



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	四円弧を周辺とする断面をもつ棒の振りについて
Author(s)	浜吉, 福治; Hamayoshi, Fukuji
Citation	北海道大學工學部研究報告, 18, 27-33
Issue Date	1958-05-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40628
Type	departmental bulletin paper
File Information	18_27-34.pdf



四円弧を周辺とする断面をもつ 棒の振りについて

浜 吉 福 治
(昭和33年2月28日受理)

On the Torsion of a Bar which has a Quadri-Circular Cross-Section

Fukuji HAMAYOSHI

Abstract

The torsion problems of a straight bar whose cross-section has one or two circular notches have been solved hitherto. In this paper, one solution of the torsion problems about the bar with a cross-section which has arbitrary four-circular boundaries is obtained, thus including the solution of the above special problem also. In the process, the conjugate torsion function in the bipolar co-ordinates is applied, expanding it in Fourier's series.

As an example, the problem for the shearing stress and shearing moment of a bar with a cross-section which has double circular notches are treated.

緒 言

直線軸を有し二円弧又は三円弧よりなる断面を持つ棒の振りについては、古くより理論的に研究されている。例えば岩藤氏¹⁾、鶴戸口氏²⁾、宮尾氏³⁾等々であるが、表題の如く四円弧を断面の周辺とする棒の振りを双曲座標を用いて解析し、そのうち二重切欠をもつ丸棒の場合について、数値計算により切欠の大きさの変化に対する最大剪断応力の変化を調べた。

I. 基 礎 式

振りの函数である ϕ の共軛函数 ψ を用いると断面内の到るところで

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \beta^2} = 0 \quad (1)$$

(x, y は直角座標, a, β は双曲座標を示す)

周辺において

$$\psi = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \text{const} \quad (2)$$

を満足する ψ が求められると断面内の任意点の剪断応力 τ_a, τ_β は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_\alpha &= G\theta h \left[\frac{\partial \psi}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) \right] \\ \tau_\beta &= G\theta h \left[-\frac{\partial \psi}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

但し τ_α, τ_β はそれぞれ a, β 曲線の垂直方向の剪断応力とし、便宜上 a 及び β の増大方向を正にとる。 G は剛性係数、 θ は単位振り角、 h は写像縮小率で (4) 式で与えられる。

$$h = \frac{\cosh a - \cos \beta}{a} \quad (4)$$

振りモーメント M は振り応力函数 Ψ を用いると

$$M = 2 \int \Psi df \quad (5)$$

ここに

$$\Psi = G\theta \left(\psi - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) \quad (6)$$

$$df = \frac{1}{h^2} da d\beta \quad (7)$$

II. 双曲座標による写像

写像函数として次で表わされる双曲座標をとる。

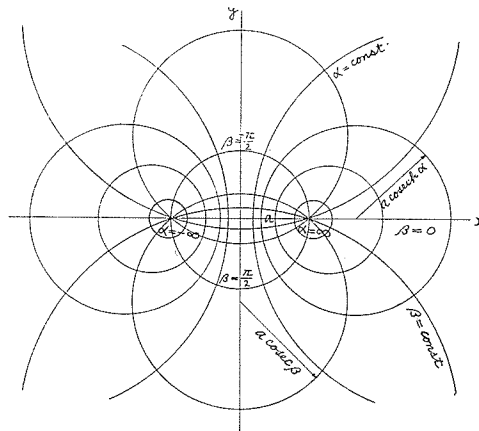
$$x + iy = a \coth \frac{1}{2} (a + i\beta) \quad (8)$$

これより

$$x = \frac{a \sinh a}{\cosh a - \cos \beta} \quad y = \frac{-a \sin \beta}{\cosh a - \cos \beta} \quad (9)$$

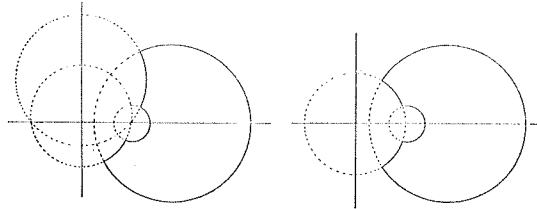
$$\left. \begin{aligned} (x - a \coth a)^2 + y^2 &= a^2 \operatorname{cosech}^2 a \\ x^2 + (y + a \cot \beta)^2 &= a \operatorname{cosec}^2 \beta \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

を得る。

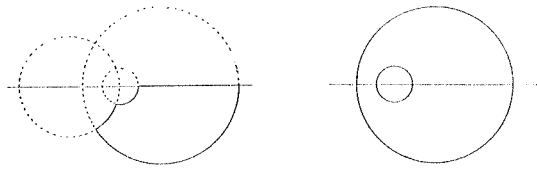


第 1 図

第2図における如く $a = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ のそれぞれ二組の円弧により各種の四円弧形断面が表わされる。



第2図 (a)



第2図 (b)

III. 函数及び振り応力

(2)式の境界条件を双曲座標 a , β で表わすと次になる。

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{a^2}{2} \left(1 + \frac{2 \cos \beta}{\cosh a - \cos \beta} \right) \quad (11)$$

によつて(2)式の const を $-a^2/2$ にとると境界条件式は

$$\psi = a^2 \frac{\cos \beta}{\cosh a - \cos \beta} \quad (12)$$

となる。これを用いると断面の周辺に対する境界条件は

$$a = a_1 : \psi = \frac{a^2 \cos \beta}{\cosh a_1 - \cos \beta} \quad (13)$$

$$a = a_2 : \psi = \frac{a^2 \cos \beta}{\cosh a_2 - \cos \beta} \quad (14)$$

$$\beta = \beta_1 : \psi = \frac{a^2 \cos \beta_1}{\cosh a - \cos \beta_1} \quad (15)$$

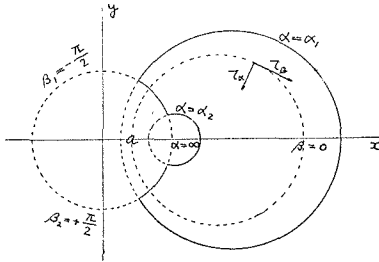
$$\beta = \beta_2 : \psi = \frac{a^2 \cos \beta_2}{\cosh a - \cos \beta_2} \quad (16)$$

となる。故に微分方程式(1)を満足する ψ として次の形をとる。

$$\begin{aligned}
\psi = & \frac{2}{\beta_2 - \beta_1} \sum_{n=1,2,\dots} \left[\sin \frac{n\pi(\beta - \beta_1)}{\beta_2 - \beta_1} \left\{ \frac{\sinh \frac{n\pi}{\beta_2 - \beta_1} (a_2 - a)}{\sinh \frac{n\pi(a_2 - a_1)}{\beta_2 - \beta_1}} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{a^2 \cos \beta}{\cosh a_1 - \cos \beta} \sin \frac{n\pi(\beta - \beta_1)}{\beta_2 - \beta_1} d\beta \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\sinh \frac{n\pi(a - a_1)}{\beta_2 - \beta_1}}{\sinh \frac{n\pi(a_2 - a_1)}{\beta_2 - \beta_1}} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{a^2 \cos \beta}{\cosh a_1 - \cos \beta} \sin \frac{n\pi(\beta - \beta_1)}{\beta_2 - \beta_1} d\beta \right\} \right] \\
& + \frac{2}{a_2 - a_1} \sum_{n=1,2,\dots} \left[\sin \frac{n\pi(a - a_1)}{a_2 - a_1} \left\{ \frac{\sinh \frac{n\pi}{a_2 - a_1} (\beta_2 - \beta)}{\sinh \frac{n\pi(\beta_2 - \beta_1)}{a_2 - a_1}} \int_{a_1}^{a_2} \frac{a^2 \cos \beta_1}{\cosh a - \cos \beta_1} \sin \frac{n\pi(a - a_1)}{a_2 - a_1} da \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\sinh \frac{n\pi(\beta - \beta_1)}{a_2 - a_1}}{\sinh \frac{n\pi(\beta_2 - \beta_1)}{a_2 - a_1}} \int_{a_1}^{a_2} \frac{a^2 \cos \beta_2}{\cosh a - \cos \beta_2} \sin \frac{n\pi(a - a_1)}{a_2 - a_1} da \right\} \right] \quad (17)
\end{aligned}$$

(17) 式は上記の四つの境界条件を満足するから第 2 図の如き各種断面形に対する ψ が直ちに求められる。

例として第 3 図の断面について解いてみると周辺は



第 3 図

$$\left. \begin{aligned} a &= a_1 \\ a &= a_2 \\ \beta &= \beta_1 = -\frac{\pi}{2} \\ \beta &= \beta_2 = \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

で表わされる。これらを (17) 式に代入すると

$$\begin{aligned}
\psi = & \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,2,\dots} \left[\sin n \left(\beta + \frac{\pi}{2} \right) \left\{ \frac{\sinh n(a_2 - a)}{\sinh n(a_2 - a_1)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \cos \beta}{\cosh a_1 - \cos \beta} \sin n \left(\beta + \frac{\pi}{2} \right) d\beta \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\sinh n(a - a_1)}{\sinh n(a_2 - a_1)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \cos \beta}{\cosh a_2 - \cos \beta} \sin n \left(\beta + \frac{\pi}{2} \right) d\beta \right\} \right] \\
= & \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,2,\dots} \left[\cos n\beta \left\{ \frac{\sinh n(a_2 - a)}{\sinh n(a_2 - a_1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \cos \beta}{\cosh a_1 - \cos \beta} \cos n\beta d\beta \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\sinh n(a - a_1)}{\sinh n(a_2 - a_1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \cos \beta}{\cosh a_2 - \cos \beta} \cos n\beta d\beta \right\} \right] \quad (19)
\end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \beta}{\cosh a_1 - \cos \beta} \cos n\beta da &= \sum_{m=1,2,\dots} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos \beta}{\cosh a_1} \right)^m \cos n\beta d\beta \\
&= \sum_{m=1,2,\dots} \frac{P_{m,n}}{\cosh^m a_1} \quad (20)
\end{aligned}$$

ここに

$$P_{m,n}^{\omega} = \frac{\pi}{2^{m+1}} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{m-n}{2}+1\right)} \quad (21)$$

但し $\Gamma(m)$ はガンマ函数を表わす。

(20) 式より

$$A_n = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{P_{m,n}}{\cosh^m a_1} \quad (22)$$

同様に $a = a_2$ の場合には

$$B_n = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{P_{m,n}}{\cosh^m a_2} \quad (23)$$

と定めると、 ϕ は次のように整理される。

$$\phi = \frac{4a^2}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left[\cos n\beta \frac{A_n \sinh n(a_2 - a) + B_n \sinh n(a - a_1)}{\sinh n(a_2 - a_1)} \right] \quad (24)$$

従つて (3) 式より τ_a , τ_β が求められる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_a &= G\theta a \left[-\frac{4}{\pi} (\cosh a - \cos \beta) \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} n \sin n\beta \frac{A_n \sinh n(a_2 - a) + B_n \sinh n(a - a_1)}{\sinh n(a_2 - a_1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cosh a \sin \beta}{\cosh a - \cos \beta} \right] \\ \tau_\beta &= G\theta a \left[\frac{4}{\pi} (\cosh a - \cos \beta) \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} n \cos n\beta \frac{A_n \cosh n(a_2 - a) - B_n \cosh n(a - a_1)}{\sinh n(a_2 - a_1)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sinh a \cos \beta}{\cosh a - \cos \beta} \right] \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

IV. 振りモーメント

(5) 式に (24), (6), (7) を代入して次式をえられる。

$$\begin{aligned} \frac{M}{4G\theta a^3} &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \cos n\beta \frac{A_n \sinh n(a_2 - a) + B_n \sinh n(a - a_1)}{\sinh n(a_2 - a_1)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos \beta}{\cosh a - \cos \beta} \right\} \frac{da d\beta}{(\cosh a - \cos \beta)^2} \\ &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{D_n e^{n\alpha} + E_n e^{-n\alpha}}{(\cosh a - \cos \beta)^2} \cos n\beta - \frac{\cos \beta}{(\cosh a - \cos \beta)^3} \right\} da d\beta \quad (26) \end{aligned}$$

但し

$$\left. \begin{aligned} D_n &= (B_n e^{-n\alpha_1} - A_n e^{-n\alpha_2}) / \sinh n(a_2 - a_1) \\ E_n &= (A_n e^{n\alpha_2} - B_n e^{n\alpha_1}) / \sinh n(a_2 - a_1) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

(26) 式の第 1 項, 第 2 項をそれぞれ I_1 , I_2 とする。

I_1 について

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos n\beta}{\cosh a - \cos \beta} d\beta = \sum_{m=0,1,2}^{\infty} \frac{P_{m,n}}{\cosh^{m+1} a}$$

この式の両辺を a で微分して次式を得る。

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos n\beta}{(\cosh - \cos \beta)^2} d\beta &= \sum_{m=0,1,2}^{\infty} (m+1) \frac{P_{m,n}}{\cosh^{m+2} a} \\ &= \sum_{m=0,1,2}^{\infty} 2^{m+2} (m+1) \frac{P_{m,n}}{(e^a + e^{-a})^{m+2}} \end{aligned} \quad (28)$$

また一方

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{n\alpha}}{(e^\alpha + e^{-\alpha})^{m+2}} d\alpha &= \int e^{(n-m-2)\alpha} (1+e^{-2\alpha})^{-m-2} d\alpha \\ &= \int \sum_{r=0}^{\infty} (-1)_{m+1+r} C_r e^{(n-m-2r-2)\alpha} d\alpha \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)_{m+1+r} C_r \frac{e^{(n-m-2r-2)\alpha}}{(n-m-2r-2)} \end{aligned} \quad (29)$$

を得る。

同様にして

$$\int \frac{e^{-n\alpha}}{(e^\alpha + e^{-\alpha})^{m+2}} d\alpha = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)_{m+1+r} C_r \frac{e^{-(n+m+2r+2)\alpha}}{(n+m+2r+2)} \quad (30)$$

ここに ${}_r C_q$ は二項係数を表わす。

(28), (29), (30) より I_1 が求められる。

次に I_2 については

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} da \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \beta d\beta}{(\cosh a - \cos \beta)^3} = -\frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{da}{\sinh a} \cdot \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \beta d\beta}{(\cosh a - \cos \beta)^2} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sinh a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \beta d\beta}{(\cosh a - \cos \beta)^2} + \int \frac{\cosh a}{\sinh^2 a} da \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \beta d\beta}{(\cosh a - \cos \beta)^2} \right\} \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sinh^2 a} \cdot \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \beta d\beta}{\cosh a - \cos \beta} \right\} + \frac{\cosh a}{\sinh^3 a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \beta d\beta}{\cosh a - \cos \beta} \right. \\ &\quad \left. - \int \frac{\sinh^2 a - 3 \cosh^2 a}{\sinh^4 a} da \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \beta d\beta}{\cosh a - \cos \beta} \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \end{aligned} \quad (31)$$

然るに

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \beta d\beta}{\cosh a - \cos \beta} = 2 \coth a \cdot \tan^{-1} \coth \frac{a}{2} - \frac{\pi}{2} \quad (32)$$

(32) 式を微分すると

$$\frac{\partial}{\partial a} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \beta d\beta}{\cosh a - \cos \beta} \right\} = -\frac{2}{\sinh^2 a} \tan^{-1} \coth \frac{a}{2} - \frac{1}{\sinh a} \quad (33)$$

また積分式

$$\int \frac{\cosh a (\sinh^2 a - 3 \cosh^2 a)}{\sinh^5 a} da = \frac{1}{\sinh^2 a} + \frac{3}{4} \frac{1}{\sinh^4 a} \quad (34)$$

$$\int \frac{\sinh^2 a - 3 \cosh^2 a}{\sinh^4 a} da = \frac{\cosh a}{\sinh^3 a} \quad (35)$$

を用いると

$$I_2 = \left[-\frac{3}{4} \frac{1}{\sinh^4 a} \tan^{-1} \coth \frac{a}{2} + \frac{\sinh^2 a - 3}{8 \sinh^3 a} + \frac{1}{4} \tan^{-1} e^a \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \quad (36)$$

よつて(26)~(30)式及び(36)式より振りモーメント M は次のように求められる。

$$M = G\theta a^4 \left[\frac{8}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{m=0,1,2}^{\infty} 2^{m+2} (m+1) P_{m,n} \sum_{r=0,1,2}^{\infty} (-1)^r {}_{m+1+r} C_r \right. \\ \left. \left\{ D_n \frac{e^{(n-m-2r-2)\alpha}}{(n-m-2r-2)} - E_n \frac{e^{-(n+m+2r+2)\alpha}}{(n+m+2r+2)} \right\} \right. \\ \left. - \frac{3}{\sinh^4 a} \tan^{-1} \coth \frac{a}{2} + \frac{\sinh^2 a - 3}{2 \sinh^3 a} + \tan^{-1} e^a \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \quad (37)$$

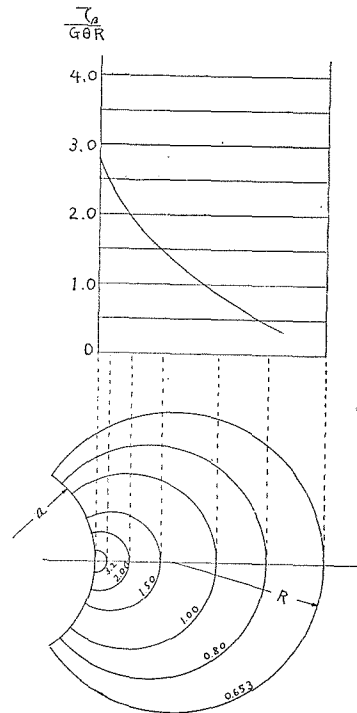
V. 数値計算及び結語

例題として(第4図)の如く外径と第一切欠円弧径との比即ち $a \cosh \alpha_1 : a$ が 1:0.70 の時, 第二の円弧切欠の大きさを図の如く種々変化したとき, その底に発生する最大剪断応力 τ_B の変化を示した。

最大剪断応力は第二の切欠が小になると共に増大し $\alpha_2 \rightarrow \infty$ 即ち第二切欠が無限小になる局限では $\tau_B / G\theta R = 2.83$ となり有限値を示す。

参考文献

- 1) 機械学会論文集. Vol. 8, No. 32.
- 2) 機械学会論文集. Vol. 16, No. 55.
- 3) 金沢大学工学部紀要. Vol. 1, No. 3.
- 4) D'intégrales Définies: D. Bierens de Haan p. 70.



第 4 図