1' を決定するために A 点に就いて考えれば，$W=jV_0$, $t=\infty$

故に

$$jV_0 = C_1' \log(-1) + C_2' = jC_1'\pi + jV_1$$

故に

$$C_1' = (V_0-V_1)/\pi \tag{12}$$

故に

$$W = \frac{V_0-V_1}{\pi} \log\left(\frac{1+ksna\cdot sn\zeta}{1-ksna\cdot sn\zeta}\right) + jV_1 \tag{13}$$

以上の結果，任意の点の温度分布を計算することができる。

次に温度勾配 G は $G=-\mathrm{grad}\, V$ なる故

$$G = -\mathrm{grad}\, V = j\overline{\frac{dW}{dz}} \tag{14}$$

ただし $j\overline{\frac{dW}{dz}}$ は $j\frac{dW}{dz}$ の共軛函数である。

計算の結果，G は

$$G = \frac{2(V_1-V_0)}{\pi} k^2sn^2a\left[\frac{sn\xi\cdot\overline{cn\eta}\cdot\overline{sn\eta}\,(k^2cn^2\xi - dn^2\xi\cdot\overline{dn^2\eta})}{(dn\xi\cdot cn\eta\cdot dn\eta)^2}\right.$$
$$\left.\frac{+jcn\xi\cdot dn\xi\cdot\overline{dn\eta}\,(\overline{cn^2\eta}+k^2sn^2\xi\cdot\overline{sn^2\eta})}{+(k^2sn\xi\cdot cn\xi\cdot\overline{sn\eta})^2}\right] \tag{15}$$

ただし $\overline{sn\eta}$ $\overline{cn\eta}$ $\overline{dn\eta}$ $\overline{sn^2\eta}$ $\overline{cn^2\eta}$ $\overline{dn^2\eta}$ はそれぞれ $sn(\eta_1k')$ $cn(\eta_1k')$ $dn(\eta_1k')$ $sn^2(\eta_1k')$ $cn^2(\eta_1k')$ $dn^2(\eta_1k')$ のことである。

今，$x=0$, $y=0$ すなわち $\xi=0$, $\eta=0$ の点の G を G_0 とすれば

$$G_0 = j2(V_1-V_0)k^2sn^2a/\pi \tag{16}$$

この G_0 を用いて，歯車表面の温度勾配を求めれば

BC 間においては

$$G = G_0[cn\xi/dn\xi] \tag{17}$$

CD 間においては

$$G = G_0 [j\,sn\eta/cn\eta] \tag{18}$$

DE 間においては

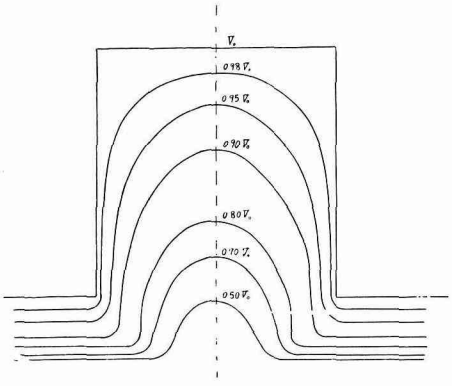
$$G = G_0 [k' dn\xi/sn\xi \cdot cn\xi] \tag{19}$$

3. 数 値 例

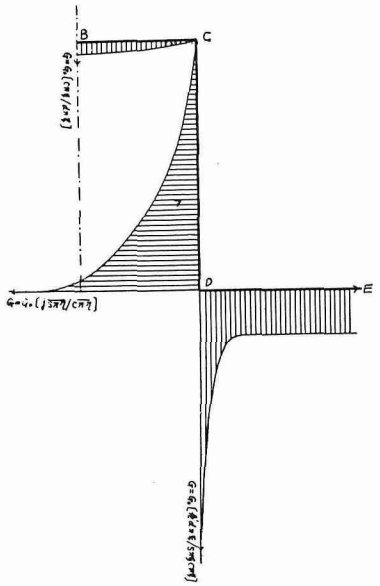
今，$k=0.1$，$a=1.3$ とすれば，(8)式より $n/m=0.475$ となり，この時の温度分布は第7図の如くなつた。図において，V_0，$0.98\,V_0$，$0.90\,V_0$，$0.80\,V_0$，$0.70\,V_0$，0.50_0 はそれぞれ等温線である。

又，この時の歯車表面の温度勾配は第8図の如くなつた。

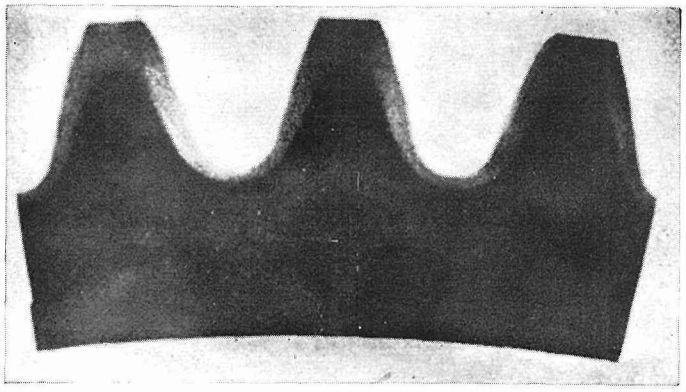
実際の歯車の焼入れの一例は第9図の如くであり[1]，これは第7図及び第8図の状態と大体同様の結果を示し



第7図 歯車の温度分布



第8図 歯車の表面温度勾配



第9図 実際の歯車の高周波表面焼入れの例

ている。すなわち焼入れの厚さは山の部分では厚く，谷の部分及び側面の谷に近い部分は薄くなつている。

実際に焼入れする場合は，山の部分は谷の部分に比し加熱コイルとの間隙が小である故，表面電密度が大で早く焼けるが，定常状態においては表面の色が同程度になることから，大体等温度に達していると考えられる。

以上の結果，第3図の形の温度分布が決定したので，(1)式によつて第3図を第1図の形に変換すれば，第1図の場合の温度分布が決定する。

4. 結　　言

歯車を高周波表面焼入れする場合の定常状態における温度分布を Schwarz-Christoffel の変換を用いて解き，又表面の温度勾配をも求めた。更に実際の例に就いて，数値計算を行なつた。これらの結果は実際の場合とほぼ同様であつた。すなわち山の部分は温度勾配が小で，焼入れ厚さは厚く，谷の部分及び谷に近い側面は温度勾配が大で焼入れ厚さは薄く，特に谷の角は甚だしい。これらの結果は歯車の高周波表面焼入れに対して，一つの理論的根拠を与えた。

終りに臨み御指導御鞭撻を頂いた本学浅見義弘教授に深謝する。

文　　献

1) Electronic Engineers of the Westinghouse Electric Co.: Industrial Electronic Reference Book p. 428, 1948, John Willey & Sons.