



Title	帯鋸の腰入（第10報）：帯鋸と鋸車との接触状態
Author(s)	久野, 陸夫; Kuno, Rokuo; 土肥, 修 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 20, 55-69
Issue Date	1958-12-18
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40650
Type	departmental bulletin paper
File Information	20_55-70.pdf



帯鋸の腰入 (第10報)

—— 帯鋸と鋸車との接触状態 ——

久野陸夫

土肥修

(昭和33年9月30日受理)

Stretching for Band Saw Blade (X)

—— The States of Contact between the Saw Blade
and the Wheel Surfaces ——

Rokuo KUNO

Osamu DOI

Abstract

Running stability of the band saw has a close relation with the distribution of the pressure of contact between the band saw and the wheel surfaces. In the former report, the authors assume the state of two lines contact exists between them. But, when the band saw is thin, or the tautness of it is large, the surface contact occurs at a certain position.

The theoretical states of contact between them are calculated for the following simplest cases:

- A. A band saw with no stressing, middle portion of which is on the wheel.
- B. A band saw without stressing, full breadth of which is on the wheel.
- C. A band saw with crown back only.
- D. A band saw with tensioning only, middle portion of which is on the wheel.
- E. A band saw with tensioning only, the full breadth of which is on the wheel.

序 論

鋼のエンドレスベルトの形をした、かつ腰入れした帯鋸は、円筒殻の形ではなく、きわめて高さの低い截頭円錐殻の形をなし、その上に円錐母線が直線でない様な複雑な形をして居る。この様な帯鋸が上下二つの鋸車に掛り、分銅で張られて居る。木材切削による送り力は帯鋸の面内に加わる。クラウンの付いて居ない上下鋸車に掛つて居る帯鋸は、この送り力によつて、廻転中鋸車上を匍匐して、はずれる傾向を有する。この点に帯鋸を腰入れする重なる目的があるのであつて、帯鋸は腰入れして置く事によつて初めて走行安定が可能なのである。

即ち腰入れによつて複雑な形をもつた帯鋸が鋸車に接触して居る場合の接触圧力分布はき

わめて複雑である。この接触圧力分布によつて走行状態が定まるのであるが、第1報では、北海道で用いられて居る様な割合厚い帯鋸を想定して、鋸車のかどが帯鋸の齒側に近い部分に線接触し、かつ帯鋸の背が鋸車の面に線接触する二線接触として、安定理論を述べた¹⁾。しかしこの様な二線接触の理論では、薄い鋸、又は緊張力の強い鋸に対しては実験値は説明出来ない場合が生ずる²⁾。これは帯鋸と鋸車とは最早二線接触の状態ではなく、更に帯鋸の中央部、即ち腹部でも線接触、又は面接触を起して居るからである。しかしこの様な接触状態を実験的に証明する事は困難であるから、此処では先ず理論的に可能な接触状態を吟味して見る。

基 本 式

長さの方向に一様に腰入れした帯状の薄板、即ち帯鋸を長さの方向に一定の曲率半径で弯曲させ、かつ長さの方向に対し一定の面に直角な外力を加えた場合の変位を与える式は、第5報³⁾で示した式から導く事が出来る。帯鋸の長さの方向を y 、巾の方向を x に取る。帯鋸の変位 w は

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{1}{2\rho} y^2 + \varphi(x) \\ D \frac{d^4 \varphi}{dx^4} &= \frac{1}{\rho} N_y + p \\ \frac{1}{tE} N_y + \varepsilon_y^0 &= -\frac{1}{\rho} \varphi + Ax + B \\ D &= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \end{aligned} \right\}$$

t 帯鋸の厚さ

ρ 帯鋸の長さの方向の変形曲率半径

E 縦弾性係数

N_y 帯鋸の面内力

p 帯鋸の面に直角に加える外力

ε_y^0 腰入れの為各部に与えられた永久歪

ν ポアソン比

$$D \frac{d^4 \varphi}{dx^4} + \frac{tE}{\rho^2} \varphi + \frac{tE}{\rho} \varepsilon_y^0 = p + \frac{tE}{\rho} Ax + \frac{tE}{\rho} B \quad (2)$$

ここで φ を二つに分けて考える。

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$D \frac{d^4 \varphi_1}{dx^4} + \frac{tE}{\rho^2} \varphi_1 + \frac{tE}{\rho} \varepsilon_y^0 + D \frac{d^4 \varphi_2}{dx^4} + \frac{tE}{\rho^2} \varphi_2 = p + \frac{tE}{\rho} Ax + \frac{tE}{\rho} B \quad (3)$$

$$D \frac{d^4 \varphi_1}{dx^4} + \frac{tE}{\rho^2} \varphi_1 + \frac{tE}{\rho} \varepsilon_y^0 = \frac{tE}{\rho} Ax + \frac{tE}{\rho} B \quad (4)$$

$$D \frac{d^4 \varphi_2}{dx^4} + \frac{tE}{\rho^2} \varphi_2 = p \quad (4')$$

(4)式で示される φ_1 は ε_y^0 なる腰入れをした帯鋸を長さの方向に一様に曲げた場合に生ずる変位であり、(4')式で示される φ_2 は、この様な状態の帯鋸に外力 p を加えた為に更に附加されるべき変位である。この合成された変位が帯鋸の接触状態を定める変位であるが、 φ_1 は、 ε_y^0 が簡単な形で与えられても極めて複雑になる。しかし帯鋸の腰入れ作業で広く用いられて居る様に、この弯曲後の変形 φ_1 をバック半径 R 、及びテンション半径 r で示す事にする。故に φ_1 を次の如き形で与えられるものとする。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= ax + \frac{x(h-x)}{2r} \\ a &= \frac{\rho}{R} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

第1項はバックの量を示し、第2項はテンションの量を示す。(実際には鋸の中の方向に対し、この様な一様なテンション半径 r で腰入れするものではないが、問題を簡単にする為この様に仮定した。)

φ_2 に対しては円筒殻の式と全く等しいのである。故に(2)式の解は特解 $f(x)$ を含めて、次の如く示される。

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 = ax + \frac{x(h-x)}{2r} + e^{-\beta x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \\ &\quad + e^{+\beta x}(C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + f(x) \\ \beta^4 &= \frac{Et}{4\rho^2 D} \end{aligned} \quad (6)$$

周辺の条件は鋸の中を b とすれば $x=0$ 、及び $x=b$ で

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \left(\frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} + \nu \frac{1}{\rho} \right) = 0 \\ Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \left(\frac{d^3 \varphi_1}{dx^3} + \frac{d^3 \varphi_2}{dx^3} \right) = 0 \\ \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} + \nu \frac{1}{\rho} &= 0 \quad \frac{d^3 \varphi_1}{dx^3} = 0 \quad \frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} = 0 \quad \frac{d^3 \varphi_2}{dx^3} = 0 \end{aligned}$$

故に φ_2 に対しては周辺の条件も円筒殻の場合と同様に考える事が出来る。

例えば無限の長さの円筒殻の或る断面に一様に分布された荷重 p がかかる場合は

$$\varphi_2 = \frac{p}{8\beta^3 D} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x), \quad x > 0 \quad (7)$$

半無限の円筒殻の端に一様に剪断力の外力 q が掛り、この端のモーメント M_x が0の場合には

$$\varphi_2 = -\frac{q}{2\beta^3 D} e^{-\beta x} \cos \beta x \quad (8)$$

これ等の式を用いて簡易な場合の帯鋸と鋸車の接触状態を吟味する

腰入れのない場合

この場合は、 $a=0$ 、 $1/r=0$ であり、その結果

$$\varphi_1 = 0$$

即ち円筒殻の鋸が円筒の鋸車に接触する場合である。(但し長さの方向に ρ なる曲率半径で弯曲させたが為に、巾の方向にも弯曲する筈であるが、これを無視する。)

A. 無限の巾の帯鋸を鋸車に掛けて緊張力を加えた場合

この様な場合の帯鋸と鋸車との接触は鋸車の両かどで生ずる。鋸車の中央を原点として、鋸車の巾を h とすれば、 $x = \pm \frac{h}{2}$ で接触力 p が帯鋸にかかる事になる。故に帯鋸の変位は(7)式を用いて

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{p}{8\beta^3 D} e^{-\beta\left(\frac{h}{2}+x\right)} \left\{ \sin \beta \left(\frac{h}{2} + x \right) + \cos \beta \left(\frac{h}{2} + x \right) \right\} \\ & + \frac{p}{8\beta^3 D} e^{-\beta\left(\frac{h}{2}-x\right)} \left\{ \sin \beta \left(\frac{h}{2} - x \right) + \cos \beta \left(\frac{h}{2} - x \right) \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

しかし鋸車の両かど、のみならず鋸車の中央 $x=0$ でも接触する場合は有り得るからこの条件を求める。この為には鋸車の中央 $x=0$ 、及び両かど $x = \pm \frac{h}{2}$ で変位が等しくなければならない。

$$\varphi_0 = \varphi_{x=0} = \varphi_{x=\frac{h}{2}}$$

$$\varphi_0 = 2 \frac{p}{8\beta^3 D} e^{-\beta\frac{h}{2}} \left(\sin \beta \frac{h}{2} + \cos \beta \frac{h}{2} \right) = \frac{p}{8\beta^3 D} + \frac{p}{8\beta^3 D} e^{-\beta h} (\sin \beta h + \cos \beta h) \quad (10)$$

$$\therefore 2 e^{-\beta\frac{h}{2}} \left(\sin \beta \frac{h}{2} + \cos \beta \frac{h}{2} \right) = 1 + e^{-\beta h} (\sin \beta h + \cos \beta h) \quad (11)$$

$$\therefore \beta h = 1.87$$

故に $h < \frac{1.87}{\beta}$ ならば p が正の範囲で(11)の左辺が右辺よりも常に大きくなるから、鋸車の中央の変位が、鋸車の両かどの変位よりも大きくなり、この様な巾の狭い鋸車では両かどでしか接触しない。これは p に無関係、即ち緊張力に無関係である。接触力は変形量に比例し(10)から求める事が出来る。

鋸車の巾が以上の場合よりも広い場合 $h > \frac{1.87}{\beta}$ の場合は、中央でも接触する。接触状態をしらべる為に、中央 $x=0$ にも接触力 q が作用するものとする。(7)式を用いて

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{p}{8\beta^3 D} e^{-\beta\left(\frac{h}{2}+x\right)} \left\{ \sin \beta \left(\frac{h}{2} + x \right) + \cos \beta \left(\frac{h}{2} + x \right) \right\} \\ & + \frac{p}{8\beta^3 D} e^{-\beta\left(\frac{h}{2}-x\right)} \left\{ \sin \beta \left(\frac{h}{2} - x \right) + \cos \beta \left(\frac{h}{2} - x \right) \right\} \\ & + \frac{q}{8\beta^3 D} e^{-\beta x} (\sin \beta x + \cos \beta x) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{h}{2} > x > 0$$

鋸車の中央 $x=0$ と両かど $x = +\frac{h}{2}$ で変位が等しい。

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \varphi_{x=0} = \varphi_{x=\frac{h}{2}} \\ \varphi_0 &= \frac{2p}{8\beta^3 D} e^{-\beta \frac{h}{2}} \left(\sin \beta \frac{h}{2} + \cos \beta \frac{h}{2} \right) + \frac{q}{8\beta^3 D} \\ &= \frac{p}{8\beta^3 D} e^{-\beta h} (\sin \beta h + \cos \beta h) + \frac{p}{8\beta^3 D} + \frac{q}{8\beta^3 D} e^{-\beta \frac{h}{2}} \left(\sin \beta \frac{h}{2} + \cos \beta \frac{h}{2} \right) \quad (13) \end{aligned}$$

この関係は中央で帯鋸が鋸車側に凸である様に曲げられて居る状態でなければならない。鋸車側に凹に曲げられて居る事は出来ない。故に中央の曲率 $\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0$ が限界の条件になる。

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}_{x=0} = 0 = 4\beta^2 \frac{p}{8\beta^3 D} e^{-\beta \frac{h}{2}} \left(\sin \beta \frac{h}{2} - \cos \beta \frac{h}{2} \right) - 2\beta^2 \frac{q}{8\beta^3 D} \quad (14)$$

この(13), (14)式から p, q を消去すれば

$$\left. \begin{aligned} 1 + e^{-\beta h} (\sin \beta h + \cos \beta h) &= 4e^{-\beta \frac{h}{2}} \sin \beta \frac{h}{2} + 2e^{-\beta h} \cos \beta h \\ \beta h &= 2.37 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

又この値を(13)式に入れば

$$q = 0.171 p$$

になる。故に $\frac{2.37}{\beta} > h > \frac{1.87}{\beta}$ では鋸車の中央及び両かどで線接触して居る事になり、この中央の接触線の接触力は(13)から計算出来る筈であるが

$$0.171 p > q > 0$$

これ以上鋸車の中が広く $h > \frac{2.37}{\beta}$ の場合には次の如く考える。鋸車の中 $h = \frac{2.37}{\beta}$ の場合の帯鋸と鋸車を中央の接触線を含む面で二つに分ける。この面で左右対称であり、この境界において $\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0$ 、故にモーメントも剪断力も働いて居ないから、この各の半無限帯鋸は独立して考えても平衡状態にある。この二つの半無限帯鋸の間に或る中の鋸車と帯鋸が面接触して居る状態をはさんでつなぎ合わせる。これが $h > \frac{2.37}{\beta}$ の鋸車の状態である。故にこのような鋸車の場合は鋸車の両かどから $\frac{2.37}{2\beta}$ の巾だけは鋸車の中 $h = \frac{2.37}{\beta}$ の場合と全く同じであり、その間の部分が面接触する。面圧 f は

$$f = \frac{tE}{\rho^2} \varphi_0 = 0.56 p\beta$$

又面接触して居る部分の両縁に

$$q = \frac{0.171}{2} p$$

なる接触力が作用して居る。

B. 帯鋸の中が鋸車の中より狭く帯鋸が完全に鋸車に乗り上げている場合

この場合は帯鋸は鋸車と全面が面接触して居る。接触面圧力 f は

$$f = \frac{tE}{\rho^2} \varphi_0$$

バックのみある場合

C. 截頭円錐殻の形をした帯鋸と鋸車の接触状態である。故に $\frac{1}{r} = 0$

$$\varphi_1 = ax$$

鋸巾が広く鋸の縁の影響がないものとする。緊張力を加えない場合は鋸車の一方のかどで帯鋸と線接触する。緊張力が増加すると、このかどの接触力 p は増加する。このかどを原点とすれば帯鋸の変位は (7) 式を用いて

$$\varphi = ax + \frac{p}{8\beta^3 D} e^{-\beta x} (\sin \beta x + \cos \beta x) \quad (16)$$

接触力が増加すれば他の線 $x = \xi$ で接触を起す様になる。この条件を求める。

$$\varphi_0 = \varphi_{x=0} = \varphi_{x=\xi} \quad \frac{d\varphi}{dx}_{x=\xi} = 0$$

$$\varphi_0 = \frac{p}{8\beta^3 D} = \frac{p}{8\beta^3 D} e^{-\beta \xi} (\sin \beta \xi + \cos \beta \xi) + a\xi \quad (17)$$

$$2\beta \frac{p}{8\beta^3 D} e^{-\beta \xi} \sin \beta \xi = a \quad (18)$$

$$\beta \xi = 1.35$$

$$\frac{p}{8\beta^3 D} = 2.0 \frac{a}{\beta}$$

即ちバックの大きさに関せず鋸車の面の $\xi = \frac{1.35}{\beta}$ の位置で接触が起る。接触を起し始める時の鋸車のかどにおける接触力は $\frac{p}{8\beta^3 D} = 2.0 \frac{a}{\beta}$ で示される如くバックが強いと之れに比例して大きくなる。

更に緊張力を増せば接触線 $x = \xi$ で接触力 q がかかる事になる。接触線の位置も次第に移動する。最後に帯鋸の一部が面接触に移るのであるが、この限界を求める。

$$\varphi = \frac{p}{8\beta^3 D} e^{-\beta x} (\sin \beta x + \cos \beta x) + \frac{q}{8\beta^3 D} e^{-\beta(\xi-x)} \{\sin \beta(\xi-x) + \cos \beta(\xi-x)\} + ax \quad (19)$$

$$\xi > x > 0$$

$$\varphi_0 = \varphi_{x=0} = \varphi_{x=\xi}$$

$$\frac{d\varphi}{dx}_{x=\xi} = 0$$

この他に面接触して居る部分のモーメント M_x は零であるから、面接触して居る縁においても $M_x = 0$ でなければならぬ。

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}_{x=\xi} = 0$$

$$\varphi_0 = \frac{p}{8\beta^3 D} + \frac{q}{8\beta^3 D} e^{-\beta\xi} (\sin \beta\xi + \cos \beta\xi) = \frac{p}{8\beta^3 D} e^{-\beta\xi} (\sin \beta\xi + \cos \beta\xi) + \frac{q}{8\beta^3 D} + a\xi \quad (20)$$

$$2\beta \frac{p}{8\beta^3 D} e^{-\beta\xi} \sin \beta\xi = a \quad (21)$$

$$2\beta^2 \frac{p}{8\beta^3 D} e^{-\beta\xi} (\sin \beta\xi - \cos \beta\xi) = 2\beta^2 \frac{q}{8\beta^3 D} \quad (22)$$

$$\beta\xi = 1.61$$

$$\frac{p}{8\beta^3 D} = 2.5 \frac{a}{\beta}$$

$$\frac{q}{8\beta^3 D} = 0.52 \frac{a}{\beta}$$

かくの如く鋸車の面上で接触が始まれば、この接触線にも接触力が働き、接触線は次第に鋸車のかどから遠ざかり、更に次第に緊張力が増せば、かどの接触力 p は $\frac{p}{8\beta^3 D} = 2.5 \frac{a}{\beta}$ になり、鋸車面上の接触線の接触力 q も $\frac{q}{8\beta^3 D} = 0.52 \frac{a}{\beta}$ となり、その位置が $\xi = \frac{1.61}{\beta}$ になる。この状態になった時にこの部分が面接触に移るのである。

更に緊張力が増せば面接触する部分の中が拡がるのであるが、これを検討する為に先ず鋸車のかどの附近の状態を計算する。鋸車よりその部分を I、鋸車上には有るが鋸車に接触して居ない部分を II とすれば、鋸車のかどを原点として

$$\left. \begin{aligned} \varphi_I &= ax + e^{+\beta x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) & x < 0 \\ \varphi_{II} &= ax + e^{+\beta x} (C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x) \\ &\quad + e^{-\beta x} (C_5 \sin \beta x + C_6 \cos \beta x) & \xi > x > 0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

鋸車と鋸の接触して居る線は鋸車のかど $x=0$ と面接触に移る縁 $x=\xi$ とであるから $x=0$ で

$$\varphi_0 = \varphi_I = \varphi_{II}$$

$$\frac{d\varphi_I}{dx} = \frac{d\varphi_{II}}{dx} \quad \frac{d^2\varphi_I}{dx^2} = \frac{d^2\varphi_{II}}{dx^2}$$

$x=\xi$ で

$$\varphi_0 = \varphi_{II} \quad \frac{d\varphi_{II}}{dx} = 0, \quad \frac{d^2\varphi_{II}}{dx^2} = 0$$

これを計算すれば

$$\frac{\varphi_0(1 - e^{-\beta\xi} \cos \beta\xi) - a\xi \cos \beta\xi e^{-\beta\xi}}{\varphi_0 + \frac{a}{\beta} - a\xi} = \frac{1 - e^{-2\beta\xi} (\sin \beta\xi + \cos 2\beta\xi)}{4e^{-\beta\xi} \sin \beta\xi} \quad (24)$$

此の如く面接触をする部分の鋸車のかどに近い縁は変形 φ_0 、或いは緊張力が大きくなれば鋸車のかどに近づき、変形が極めて大きくなつた時にこの式は (15) 式に近づくからバック、テンションのない場合に近づく。即ち $\xi = \frac{2.37}{2\beta}$ に近づくのである。云換えると面接触の部分は

$\xi = \frac{2.37}{2\beta}$ 迄広がって行くのである。

面接触して居る部分の面圧 f は

$$f = \frac{tE}{\rho^2} (\varphi_0 - ax)$$

この面接触して居る部分の鋸車より遠い縁 $x = \eta$ からは鋸車に接触して居ない。この部分の変位は (8) 式を用いて

$$\varphi = ax + \frac{q_2}{2\beta^2 D} e^{-\beta(x-\eta)} \cos \beta(x-\eta)$$

$$x > \eta$$

$$\frac{d\varphi}{dx_{x=\eta}} = 0$$

$$\frac{q_2}{8\beta^3 D} = 0.25 \frac{a}{\beta}$$

$$\varphi_0 = \varphi_{x=\eta} = \frac{a}{\beta} + a\eta$$

即ち面接触して居る部分の鋸車のかどから遠い方の縁は緊張力が増し変位 φ_0 が増して行くと共に無限に広がって行く。

以上は鋸車の巾がかなり広い場合であり、鋸車の巾が狭くなれば鋸車の他のかどが影響を及ぼすので複雑になる。

テンションのみの場合

この場合はバックがないから $a=0$ とし、かつ接触が鋸車に対し対称に起るものとする。

$$\varphi_1 = \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2 - x^2}{2r}$$

D. 無限巾の帯鋸が鋸車に接触する場合

鋸車の巾を h として原点を鋸車の中央に取る。この場合も緊張力を加えれば先ず鋸車の両かどで接触し、接触力 p が働く。

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2 - x^2}{2r} + \frac{p}{8\beta^3 D} e^{-\beta\left(\frac{h}{2}+x\right)} \left\{ \sin \beta \left(\frac{h}{2} + x\right) + \cos \beta \left(\frac{h}{2} + x\right) \right\} \\ & + \frac{p}{8\beta^3 D} e^{-\beta\left(\frac{h}{2}-x\right)} \left\{ \sin \beta \left(\frac{h}{2} - x\right) + \cos \beta \left(\frac{h}{2} - x\right) \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

最初に中央が接触する条件を求める。

$$\varphi_0 = \varphi_{x=0} = \varphi_{x=\frac{h}{2}}$$

$$\varphi_0 = \frac{p}{8\beta^3 D} e^{-\beta h} (\sin \beta h + \cos \beta h) + \frac{p}{8\beta^3 D}$$

$$= \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2}{2r} + 2 \frac{p}{8\beta^3 D} e^{-\beta \frac{h}{2}} \left(\cos \beta \frac{h}{2} + \sin \beta \frac{h}{2} \right) \quad (26)$$

$$e^{-\beta h} (\sin \beta h + \cos \beta h) + 1 - 2 e^{-\beta \frac{h}{2}} \left(\sin \beta \frac{h}{2} + \cos \beta \frac{h}{2} \right) = \frac{8\beta^3 D \left(\frac{h}{2}\right)^2}{2r p} \quad (27)$$

この p が如何に大きくなつても (27) 式の成立しない条件は左辺が負の場合であり、中央が接触しない限界は (27) 式の左辺を 0 と置いた場合、即ち (11) 式と同じくなるからテンションのない場合と同じである。故に $\frac{1.87}{\beta} > h$ の場合は緊張力を如何に増しても鋸車の両かどのみで接触する。しかし $h > \frac{1.87}{\beta}$ の場合は両かどのみならず、他の線でも接触し得る。上の如き p を加えて中央で接触する場合はやはり中央で鋸車側に凸で弯曲して居なければならぬ。故に中央で鋸車に接触し得る限界は中央で $\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0$ でなければならぬ。

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dx^2}_{x=0} &= 0 \\ \frac{1}{r} &= 4\beta^2 \frac{p}{8\beta^3 D} e^{-\beta \frac{h}{2}} \left(\sin \beta \frac{h}{2} - \cos \beta \frac{h}{2} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

(27) 及び (28) 式から

$$h = \frac{5.88}{\beta}$$

故に $\frac{5.88}{\beta} > h > \frac{1.87}{\beta}$ の場合は緊張力を増せば最初に鋸車の両かど次に鋸車の中央で接触が起る。

$h > \frac{5.88}{\beta}$ の場合は緊張力を増す事により両かどの次に接触を起すのは中央でなく、中央に対し対称な二線である。接触の起る線の決定は複雑になるので、近似的に鋸車の一方のかどの接触が、他のかどの附近の接触状態に影響を及ぼさないものとする。故に一方のかどを原点として

$$\varphi = \frac{x(h-x)}{2r} + \frac{p}{8\beta^3 D} e^{-\beta x} (\sin \beta x + \cos \beta x) \quad (29)$$

接触条件としては

$$\varphi_0 = \varphi_{x=0} = \varphi_{x=\xi}, \quad \frac{d\varphi}{dx}_{x=\xi} = 0$$

$$\varphi_0 = \frac{p}{8\beta^3 D} = \frac{h\xi - \xi^2}{2r} + \frac{p}{8\beta^3 D} e^{-\beta \xi} (\sin \beta \xi + \cos \beta \xi) \quad (30)$$

$$\frac{h-2\xi}{2r} = 2\beta \frac{p}{8\beta^3 D} e^{-\beta \xi} \cos \beta \xi \quad (31)$$

$$\frac{1}{2(\beta h - \beta \xi)} = \frac{1}{2\beta \xi} - \frac{e^{-\beta \xi} \sin \beta \xi}{1 - e^{-\beta \xi} (\cos \beta \xi + \sin \beta \xi)} \quad (32)$$

βh と $\beta \xi$ との関係曲線は第1図 A 曲線である。この様に緊張力を増した場合鋸車の両かどの接触の次に起る接触線は A 曲線の如き位置である。(接触が中央に近い場合はこの様な計算では誤差が大きいから修正をほどこした。)

この様に接触が始まればこの線にも接触力が働き、接触線も移動する。そして最後に面接触を起す部分が生ずる。面接触に移る限界を求める。面接触して居る部分に対しては変位は

$$\varphi_2 = \varphi_0 - \frac{x(h-x)}{2r}$$

故に

$$M_x = -D \frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} = -D \frac{1}{r}$$

面接触して居る部分に $-D \frac{1}{r}$ なるモーメント M_x が作用して居るならば、面接触して居る両縁でもこのモーメント M_x が存在しなければならぬ。

$$\begin{aligned} -D \frac{d^2 \varphi_2}{dx^2}_{x=\xi} &= -D \frac{1}{r} \\ -D \left(\frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} - \frac{1}{r} \right)_{x=\xi} &= 0 = -D \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)_{x=\xi} \end{aligned}$$

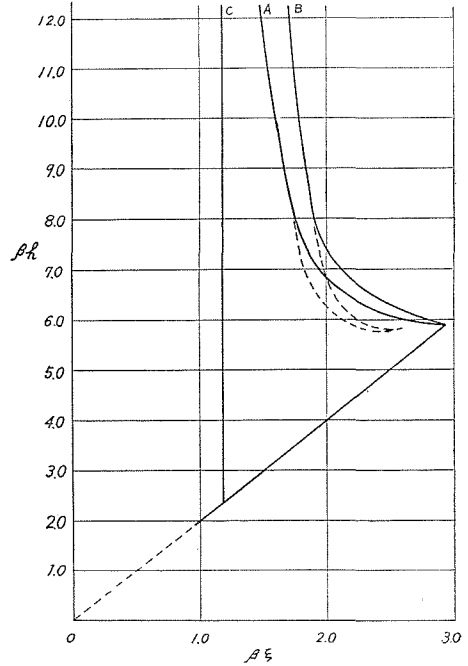
やはりこの場合も接触線付近で鋸車側に凸で弯曲するか、凹で弯曲するかが限界になる。この場合も一方のかどの接触が他方のかどの附近の接触状態に影響を及ぼさぬものとしてこの限界を求める。

$$\begin{aligned} \varphi_0 = \varphi_{x=0} = \varphi_{x=\xi}, \quad \frac{d\varphi}{dx}_{x=\xi} &= 0, \quad \frac{d^2 \varphi}{dx^2}_{x=\xi} = 0 \\ \varphi_0 &= \frac{p}{8\beta^3 D} + \frac{q}{8\beta^3 D} e^{-\beta \xi} (\sin \beta \xi + \cos \beta \xi) \\ &= \frac{(h\xi - \xi^2)}{2r} + \frac{p}{8\beta^3 D} e^{-\beta \xi} (\sin \beta \xi + \cos \beta \xi) + \frac{q}{8\beta^3 D} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\frac{h-2\xi}{2r} = 2\beta \frac{p}{8\beta^3 D} e^{-\beta \xi} \sin \beta \xi \quad (34)$$

$$2\beta^2 \frac{p}{8\beta^3 D} e^{-\beta \xi} (\sin \beta \xi - \cos \beta \xi) - \frac{2\beta^2 q}{8\beta^3 D} = \frac{1}{r} \quad (35)$$

この(33), (34), (35)式から βh と $\beta \xi$ との関係曲線を求めると第1図 B 曲線の如くなる。この様に鋸車面上の中央に対し対称の接触線は緊張力が増すに従い、接触力 q を増し、かつ鋸車の中央線に近づき、遂に B 曲線の位置に接触線が来た時に、この二つの接触線の間が面接触になる。更に緊張力が増せば面接触の部分の接触圧力も増加し、かつ面接触する部分の範囲も広



第1図

がる。

最後に緊張力が無限に近く増加した場合について考える。以上のような接触の式はすべて $r\beta^2\varphi_0$, $\frac{pr\beta^2}{8\beta^3D}$, βh , $\beta\xi$, なる形の変数で表示される。故に $r\beta^2\varphi_0$ 又は $\frac{p\beta^2r}{8\beta^3D}$ が与えられた場合には βh と $\beta\xi$ との関係が出て来る。今接触力 p 又は変位 φ_0 が無限に大きい場合はテンション半径 r が無限に大きい場合に近づく筈であり、緊張力が無限に大きくなれば面接触の部分は (13) で示される如く $\xi = \frac{2.37}{2\beta}$ 迄広がって来る筈である。

E. テンションのみの帶鋸が鋸車に完全に乗り上げて居る場合

鋸の中央に対し対称の変位の場合を考える。この場合は帶鋸の両縁が鋸車に先ず接触する。この接触線に接触力 p が働く事になる。帶鋸の中を b とし、鋸の中央を原点に取れば

$$\varphi = \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - x^2}{2r} + C_1 \cosh \beta x \cos \beta x + C_2 \sinh \beta x \sin \beta x \quad (36)$$

両縁の接触線ではモーメント M_x は零でなければならぬから

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} \Big|_{x=\pm\frac{b}{2}} = 0 = C_1 \sinh \beta \frac{b}{2} \sin \beta \frac{b}{2} - C_2 \cosh \beta \frac{b}{2} \cos \beta \frac{b}{2} \quad (37)$$

この関係を用いて (36) 式を書き直すと

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - x^2}{2r} + K \left(\cosh \beta \frac{b}{2} \cos \beta \frac{b}{2} \cosh \beta x \cos \beta x \right. \\ & \left. + \sinh \beta \frac{b}{2} \sin \beta \frac{b}{2} \sinh \beta x \sin \beta x \right) \end{aligned} \quad (38)$$

中の狭い帶鋸では当然次の接触は中央線で起る。

$$\begin{aligned} \varphi_0 = \varphi_{x=0} = \varphi_{x=\pm\frac{b}{2}} \\ \varphi_0 = \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2r} + K \left(\cosh \beta \frac{b}{2} \cos \beta \frac{b}{2} \right) = K \left(\cosh^2 \beta \frac{b}{2} + \cos^2 \beta \frac{b}{2} + \sinh^2 \beta \frac{b}{2} \sin^2 \beta \frac{b}{2} \right) \end{aligned} \quad (39)$$

$$\frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2rK} = \left(\cosh^2 \beta \frac{b}{2} \cos^2 \beta \frac{b}{2} + \sinh^2 \beta \frac{b}{2} \sin^2 \beta \frac{b}{2} - \cosh \beta \frac{b}{2} \cos \beta \frac{b}{2} \right) \quad (40)$$

右辺は 0 から無限大迄如何な値も取り得るから緊張力の大きさに関せず両縁以外の接触が起らないと云う様な事はない。

この場合も中央で次の接触が起るか、中央の両側で線接触を起すかの限界は中央の曲率が 0 の条件で求めればよい。

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0 \\ 2\beta^2 K \sinh \beta \frac{b}{2} \sin \beta \frac{b}{2} = \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (41)$$

(40), (41)式から

$$2\beta^2 \left(\frac{b}{2}\right)^2 \sinh \beta \frac{b}{2} \sin \beta \frac{b}{2} = \cosh \beta b + \cos \beta b - 2 \cosh \beta \frac{b}{2} \cos \beta \frac{b}{2} \quad (42)$$

$$\beta b = 3.54$$

故に $\frac{3.54}{\beta} > b$ の場合は鋸車の中央で接触が起り, $b > \frac{3.54}{\beta}$ の場合には中央の両側で線接触が始まる。如何なる線で接触が始まるかを計算する為に, 原点を鋸の一方の縁に移し, 他方の縁の接触がこの縁の附近の接触状態に影響を及ぼさないものとする。

$$\varphi = \frac{x(b-x)}{2r} + \frac{p}{2\beta^2 D} e^{-\beta x} \cos \beta x \quad (43)$$

$$\varphi_0 = \varphi_{x=0} = \varphi_{x=\xi} \quad \frac{d\varphi}{dx_{x=\xi}} = 0$$

$$\varphi_0 = \frac{p}{2\beta^2 D} = \frac{\xi(b-\xi)}{2r} + \frac{p}{2\beta^2 D} e^{-\beta \xi} \cos \beta \xi \quad (44)$$

$$\frac{b-2\xi}{2r} = \frac{p\beta}{2\beta^2 D} e^{-\beta \xi} (\cos \beta \xi + \sin \beta \xi) \quad (45)$$

(44) 及び (45) 式から

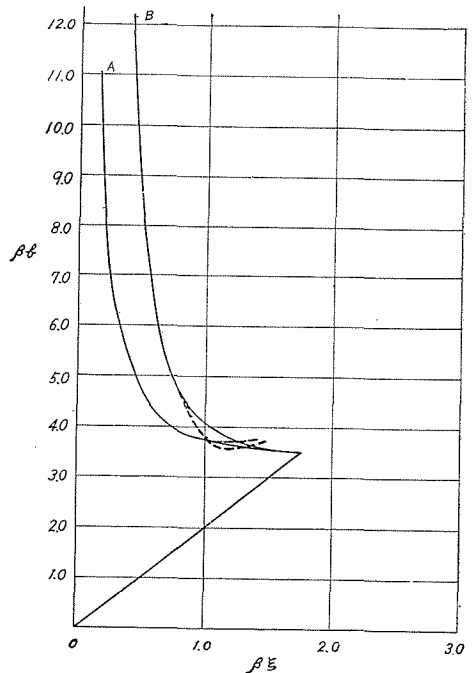
$$\frac{1}{\beta b - \beta \xi} = \frac{1}{\beta \xi} - \frac{e^{-\beta \xi} (\cos \beta \xi + \sin \beta \xi)}{1 - e^{-\beta \xi} \cos \beta \xi} \quad (46)$$

これを計算すると第2図 A 曲線の如くなる。(中央の両側の接触線の距離が近い時は修正をほどこした)

この A 曲線の位置で接触を始めた鋸は緊張力を更に増加すれば, この接触線が移動し, かつ接触線に接触力が作用する様になる。

最後に一部分が面接触になり初めるのであるが, この場合も前の例に従い, 鋸の一方の縁に接触力 p が加わり, $x=\xi$ なる線に接触力 q が作用して居る。

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{x(b-x)}{2r} + \frac{p}{2\beta^2 D} e^{-\beta x} \cos \beta x \\ & + \frac{q}{8\beta^3 D} e^{-\beta(\xi-x)} \{ \sin \beta(\xi-x) \\ & + \cos \beta(\xi-x) \} + \frac{q}{8\beta^3 D} e^{-\beta(\xi+x)} \\ & \times (\sin \beta \xi - \cos \beta \xi) \sin \beta x \\ & + \frac{q}{8\beta^3 D} e^{-\beta(\xi+x)} (3 \cos \beta \xi \\ & - \sin \beta \xi) \cos \beta x \end{aligned} \quad (47)$$



第 2 図

条件としては

$$\varphi_0 = \varphi_{x=0} = \varphi_{x=\xi}, \quad \frac{d\varphi}{dx_{x=\xi}} = 0, \quad \frac{d^2\varphi}{dx_{x=\xi}^2} = 0$$

此處で

$$B = \frac{p}{2\beta^3 D} + \frac{q}{8\beta^3 D} e^{-\beta\xi} (3 \cos \beta\xi - \sin \beta\xi)$$

と置けば

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{q}{8\beta^3 D} e^{-\beta\xi} (\cos \beta\xi + \sin \beta\xi) + B \\ &= \frac{q}{8\beta^3 D} + \frac{q}{8\beta^3 D} e^{-\beta\xi} (\sin \beta\xi - \cos \beta\xi) e^{-\beta\xi} \sin \beta\xi + \frac{\xi(b-\xi)}{2r} + B e^{-\beta\xi} \cos \beta\xi \quad (48) \end{aligned}$$

$$\frac{q\beta}{8\beta^3 D} e^{-2\beta\xi} (\cos \beta\xi - \sin \beta\xi)^2 + B\beta e^{-\beta\xi} (\sin \beta\xi + \cos \beta\xi) = \frac{b-2\xi}{2r} \quad (49)$$

$$-\frac{2q\beta^2}{8\beta^3 D} - \frac{2q\beta^2}{8\beta^3 D} e^{-2\beta\xi} (\sin \beta\xi - \cos \beta\xi) \cos \beta\xi + 2B\beta^2 e^{-\beta\xi} \sin \beta\xi = \frac{1}{r} \quad (50)$$

(48), (49), (50) から βb と $\beta\xi$ との関係曲線を求めると第2図 B 曲線の如くなる。即ち緊張力が増すと鋸の腹部の接触線は次第に鋸の中央に近づき、かつ接触線の接触力も次第に増加し、遂に接触線が B 曲線の位置になつた時に中央の両側の B 曲線で示される位置の間が面接触になる。更に緊張力が増加すれば、面接触の部分に接触圧力が働き、面接触の範囲も広がる。緊張力が極めて大きくなれば、テンションのない場合に近づくから全面接触になるのである。

結 論

実際の鋸の鋸車との接触状態を考える前に今迄計算した結果の要点を列記すると次の如くなる。

鋸の中 b テンシ半径 r 鋸車の中 h バック半径 R

$$A. \quad b \gg h \quad \frac{1}{r} = 0 \quad \frac{1}{R} = 0$$

1. 緊張力の大きさに無関係に接触状態が定められる。
2. $\frac{1.87}{\beta} > h$ の場合は鋸車の両かどのみで線接触する。
3. $\frac{2.37}{\beta} > h > \frac{1.87}{\beta}$ の場合は鋸車の両かどと鋸車の中央で線接触する。
4. $h > \frac{2.37}{\beta}$ の場合は鋸車の両かどで線接触し、鋸車の中央附近が面接触する。この場

合、両かどから $\frac{2.37}{2\beta}$ の範囲は鋸車に接触せず、又面接触して居る部分の両縁に $q = \frac{0.171}{2} p$ なる接触力が作用する。

$$B. \quad h > b \quad \frac{1}{r} = 0 \quad \frac{1}{R} = 0$$

1. 全面接触して居る。

$$C. \quad b, h \text{ 共に大} \quad \frac{1}{r} = 0$$

1. 緊張力が小さく $\frac{a}{\beta} 2.0 > \frac{p}{8\beta^3 D}$ の場合は鋸車の一つのかどのみ線接触する。
2. 緊張力が増し $\frac{a}{\beta} 2.5 > \frac{p}{8\beta^3 D} > \frac{a}{\beta} 2.0$, $\frac{a}{\beta} 0.52 > \frac{q}{8\beta^3 D} > 0$ の場合は鋸車のかど、及びこのかどからの距離 $\frac{1.35}{\beta}$ 乃至 $\frac{1.61}{\beta}$ の間で線接触する。線接触の位置は緊張力が増すにしたがい、かどから遠ざかる。

3. 緊張力が更に増せば $\frac{p}{8\beta^3 D} = \frac{a}{\beta} 2.5$, $\frac{q}{8\beta^3 D} = \frac{a}{\beta} 0.52$, $\xi = \frac{1.61}{\beta}$ になつた時に線接触して居た部分の附近が面接触に移り初める。面接触になつた部分の範囲は緊張力が増すにしたがい広がるが、面接触部分の鋸車のかどに近い境界は $\frac{2.37}{2\beta}$ 以上に広がる事はなく、かどからこの距離迄は常に接触しない。かどから遠い境界は緊張力が大きくなれば無限に広がつて行く。

$$D. \quad h \gg b \quad \frac{1}{R} = 0$$

1. $\frac{1.87}{\beta} > h$ の場合は緊張力を如何に強くしても両かど以外では接触しない。
2. $\frac{5.87}{\beta} > h > \frac{1.87}{\beta}$ の場合には鋸車のかどの次に中央線で線接触が始まる。特に $\frac{2.37}{\beta} > h > \frac{1.87}{\beta}$ の場合は中央線の線接触は緊張力を大きくしても面接触に移らない。
3. $h > \frac{5.87}{\beta}$ の場合は両かどのみならず緊張力を強くすれば第1図 A 曲線で示される ξ の位置で中央の両側で線接触を始める。

4. 緊張力を更に強くすれば、線接触の位置は鋸車の中央に近づき、接触線の接触力も大きくなる。

5. 遂に接触線が第1図 B 曲線の位置に来た時に、この接触線の間が面接触に移る。
6. 面接触した部分は次第に鋸車のかどの方に広がつて行くが、緊張力を如何に強くし、接触面圧が如何に大きくなつても鋸車のかどからの距離 $\xi = \frac{2.37}{2\beta}$ の間は鋸車と接触しない。

$$E. \quad b > h \quad \frac{1}{R} = 0$$

1. $\frac{3.54}{\beta} > b$ の場合は緊張力を増すと鋸の両縁の次の接触は鋸の中央線で生ずる。
2. $b > \frac{3.54}{\beta}$ の場合は緊張力を増せば鋸の両縁の次は第2図 A 曲線で示される ξ だけ鋸の両縁から離れた距離で次の接触が起る。

3. この様な接触が始まると接触線に接触力が働き、接触線も鋸の中央に近づく。

4. 第2図 B 曲線で示された位置に接触線が来た時に、この接触線の間が面接触に移る。

5. 面接触の部分の接触圧力は強くなり、接触面も広がり、遂に全面接触に近づく。

以上接触状態は条件の簡単な場合だけであるが、尚種々雑多な場合が生ずる。実際の帯鋸はこの様な簡単な条件でなく、(1) 帯鋸の歯側の出は無限と見なし得る程大きくはない。(2) 帯鋸の背側は鋸車の上に乗つて居る。(3) 故に上に述べた様な対称の条件は満たさない。故に実際の帯鋸の鋸車との接触状態を定量的に義論する事は困難であるが、定性的には大体次の如く

であると想像される。

1. 緊張力が小さければ歯側の鋸車のかどのみで接触する。

2. 緊張力が増加すれば、次の接触は鋸の背で起るのが普通であるが、しかし歯側の鋸車のかどから若干離れた位置に生ずる事もある。歯側の出が無限ならば第1図A曲線の位置に接触線が生ずるわけであるが、歯側の出が少ないから接触線の鋸車のかどからの距離はこれよりも小さくなる。

3. 更に緊張力が高い時は歯側の鋸車のかど、帯鋸の背、及び帯鋸の腹部の一線又は二線の合計三線又は四線で線接触が生ずる。

4. 一層緊張力が高い時は線接触の間の部分が面接触に変化し、面接触の範囲が広がる。

5. 遂に面接触した部分は鋸車のかどから若干離れた線と背との間になる。

文 献

- 1) 久野・土肥：帯鋸の腰入 (第1報). 北海道大学工学部研究報告, 第10号 (昭和29年5月).
- 2) 杉原彦一：両歯帯鋸の走行安定に関する実験的研究. 京大木研 (木材研究), 第16号 (昭和31年).
- 3) 久野・土肥：帯鋸の腰入 (第5報). 北海道大学工学部研究報告, 第14号 (昭和31年4月).
- 4) Timoshenko: Theory of Plate and Shell.