



Title	温度伝播率測定に関する一考察
Author(s)	岡垣, 理
Citation	北海道大學工學部研究報告, 21, 33-49
Issue Date	1959-05-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40654
Type	departmental bulletin paper
File Information	21_33-50.pdf



温度伝播率測定に関する一考察

岡 垣 理

(昭和 34 年 2 月 27 日受理)

A Contribution on Thermal Diffusivity Measurement

Osamu OKAGAKI

Abstract

Thermal diffusivity of solid is ordinary measured by a temperature change in a test specimen regarded as a semi-infinite body under the conditions that the surface of the specimen is cooled at a constant temperature and the distribution of temperature of the specimen is kept uniform before starting the cooling.

In practice, however, considerable errors are included in measured values owing to the influences of the size of specimen and the thermal resistance on the surface of specimen, unless the location of a thermometer and the test duration are properly selected.

In this paper, these influences upon the measured values are analyzed theoretically, and the following results are derived:

1) The influence of the thermal resistance on the surface of the specimen upon the measurement can be corrected by a trial and error method by using Fig. 4 and equation (8) provided that the temperature change on and below the surface can be measured.

2) The influences of the side and the end of the specimen upon the measurement can be evaluated by equations (18), (19) and equations (22), (23), respectively. When an error within 1% is intended to be realized, the appropriate test duration and location of the thermometer for the size of specimen can be obtained diagrammatically by use of Figs. 5 and 6.

目 次

I. ま え が き	2
II. 測定法の原理	2
III. 供試材の表面条件に対する補正	4
IV. 供試材の寸法の影響	7
IV-1. 供試材側面の影響	7
IV-2. 供試材端面の影響 (厚さの影響)	9
V. 実 測 例	11
V-1. 供試材の寸法についての検討	12
V-2. 温度伝播率の算定	12
V-3. 表面条件の検討	13

VI. む す び	14
文 献	15
附 録	16

I. ま え が き

熱伝導現象は、物体内の温度が時間的に変化する非定常状態と、時間的温度変化を伴わない定常状態の両様に区別して解析されるのが普通である。工学上遭遇する熱伝導問題は、多少の精度は犠牲にしても、その取り扱いが簡単であるため、定常状態と看做して近似的に解決される場合が多い。しかし、物体の加熱、あるいは冷却の過程を扱う場合は勿論のこと、実際には、気温、気流、日射、その他の周囲条件が時間的に変動する等のため、定常状態と仮定したことによつて著しい誤差を生ずることも少なくないので、このような場合には非定常状態としての取り扱いが必要となつてくる。また、一つの伝熱系が、定常状態にあると看做し得るか看做し得ないかということは、非定常熱伝導の立場から検討し決定しなければならない。

非定常熱伝導問題を解析するためには、一般に、物体内の温度波の伝播速度を規定する温度伝播率を与えなければならない。定常熱伝導の場合、必要な熱定数が熱伝導率であり、その測定法が重要な一部門をなすと同様、温度伝播率の測定もまた基本的且つ重要な問題となる。

温度伝播率 κ [m^2/h] には、衆知のごとく、熱伝導率 λ [$\text{kcal}/\text{h}\cdot\text{m}\cdot^\circ\text{C}$] と比熱 c [$\text{kcal}/\text{kg}\cdot^\circ\text{C}$] および比重 ρ [kg/m^3] の間に、 $\kappa = \frac{\lambda}{c\cdot\rho}$ の関係があり、従つて、 κ を求める方法は λ , c , ρ をそれぞれ別個に測定して κ を間接的に決める方法と、直接 κ を測定する方法の二通りに分けられる。 κ を直接的に求めるためには、幾何学的に単純な形状をした供試材を加熱または冷却したときの温度変化より κ を算定したり、周期的温度変化を与えて試料内の温度波の位相差または振幅の減衰割合から κ を求める方法等が従来用いられている。また最近では、O. Krischer¹⁾ が平行平板試料に対し特殊な境界条件を与えて κ を測定する方法を発表している。

本報告は、このうち比較的簡単および装置の簡単とみられる、半無限固体の冷却曲線より直接 κ を求める方法につき、実際に測定を行う際生じ得る誤差を検討し、その補正法を述べたものである。

II. 測定法の原理

まず、この測定法の原理を簡単に示しておく。初めの温度が一様に θ_0 の半無限固体を考え、この表面をある時刻以後温度 0 に保つとき、固体内任意点の温度変化は、熱伝導に関する基礎偏微分方程式 (1 次元)

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad x \geq 0 \quad (1)$$

をつぎの初期および境界条件のもとで解くことによつて得られる。

$$t = 0, \quad \theta = \theta_0 \quad (2)$$

$$x = 0, \quad \theta = 0 \quad (3)$$

結果²⁾ は次式で表わす通りである。

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \quad (4)$$

ここで、 θ = 半無限固体内の温度 [$^{\circ}\text{C}$], x = 固体内任意点と表面との距離で、表面を原点にとる [m], t = 冷却開始後の経過時間 [h], κ = 固体の温度伝播率 [m^2/h]. また、 erf は誤差函数を表わし、

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\eta^2} d\eta.$$

なお、誤差函数の数値は多くの函数表³⁾ に掲げられている。

従つて、冷却開始後任意時間 t , 固体内任意点 x における温度 θ および初期温度 θ_0 を測定すれば、式(4)からつぎのように温度伝播率 κ は算定できる。例えば、固体内温度が冷却により初期温度の半分に降下したとき、すなわち、 $\frac{\theta}{\theta_0} = 0.5$ の場合式(4)は

$$\frac{\theta}{\theta_0} = 0.5 = \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}$$

となるが、右辺の自変数は函数表より $\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} = 0.477$ と与えられるので

$$\kappa = \left(\frac{x}{0.477 \times 2\sqrt{t}} \right)^2$$

となつて、 x と t の値を代入すれば直ちに κ は計算できる。他の $\frac{\theta}{\theta_0}$ 値に対しても同様である。

以上が、当測定法の原理であるが、上記のような測定条件を厳密に実現することはつぎの二つの理由により困難であり、このことが式(4)に基づいて算定される κ 値に誤差を生ずる原因ともなる。すなわち、その一つは、實際上、供試材の寸法は有限であり半無限試料を得ることはできない、他の一つは、冷却開始後供試材表面を一定温度に保ち続けることがむずかしいという点である。このうち、前者については、供試材の寸法、測温点の位置および測定時間の関係を適当に選らねば、 κ に及ぼす試料寸法の影響は無視できるが、後者については、表面条件を補正しない限り一般にはその影響を無視することはできない。これら2点に対する検討は、従来、余り深く行われていないようである。例えば、試料の寸法の影響については、測温点の位置および表面の大きさを変えてみて測定値が一致するかどうかを調べるべきであると言われている⁴⁾。また、表面条件については、できるだけ冷却用流体(後述のごとく、冷却用低熱源としては普通水などの液体を用いる)を強く攪拌し、試料表面と流体間の熱抵抗を少なくすべきであり、また測温点を深いところに採ることにより、測定値に対する熱抵抗の影響を少なくすることもできると述べているに過ぎない⁵⁾。

以下、供試材の表面条件に対する補正を述べ、併せて、試料寸法の影響につき検討を加える。

III. 供試材の表面条件に対する補正

半無限の供試材表面に一定温度の低熱源 (例えば氷片を混入した 0°C の水) を接触させて表面温度を一定に保つことができれば, 上記の通り式 (4) より κ は正しく求まる。しかし実際には, この接触面に熱抵抗が存在するため, 表面温度は初めの短時間, 低熱源温度よりもかなり高い温度を示し, また低熱源と供試材表面の温度が等しくなるのは理論的には無限時間を要する。従つて, 式 (4) に基づいて κ を算定する際, 実際の表面条件を考慮に入れて補正を行わなければならない。

通常, 低熱源として一定温度の水または氷片を混入した水を用い, これを試料面の上で流動または攪拌させる方式を採っている。また, 吸水性の供試材に対しては, なるべく熱容量の小さい, そして熱伝導率の大きい耐水性薄膜を試料面に密着させ, 吸水による材質の変化を防いでいる。このような状態で, 供試材から流体へ熱が伝わる際の全熱抵抗 R [$\text{m}^2\cdot\text{h}\cdot^{\circ}\text{C}/\text{kcal}$] は, 供試材と防水膜間の接触熱抵抗 $\frac{1}{a_1}$ [$\text{m}^2\cdot\text{h}\cdot^{\circ}\text{C}/\text{kcal}$], 防水膜内の熱伝導抵抗 $\frac{L}{\lambda_f}$ [$\text{m}^2\cdot\text{h}\cdot^{\circ}\text{C}/\text{kcal}$] (ここで, L , λ_f はそれぞれ防水膜の厚さ [m] および熱伝導率 [$\text{kcal}/\text{h}\cdot\text{m}\cdot^{\circ}\text{C}$]), および防水膜と低熱源用流体間の熱伝達抵抗 $\frac{1}{a_2}$ [$\text{m}^2\cdot\text{h}\cdot^{\circ}\text{C}/\text{kcal}$] の和で表わされる (Fig. 1 参照)。すなわち

$$R = \frac{1}{a_1} + \frac{L}{\lambda_f} + \frac{1}{a_2}.$$

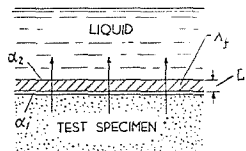


Fig. 1. Thermal resistances on the surface of specimen.

いま, 全熱抵抗 R の逆数を a [$\text{kcal}/\text{h}\cdot\text{m}^2\cdot^{\circ}\text{C}$] と置けば, この場合の表面条件として次式が成立する。ただし, 防水膜の厚さは薄いのでその熱容量を無視する。なお, 防水膜のないときは, a は試料と流体間の熱伝達率を表わすことになる。この a を用いて境界条件は

$$x = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = h\theta. \quad (5)$$

ここで, $h = \frac{a}{\lambda}$ [$1/\text{m}$], λ = 供試材の熱伝導率 [$\text{kcal}/\text{h}\cdot\text{m}\cdot^{\circ}\text{C}$]. $h \rightarrow \infty$ のとき熱抵抗は 0, $h \rightarrow 0$ のとき熱抵抗は無限大, すなわち断熱されていることを表わす。

前記の境界条件 (3) の代りに (5) を用いて求めた温度解⁶⁾ は次式で表わされる。

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \text{erf} \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} + e^{hx + h^2 \kappa t} \text{erfc} \left\{ \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} + h\sqrt{\kappa t} \right\} \quad (6)$$

$$= \text{erf} \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} + e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}} e^{\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} + h\sqrt{\kappa t}\right)^2} \text{erfc} \left\{ \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} + h\sqrt{\kappa t} \right\} \quad (6')$$

ここで, $\text{erfc}(z) = 1 - \text{erf}(z)$ = 余誤差函数。

上式の右辺第 2 項は, 式 (4) と比較することにより, 試料と流体間の熱抵抗の影響を示す項であることが判る。

また、とくに表面温度 θ_s は、上式において $x = 0$ と置き t について漸近展開*すれば、次式のごとき型で表わされる。

$$\frac{\theta_s}{\theta_0} = e^{\frac{h^2 \kappa t}{\pi}} \operatorname{erfc}(h\sqrt{\kappa t}) \quad (7)$$

$$= \frac{1}{h\sqrt{\pi \kappa t}} \left[1 - \frac{1}{2h^2 \kappa t} + \frac{3}{4h^4 \kappa^2 t^2} - \dots \right] \quad (7')$$

ここで、 $h \rightarrow \infty$ の極限、試料と流体間に熱抵抗のない場合、では $\frac{\theta_s}{\theta_0} = 0$ となる。なお、 $t \rightarrow \infty$ の極限においては、 h には無関係に $\frac{\theta_s}{\theta_0} = 0$ 、すなわち固体内温度は低熱源用流体と等温度になるが、これは両者の間の熱交換が絶えることを意味する。

さて、上式(7')において、

$$\frac{1}{2h^2 \kappa t} \ll 1$$

を満足するような t の範囲に対しては近似的に次式が成り立つ。

$$\frac{\theta_s}{\theta_0} \sqrt{t} = \frac{1}{\sqrt{\pi} (h\sqrt{\kappa})} = \text{一定} \quad (8)$$

Fig. 2 は式(7)に基づき $\frac{\theta_s}{\theta_0} \sqrt{t}$ と t の関係を示したもので、 t の増加に伴ない $\frac{\theta_s}{\theta_0} \sqrt{t}$ が次第に一定

値 $\frac{1}{\sqrt{\pi} (h\sqrt{\kappa})}$ に収斂する模様を表わしたものである。このように、ある程度時間が経過した後、式(8)が成立する筈であり、従つて、供試材の表面温度を測定することによつて実験的に $h\sqrt{\kappa}$ は求まることになる。

$h\sqrt{\kappa}$ の値が決まれば、式(6)の右辺は $\frac{x}{\sqrt{\kappa}}$ をパラメータとして $\frac{\theta}{\theta_0}$, t -関係が計算でき、式(4)と(6)との偏差、言い換えれば供試材表面の熱抵抗の影響、をつぎのようにして補正することができる。Fig. 3 は式(4)および(6)で表わされる温度変化の模様を示したものであるが、この図から判るように、供試材内任意点 x の温度がある温度まで降下するに要する時間は、供試材表面に熱抵抗のな

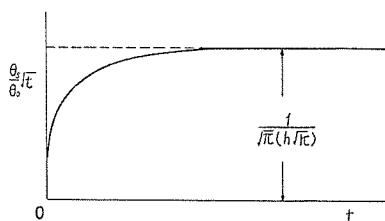


Fig. 2. A temperature change on the surface of specimen. From this curve, $h\sqrt{\kappa}$ can be obtained.

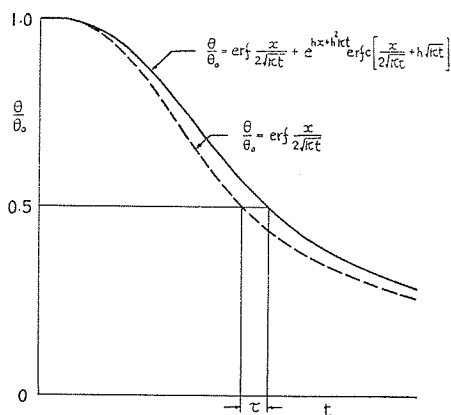


Fig. 3. Temperature changes in a specimen. Full line denotes the temperature change under the condition that a thermal resistance exists on the surface, and broken line no thermal resistance.

* $e^{z^2} \cdot \operatorname{erfc}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2z^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 z^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 z^7} + \dots \right)$.

また、 $\lim_{z \rightarrow \infty} e^{z^2} \cdot \operatorname{erfc}(z) \rightarrow 0$.

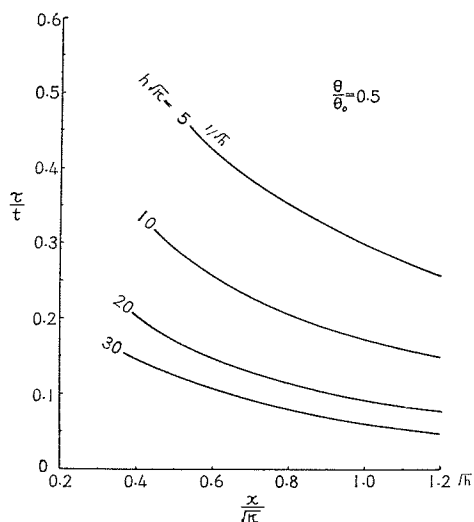


Fig. 4-a. $\frac{\tau}{t}, \frac{x}{\sqrt{\kappa}}$ -relations for $\frac{\theta}{\theta_0} = 0.5$

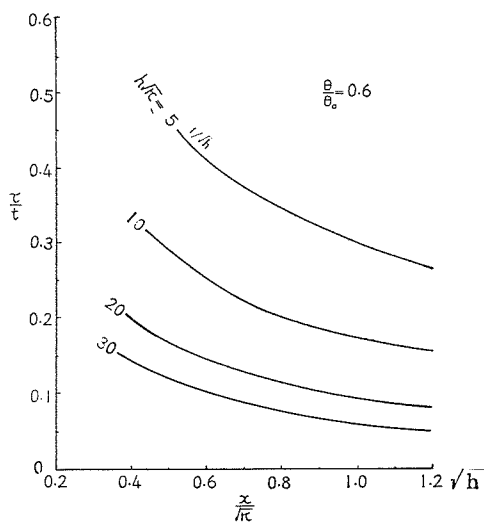


Fig. 4-b. $\frac{\tau}{t}, \frac{x}{\sqrt{\kappa}}$ -relations for $\frac{\theta}{\theta_0} = 0.6$

い場合よりも熱抵抗のある場合の方が $\tau[h]$ だけ遅れる。従つて、この時間遅れ τ が判れば式(6)を次式のように置き換えることによつて、表面に熱抵抗のない場合の式(4)がそのまま適用できることになる。

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} + e^{hx+h^2\kappa t} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} + h\sqrt{\kappa t} \right\} = \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\kappa(t-\tau)}} \quad (9)$$

Fig. 4 は、式(9)から $\frac{\theta}{\theta_0}$ および $h\sqrt{\kappa}$ をパラメータとして $\frac{\tau}{t}$ と $\frac{x}{\sqrt{\kappa}}$ の関係を求めたものであり、同図 a, b, c はそれぞれ $\frac{\theta}{\theta_0}$ に 0.5, 0.6, 0.8 を与えて計算した結果を示している。図は縦軸に $\frac{\tau}{t}$ 、横軸に $\frac{x}{\sqrt{\kappa}}$ を採っているが、 $h\sqrt{\kappa}$ の大きい程、また $\frac{x}{\sqrt{\kappa}}$ の大きい程 $\frac{\tau}{t}$ は小さくなり、 $h\sqrt{\kappa} \rightarrow \infty$ の極限、すなわち熱抵抗のないときは、 $\frac{x}{\sqrt{\kappa}}$ には無関係に $\frac{\tau}{t} = 0$ となつて横軸に一致する。このようにして、供試材の表面熱抵抗の影響を表わす時間遅れ τ は、同じ熱抵抗に対しては供試材の κ が大きい程また同じ κ の供試材に対しては測温点が表面から離れる (x の値が大きい) 程少ないことになる。

さて、同図を用いれば、つぎのような順序で、で試誤法により κ を補正することができる。まず、実測した表面温度の変化から、

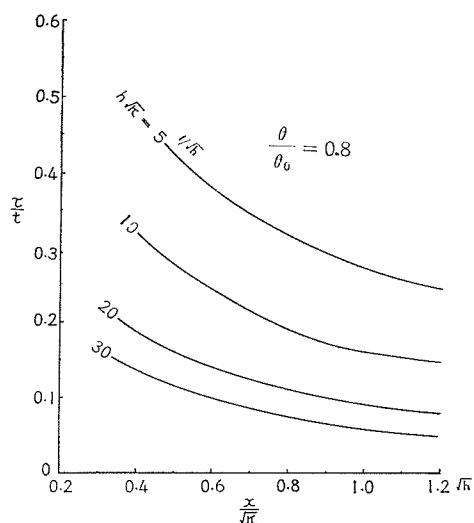


Fig. 4-c. $\frac{\tau}{t}, \frac{x}{\sqrt{\kappa}}$ -relations for $\frac{\theta}{\theta_0} = 0.8$

Fig. 2 のごとく $\frac{\theta_s}{\theta_0}\sqrt{t}$, t -関係を求め, $\frac{\theta_s}{\theta_0}\sqrt{t}$ の一定値を見出し式 (8) から $h\sqrt{\kappa}$ を算定する。また第 1 近似として, さきに述べたような方法で, 実測した試料内の温度変化 $\frac{\theta}{\theta_0}$ に基き, 式 (4) から κ を算出する。つぎに Fig. 4 より, これら $h\sqrt{\kappa}$ と $\frac{x}{\sqrt{\kappa}}$ とから $\frac{\tau}{t}$ を求め, この τ を式 (9) すなわち

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \text{erf} \frac{x}{2\sqrt{\kappa(t-\tau)}} \quad (9')$$

に代入し, 新たに第 2 近似として κ を計算する。この場合, 勿論, $\frac{\theta}{\theta_0}$ には実測値を代入する。さらに, 第 2 近似の κ を基にして Fig. 4 より再び τ を求め, 以下同様の操作を繰返して κ の第 3, 4, …… 近似を算出すれば, これらは逐次一定値に収斂する。このようにして, 供試材表面の熱抵抗に対する κ の補正ができることになり, また式 (8) を用いれば h も算定できるので, 表面の熱抵抗を評価することも可能となる。

IV. 供試材の寸法の影響

実際に測定を行う場合は, 通常, 供試材をあらかじめ冷却面 (低熱源) の寸法に応じた大きさのブロックに成型する。この場合, 供試材の側面が完全に熱絶縁されておれば供試材内の熱流は 1 次元流れとなる。しかし単に保温材によつて側面を包む程度では完全な断熱を期待することはできず, また, 供試材の周囲に適当な補償熱源を設けること等も考えられるが, その調整は極めて複雑となろう。

つぎに, 供試材の厚さを無限に厚く採ることができないため, 試料端の影響が表われ, 半無限試料に対するものとは異なつた温度変化を示すことになる。以下, これら 2 点が温度伝播率の測定に如何なる影響を及ぼすか, そして, その影響を所要の範囲に押えるためには, 供試材の寸法と測定時間または測温点の位置との関係をどのように選べばよいかについて述べる。

IV-1. 供試材側面の影響

上述のごとく, 有限の大きさの供試材では, 側面を完全に断熱しない限り熱流は 1 次元流れとならず, 1 次元流を仮定した基本式 (4) により温度伝播率を算定するためには, 側面と周囲媒体との間の熱交換を考慮しなければならない。低熱源により試料面が冷却されると, 時間の経過とともに試料と周囲媒体間の温度差は大きくなり, 周囲からの受熱に基づく温度波が内部へ進行し, 測温点における温度変化に影響を与える。その結果, 式 (4) より算定される温度伝播率に誤差を生ずることになる。周囲条件が同じであれば, 試料径の太いものほど, また測定を短時間で終えるほど試料内温度変化に及ぼす側面の影響は少なくなる。以下, 側面の影響による測定誤差を所要範囲に留めるための, 供試材の太さ, 熱的特性値 (温度伝播率, 熱伝導率など), 所要測定時間, 測温点の位置および周囲媒体と側面との間の熱抵抗など, 諸量間の関係を定量的に求める。

いま、供試材を半無限円柱と看做し、端面は低熱源により一定温度で冷却され、側面は初期温度と等温度の周囲流体から受熱している場合を仮定する。これは、恒温室または恒温槽内で、試料側面に保温を施さない裸のままの状態で行うような場合に相当するが、実際には、側面を保温材で囲むため、このような条件は酷しいものとなり、誤差評価は安全に行えるわけである。この場合、基礎微分方程式と初期、境界両条件は、円柱座標を用いてつぎのごとく与えられる。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right), \quad 0 < r < a, \quad x > 0 \quad (10)$$

$$t = 0, \quad \theta = \theta_0 \quad (11)$$

$$x = 0, \quad \theta = 0 \quad (12)$$

$$r = a, \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = -h_0(\theta - \theta_0) \quad (13)$$

ここで、 r = 半径座標 [m], a = 円柱状試料の半径 [m], x = 試料の厚さを表わす座標で冷却面を原点にとる [m], $h_0 = \frac{a_0}{\lambda}$ [1/m], a_0 = 試料の側面と周囲流体(例えば空気)間の熱伝達率 [kcal/h·m²·°C], λ = 試料の熱伝導率 [kcal/h·m·°C]。解は Carslaw & Jaeger⁷⁾ によりつぎのごとく求められている。

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{\theta_0} = 1 - \frac{h_0}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(r a_n)}{(h_0^2 + a_n^2) J_0(a a_n)} & \left[2e^{-a_n x} + \left\{ e^{x a_n} \operatorname{erfc} \left[a_n \sqrt{\kappa t} + \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right] \right. \right. \\ & \left. \left. - e^{-x a_n} \operatorname{erfc} \left[a_n \sqrt{\kappa t} - \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right] \right\} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、 a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) は次式を満足する正根で、小さいものから順に $a_1, a_2, \dots$ 。

$$a J_0(a a_n) = h_0 J_1(a a_n) \quad (15)$$

また、 J_0, J_1 はそれぞれ第 1 種の 0 次および 1 次の Bessel 函数を示す。

とくに、 $h_0 \rightarrow \infty$ では供試材の側面は周囲流体と等温度になり、側面の影響は最大となるが、この場合、温度変化は次式のように表わされる (附録 I)。

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{\theta_0} = 1 - \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(r \beta_n)}{\beta_n J_1(a \beta_n)} & \left[e^{-\beta_n x} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} - \beta_n \sqrt{\kappa t} \right] \right. \\ & \left. + e^{\beta_n x} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} + \beta_n \sqrt{\kappa t} \right] \right] \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、 β_n ($n = 1, 2, \dots$) は次式を満足する正根である。

$$J_0(a \beta_n) = 0 \quad (17)$$

普通、測温位置は試料中心軸上に選らばれるので、式(14)で $r = 0$ と置いたものについて検討すればよい。式(14)の $J_0(r a_n)$ を 1 と置いたものが中心軸上の温度変化を表わす ($J_0(0) = 1$)。このようにして得られる中心軸上の温度変化が側面の影響のない場合の温度変化に等しいと看做し式(4)から温度伝播率を求めると、それは側面の影響のため正しい値とはならない。こ

れを κ' で表わそう。すなわち、つぎの関係

$$1 - \frac{h_0}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(h_0^2 + a_n^2) J_0(a a_n)} \left[2e^{-a_n \alpha \zeta} + \left\{ e^{a_n \alpha \zeta} \operatorname{erfc} \left[a_n \sqrt{\kappa t} + \frac{a \zeta}{2\sqrt{\kappa t}} \right] - e^{-a_n \alpha \zeta} \operatorname{erfc} \left[a_n \sqrt{\kappa t} - \frac{a \zeta}{2\sqrt{\kappa t}} \right] \right\} \right] = \operatorname{erf} \frac{a \zeta}{2\sqrt{\kappa' t}} \quad (18)$$

を満足する κ と κ' は等しい値を示さず、試料側面から熱の流入を受けるため両者に差異を生ずることになる。ここで、上式中 $\zeta = \frac{x}{a}$ 。

従つて、供試材の太さが有限である場合、基本式(4)を用いて温度伝播率を算定する際に生ずる誤差 ϵ_1 は次式により評価できる。

$$\epsilon_1 = 1 - \frac{\kappa'}{\kappa} \quad (19)$$

なお、 $h_0 \rightarrow \infty$ という極限においては、式(16)より(18)同様の表式を求め、(19)により誤差を評価することができる。

Fig. 5 は式(18)および(19)より、誤差 ϵ_1 が1%となるような試料の半径 a 、測温点の深さ $\zeta \left(= \frac{x}{a} \right)$ 、測定時間 t 、試料の温度伝播率 κ の間の関係を、側面の表面条件 $h_0 \left(= \frac{a_0}{\lambda} \right)$ をパラメータとして求めた結果を表わしたもので、縦軸に ζ 、横軸に $\frac{a}{\sqrt{\kappa t}}$ という無次元数を取り、 $h_0 = 2.5, 5, \dots, \infty$ [1/m] なる6つの場合の関係曲線を示したものである。とくに、 $h_0 = 0$ 、すなわち断熱されている場合は座標軸がこれに対応する。同図から明らかなように、同一試料につきある定つた時間内で

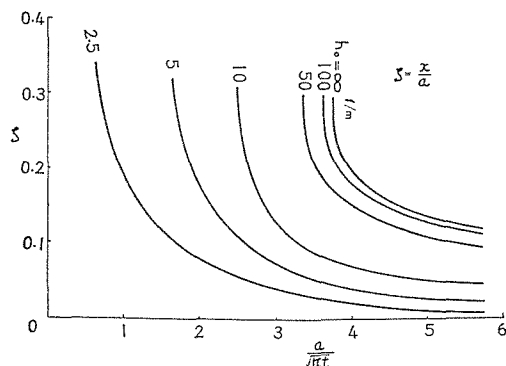


Fig. 5. $\frac{x}{a}$, $\frac{a}{\sqrt{\kappa t}}$ -relations when the error caused by the side influence of specimen is intended to keep within 1%.

測定を行う際は、側面の熱伝達率 a_0 大きく (h_0 大きく)、周囲からの受熱量の大きいほど、測温点は冷却面から深く選ぶべきであり、また、ある定つた測温点および表面条件に対しては、 $\frac{a}{\sqrt{\kappa t}}$ を適当に選らばなければ測定誤差を所定の範囲に押えることができないことになる。例えば、表面条件 $h_0 = 10$ [1/m]、および測温位置 $\zeta = 0.1$ という場合、誤差 ϵ_1 を1%以下に押えるためには、 $\frac{a}{\sqrt{\kappa t}} > 3.3$ となるように測定時間 t を選ばねばならない。また、温度伝播率の大きい試料ほど、短時間に測定を終えるか、または測温位置を深いところ採るべきである。いずれにしても、測定前あらかじめ供試材の κ を仮定し、周囲条件その他を考慮し、Fig. 5 に基づいて所要測定時間または測温箇所等を選定すべきである。

IV-2. 供試材端面の影響 (厚さの影響)

つぎに、供試材の厚さが有限である場合、試料端面(低熱源側とは反対の試料面)の影響に

より、厚さが無限に厚いと仮定した式(4)から求められる κ 値は誤差を伴うことになるが、その誤差を所要の範囲に留めるためには厚さと測定時間または測温位置の関係をどのように採ればよいかについて述べる。

いま、供試材を無限の拡がりをもつ、厚さ l [m] の平行平板とし、1次元熱流の場合を考える。試料端面の条件としては、実際よりも酷しい条件を課して、端面が断熱されていると仮定すればその影響は充分評価できる。

そこで、境界条件

$$x = l, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad (20)$$

および式(3)と初期条件を表わす式(2)によつて基礎微分方程式(1)を解けば、試料内の温度変化は次式のように求まる。なお、この式の誘導は附録(II)に掲げてある。

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \operatorname{erf} \frac{\xi l}{2\sqrt{\kappa t}} - \left[\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{erfc} \frac{(2n+\xi)l}{2\sqrt{\kappa t}} + \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{erfc} \frac{\{2(n+1)-\xi\}l}{2\sqrt{\kappa t}} \right] \quad (21)$$

ここで、 $\xi = \frac{x}{l}$ 。

式(4)と(21)を比較してみても判る通り、上式右辺第2, 3項は供試材の厚さが有限であるための附加項である。勿論 $l \rightarrow \infty$ の極限ではこの級数項は0に収斂し、式(4)と同じになる。このような端面の条件が、式(4)に基づく κ の算定値に如何なる影響を及ぼすかを知るためには、前述の側面の影響を考えたときと同様に、上式の右辺を

$$\operatorname{erf} \frac{l\xi}{2\sqrt{\kappa t}} - \left[\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{erfc} \frac{(2n+\xi)l}{2\sqrt{\kappa t}} + \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{erfc} \frac{\{2(n+1)-\xi\}l}{2\sqrt{\kappa t}} \right] = \operatorname{erf} \frac{\xi l}{2\sqrt{\kappa'' t}} \quad (22)$$

のごとく置いて、

$$\varepsilon_2 = 1 - \frac{\kappa''}{\kappa} \quad (23)$$

を求めればよい。Fig. 6 は、上式(22)および(23)より求めた、誤差 ε_2 を1%に押えるための測温点の位置 $\xi \left(= \frac{x}{l} \right)$ と、供試材の厚さ l 、温度伝播率 κ および測定時間 t との関係を示したもので、縦軸に ξ 、横軸に $\frac{l}{\sqrt{\kappa t}}$ を採っている。一般に、 ε_2 は l の大きいほど、 κ および t の小さいほど、また ξ の小さいほど少なくなるが、図から判る通り、 $\frac{l}{\sqrt{\kappa t}}$ の値にある限界値が存在し、例えば、 ε_2 を1%以下に留めるためには少なくとも $\frac{l}{\sqrt{\kappa t}}$ を約2.5以上に選らばねばならず、この値以下の $\frac{l}{\sqrt{\kappa t}}$ に対しては ξ を如何に小さくしても $\varepsilon_2 < 1\%$ に保つことはできない。このように、測定に際し、あらかじめ試料の κ 値を仮定し、厚さと測定時間の関係を適当に選らび、ついで、この $\frac{l}{\sqrt{\kappa t}}$ 値に応じて測温位置を決めればよい。例えば、測定条件を $\frac{l}{\sqrt{\kappa t}} = 3$ と選らんだ場合、 $\xi < 0.57$ とすれば $\varepsilon_2 < 1\%$ の誤差範囲内で測定できることになる。

以上、供試材の寸法が有限であることにより生ずる測定誤差について検討を加えたが、与

えられた寸法の供試材に対し、側面および端面の影響を少なくするためには、測温点の位置を定められた範囲内に選らび短時間内に測定を終えるようにすればよい。すなわち、側面の影響を 1% 以内に留めるためには、Fig. 5 より得られる ξ に基づき測温点の深さを $x > a\xi$ 、また端面（厚さ）の影響に対しては Fig. 6 より求まる ξ に基づき $x < l\xi$ とすべきで、結局、両者の影響を考慮する場合、測温位置を $a\xi < x < l\xi$ の範囲内に採らねばならないことになる。換言すれば、Figs. 5, 6 の曲線は、測定誤差に及ぼす試料寸法の影響を

1% 以内に押えるため必要な測温位置の上、下限を示すものである。勿論、測定時間を短く選らぶほどこの範囲は広がるが、他方、温度伝播率 κ の大きい供試材ほど範囲は狭くなるので、この点とくに κ 値の大きい材料に対しては注意を払わなければならない。

V. 実 測 例

つぎに、叙上の計算結果を適用した 1 実測例を掲げる。Fig. 7 は測定装置の略図である。供試材は、重量配合比 1:2.5、水・セメント比 0.56、見掛け比重 2130 kg/m^3 の円柱状モルタルであり、4 日間の水中養生を行った後、湿潤状態で測定した。その寸法は、供試体作製上の都合で既存のコンクリート試験片製作用型枠 (JIS A 1108, 「コンクリートの圧縮試験法」による) を用いたので、直径 15 cm、高さ 30 cm である。試料の温度変化を測定するための熱電対 (0.23 mm 径の銅・コンスタンタン熱電対) は、モルタルを型枠に打ち込む際、その中心軸上、端面から深さ 0 および 2.5 cm の 2 点に側方から埋め込まれ、熱電対素線を通しての熱伝導に基づく測定誤差の介入を避けた。供試材の側面および底面を保温材で包み、これを室内に放置、一樣な温度となつた後、氷片と水を入れたビニール製容器を試料表面に乗せ冷却を開始する。この容器は側面を鉄板で補強し、底に 0.2 mm 厚さのビニール布を張りつけたもので、試料面上の熱抵抗を少なくするため容器内の水に攪拌を与える。冷却開始と同時に、試料の温度降下を計測し、この温度変化から既述の要領で温度伝播率を算定するわけであるが、その前に、試料の寸法と測温位置および所要時間との関係を検討して置く。

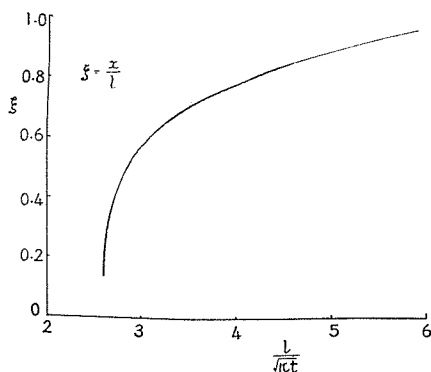


Fig. 6. $\frac{x}{l}, \frac{l}{\sqrt{\kappa t}}$ -relation when the error caused by the end influence is intended to keep within 1%.

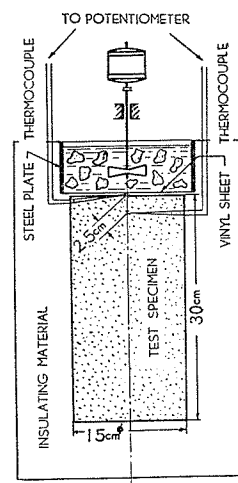


Fig. 7. Schematic diagram of testing apparatus.

V-1. 供試材の寸法についての検討

初め側面の影響を検討する。この場合、試料側面は保温材で囲まれているが、いま、試料は裸のままで静止空気の中に置かれていると仮定すれば、上掲 Fig. 5 により誤差評価を行うことができる。本実験では、測温位置 $x = 0.025$ m, 試料半径 $a = 0.075$ m, 試料の熱伝導率^{*} $\lambda = 2.13$ kcal/h·m·°C, また後述のごとく温度伝播率 $\kappa = 0.0017$ m²/h と求まり、試料側面の熱伝達率^{**} は $\alpha_0 = 3$ kcal/h·m²·°C と概算される。これら諸値を用い、試料側面の表面条件は $h_0 = \frac{\alpha_0}{\lambda} = 1.4$ 1/m, また $\zeta = \frac{x}{a} = 0.33$ となる。いま、 α_0 を大きく見積つて $h_0 = 2.5$ としても、Fig. 5 より、側面の影響による誤差 ϵ_1 を 1% に留めるための測定時間は $\frac{a}{\sqrt{\kappa t}} = \frac{0.075}{\sqrt{0.0017t}} \doteq 0.8$, すなわち $t = 3.3$ h と求まり、かなり長時間に亘つて側面の影響は押えられることになる。

つぎに、試料端の影響(厚さの影響)を検討する。供試材の厚さが $l = 0.3$ m であることから $\xi = \frac{x}{l} \doteq 0.08$ であり、また上述の許容測定時間 $t = 3.3$ h を使つて計算すれば $\frac{l}{\sqrt{\kappa t}} = 4$ となるので、Fig. 6 の関係に基づき、当供試材に対しては厚さの影響はほとんどなく、半無限試料と看做し得ることが判かる。

このように、大ざっぱに見積つて、約 3 時間以内で測定を終えるようにすれば、試料寸法が κ 測定値に及ぼす影響を 1% 以内に押えることができるわけである。しかし、實際上、測定に要する時間は高々 1 時間程度であるため、この寸法の影響は一応無視して差支えない。

V-2. 温度伝播率の算定

すでに述べた通り、温度伝播率を算出するためには、まず、試料表面の温度変化より $h\sqrt{\kappa}$ を求めることから始めなければならない。Fig. 8 において実線で示した 2 本の曲線は、試料表面 ($x = 0$) および表面から深さ 2.5 cm の点 ($x = 0.025$ m) の温度変化、 $\frac{\theta_s}{\theta_0}$ および $\frac{\theta}{\theta_0}$ の実測値を表わしている。なお、この場合、初期温度は $\theta_0 = 19.7^\circ\text{C}$ (室温) である。Fig. 9 は実測温度変化に基づき $\frac{\theta_s}{\theta_0} \sqrt{t}$, t -関係を示したものであるが、 $t > 15$ min の範囲で一定値 0.06 となり、これは $\frac{1}{\sqrt{\pi} (h\sqrt{\kappa})}$ と等しいことから $h\sqrt{\kappa} = 9.4$ と計算される。そうすると、試料表面の熱

* 当試料に対する熱伝導率は、温度伝播率の測定と同時に、本学部熱機関研究室で円筒法によつて測定された。斎藤武, 林香織: コンクリートの熱伝導率。日本機械学会北海道地方講演会, 昭-33. 10。または、斎藤武, 岡垣理: 湿つた物質の伝熱特性。日本機械学会誌, Vol. 62, No. 484 (昭 34-5) [投稿中]。

*** 静止空気中に置かれた垂直円柱の側面における熱伝達率 α_0 は、円柱と周囲空気との温度差 $\Delta\theta$ および円柱の高さが極度に大きくない場合は、水平に置かれた円柱に対する伝達率 α_c の 70% 程度と見てよい [機械工学便覧 (昭和 12 年版) p. 1034.]。

$$\text{ここで, } \alpha_c = 1.02 \sqrt[4]{\frac{\Delta\theta}{d}} \quad [\text{kcal/h}\cdot\text{m}^2\cdot^\circ\text{C}]$$

ただし, d = 円柱の直径 [m]。

いま、上式に $\Delta\theta = 30^\circ\text{C}$, $d = 0.15$ m を代入すると、水平円柱に対し $\alpha_c = 3.8$ kcal/h·m²·°C。従つて、垂直円柱に対しては $\alpha_0 = 2.7 \div 3$ kcal/h·m²·°C と概算される。

抵抗に対する補正 τ は、前掲 Fig. 4
において、 $h\sqrt{\kappa} = 9.4$ に相当する $\frac{\tau}{t}$,

$\frac{x}{\sqrt{\kappa}}$ -関係から求めることができる。

いま、Fig. 4-aを用いて補正すること
とすれば、Fig. 8 に示す実測温度の
うち $\frac{\theta}{\theta_0} = 0.5$ について考えればよい。

まず、 κ の第1近似として、 $\frac{\theta}{\theta_0} = 0.5$
に対する経過時間は Fig. 8 より $t =$
33 min = 0.55 h, また測温点の位置
は $x = 0.025$ m であるから、式(4)よ
り直ちに $\kappa = 0.00125$ m²/h が求まる。

この κ 値により計算される $\frac{x}{\sqrt{\kappa}} = 0.77$

と、上に求めた $h\sqrt{\kappa} = 9.4$ に基づき、Fig. 4-a より
 $\frac{\tau}{t} = 0.22$, すなわち $\tau = 7.2$ min = 0.12 h が得られ

る。この τ 値を式(9)に代入して κ を算出すると κ
= 0.00160 m²/h となる。これが κ の第2近似であ
る。さらに、この κ 値を用いて定まる $\frac{x}{\sqrt{\kappa}} = 0.63$ を

基にして $\frac{\tau}{t} = 0.25$, すなわち $\tau = 8.2$ min = 0.137

h となるので、これを再び式(9)に入れ、第3近似
として $\kappa = 0.00166$ m²/h が得られる。同様の操作で

第4, 5, ……近似が計算できるわけである。この例で

は、第4近似ですでに収斂してしまい、結局、 κ の最終値として $\kappa = 0.00167$ m²/h が求められ
るが、表面条件を補正しないで求めた値(第1近似)は約25%の誤差を含むという結果になる。

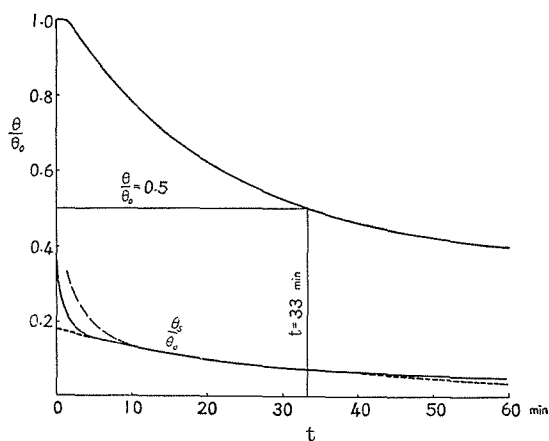


Fig. 8. Temperature changes in a specimen (mortal).

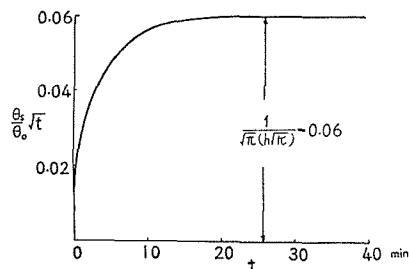


Fig. 9. The temperature change on the surface of specimen (mortal). From this curve, $h\sqrt{\kappa} = 9.4$ can be obtained.

V-3. 表面条件の検討

さきに仮定した表面条件(5)が実際に妥当であるかどうかを検討する目的で、式(7)または(7')にいま求めた諸値を代入して表面の温度変化を計算すると、Fig. 8 下位の破線のごとく表わされ、初め 10 min 間は実測値よりも可なり高い温度を示すことになるので、表面の境界条件として実測された表面温度を採つた場合と、前述の境界条件(5)を採つた場合との差異を検討することとする。そこで、表面温度をつぎの型で近似させ、温度変化を求めてみる。

$$x = 0, \quad \theta = \theta_s - k\sqrt{t} \quad (= \theta_s) \quad (24)$$

ここで、 θ_s および k は常数。

このような境界条件のもとでは、式(9)に対応してつぎの式が得られる(附録 III)。

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} + \frac{\theta_c}{\theta_0} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} - \frac{\sqrt{\pi} \cdot k}{\theta_0} \sqrt{t} \cdot i \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \quad (25)$$

ここで、 $i \operatorname{erfc}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} - z \operatorname{erfc}(z)$ 。

いま、式(24)において、 $\frac{\theta_c}{\theta_0} = 0.210$ および $\frac{k}{\theta_0} = 0.174$ を与えると、表面温度の変化 $\frac{\theta_s}{\theta_0}$ は Fig. 8 の点線のごとく示され、初めの 2, 3 min を除けば、約 40 min 間は実測値とよく一致する。この程度の測定時間内では、境界条件としては式(5)よりも(24)の方が実際条件に近く、 κ 値に対する補正もより正しく行い得ることになる。上式(25)を

$$\operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} + \frac{\theta_c}{\theta_0} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} - \frac{\sqrt{\pi} \cdot k}{\theta_0} \sqrt{t} \cdot i \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} = \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\kappa(t-\tau)}} \quad (26)$$

と置き、前掲と全く同様の方法で τ を求め κ に補正を施すと、 $\kappa = 0.00162 \text{ m}^2/\text{h}$ という値が得られる。これと先に求めた値 $\kappa = 0.00167 \text{ m}^2/\text{h}$ とを比較すると 3% 程度の違いを示すが、Fig. 8 に掲げた表面温度を比べて判る通り、実測した表面温度が上に仮定した 2 つの境界条件 (5) および (24) に基づく表面温度の間にあることから、真の κ 値は $0.00162 < \kappa < 0.00167$ の範囲内に収まることになろう。しかし、実際問題として、式(26)より κ を補正するためには、各測定毎に式(24)の θ_c および k 等をそれぞれ計算しなければならない不便があるので、2 つの境界条件から κ の範囲を定めることはしないで、始めに述べた簡単な方法だけで補正しても、工学上充分の精度は期待できる。

VI. む す び

半無限固体の表面を一定温度で冷却(または加熱)する際の、固体内任意点の時間的溫度変化、すなわち冷却曲線(または加熱曲線)より、直接、溫度伝播率を測定する方式について、実際測定上生じ得る誤差を検討し、その補正法を述べた。

まず、供試材が有限の大きさであるため、溫度伝播率の測定に対し側面および端面(冷却面と反対側の面)の影響を受けることが予想されるので、実際よりも酷しい条件のもとでその影響を検討し、供試材の大きさに対する許容測定時間と測温点位置の関係を求めた。また、この関係は供試材の熱的特性値に左右され、とくに、溫度伝播率の大きい材料に対し充分の注意を払わねばならないことを指摘した。

つぎに、実際測定を行う際、供試材の表面と低熱源(または高熱源)との間に熱抵抗が存在するので、試料表面を一定温度に保つたまま冷却(または加熱)し続けることは困難であり、求められる溫度伝播率も一般には誤差を含むことになる。これに対し、試料表面に熱抵抗を仮定した式より溫度伝播率を補正する方法についての提案を行つた。ただし、この場合、試料内の測温と同時に、表面温度も測定することを前提としている。

最後に、この補正法の適用例を示した。本例に掲げたモルタル試料の場合では、補正した結果と補正しない結果との間に 25% の違いが認められた。また、実測した表面温度に基づき、

仮定した表面条件の検討を行い、その妥当性を確めた。

本研究に対し、多くの御助言と御便宜を頂いた当学部教授齋藤武先生に衷心より謝意を表わすとともに、実験を担当された熱機関研究室の林香織氏に心からお礼申し上げます。また、原稿を読んでいただいた林猛雄先生、および種々お世話になつた衛生工学科の諸先生に深くお礼申し上げます。

なお、本研究は一部、総合研究「寒地におけるコンクリート版の耐久性に関する研究」(研究代表者：横道英雄教授)の文部省科学研究費を受けて行つたことを附記する。

文 献

- 1) O. Krischer, H. Esdorn: Einfaches Kurzzeitverfahren zur Gleichzeitigen Bestimmung der Wärmeleitzahl, der Wärmekapazität und der Wärmeeindringzahl fester Stoffe. VDI-Forsch. Heft 450, Berlin. 1954.
- 2) H. S. Carslaw, J. C. Jaeger: Conduction of Heat in Solids. Oxford University Press. 1948, p. 41.
- 3) 林 桂一: 高等函数表。岩波, 昭-16. p. 186. または, E. Jahnke, F. Emde: Funktionentafeln. Teubner, Berlin. 1933. p. 98.
- 4) 抜山四郎: 熱伝導測定法。(実験工学講座) 共立社, 昭-8 p. 88.
- 5) 同 上, p. 90.
- 6) 前掲 2), p. 53.
- 7) 前掲 2), p. 336.
- 8) 前掲 2), p. 381.
- 9) 近藤次郎: 演算子法。培風館, 昭-31, 附録 A-4.

附 録

以下に示す諸結果はすべて Laplace 変換によつて解いた。また適用する逆変換公式は Carslaw⁸⁾ または近藤⁹⁾ の変換表によつた。

(I) 式(16)の誘導

基礎微分方程式は前掲の式(10)で表わされ、初期、境界両条件はつぎの通りである。

$$t = 0, \theta = \theta_0; \quad x = 0, \theta = 0; \quad r = a, \theta = \theta_0. \quad (\text{I} \cdot 1)$$

計算の便宜上、温度座標の原点をずらし、両条件をつぎのごとく書き改める。

$$t = 0, \theta = 0; \quad x = 0, \theta = -\theta_0; \quad r = a, \theta = 0. \quad (\text{I} \cdot 2)$$

式(10)および(I-2)に対し、 t につき Laplace 変換を施すと、

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} = \frac{s}{\kappa} \bar{\theta} \quad (\text{I} \cdot 3)$$

$$x = 0, \bar{\theta} = -\frac{\theta_0}{s}; \quad r = a, \bar{\theta} = 0. \quad (\text{I} \cdot 4)$$

ここで、 $\bar{\theta}$ は θ の t に関する L-変換、 s は変換変数を表わす。

この微分方程式の解は

$$\bar{\theta} = -\frac{2\theta_0}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s} e^{-\sqrt{\frac{s}{\kappa} + \beta_n^2} x} \frac{J_0(r\beta_n)}{\beta_n J_1(a\beta_n)}. \quad (\text{I} \cdot 5)$$

ただし、 β_n は $J_0(a\beta) = 0$ の正根である。

θ を求めるためつぎの逆変換公式を用いる。

$$\frac{1}{s} e^{-\frac{x}{\sqrt{\kappa}} \sqrt{s}} \subset \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \quad (\text{I} \cdot 6)$$

ここで、左辺は L-変換の像函数、右辺は原函数である。

そうすると、式(I-5)の s を含む項は

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} e^{-\sqrt{\frac{s}{\kappa} + \beta_n^2} x} &= \frac{e^{-\frac{x}{\sqrt{\kappa}} \sqrt{s + \kappa \beta_n^2}}}{(s + \kappa \beta_n^2) - \kappa \beta_n^2} \subset e^{-\kappa \beta_n^2 t} \left[\frac{1}{2} e^{\kappa \beta_n^2 t} \left\{ e^{-x \sqrt{\frac{\kappa \beta_n^2}{\kappa}}} \right. \right. \\ &\quad \times \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} - \sqrt{\beta_n^2 \kappa t} \right] + e^{x \sqrt{\frac{\kappa \beta_n^2}{\kappa}}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} + \sqrt{\beta_n^2 \kappa t} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ e^{-\beta_n x} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} - \beta_n \sqrt{\kappa t} \right] + e^{\beta_n x} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} + \beta_n \sqrt{\kappa t} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{I} \cdot 7)$$

のごとく逆変換され、結局、式(I-2)で示される条件のもとでは、温度解は

$$\begin{aligned} \theta = & -\frac{\theta_0}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(r\beta_n)}{\beta_n J_1(a\beta_n)} \left[e^{-\beta_n x} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} - \beta_n \sqrt{\kappa t} \right] \right. \\ & \left. + e^{\beta_n x} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} + \beta_n \sqrt{\kappa t} \right] \right] \end{aligned} \quad (\text{I} \cdot 8)$$

のように求まり、式 (I・1) の条件に対しては座標をもとに戻し、(上式右辺に θ_0 を加える) 式 (16) が得られることになる。

(II) 式 (21) の誘導

上と同様、座標変換を行い、つぎの初期、境界両条件を考える。

$$t = 0, \theta = 0; \quad x = 0, \theta = -\theta_0; \quad x = l, \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0. \quad (\text{II} \cdot 1)$$

1 次元の基礎微分方程式 (1) と式 (II・1) に L-変換を施したものについて解を求めると、

$$\begin{aligned} \bar{\theta} &= -\frac{\theta_0}{s} \left(\cosh qx - \frac{\sinh ql}{\cosh ql} \sinh qx \right), \quad q^2 = \frac{s}{\kappa} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\theta_0}{s} \left(2e^{-qx} + 2e^{-2ql+qx} \right) \frac{1}{1-e^{-2ql}} \\ &= -\frac{\theta_0}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{-(2n+1)ql} + e^{-[2(n+1)l-x]q} \right\} \end{aligned} \quad (\text{II} \cdot 2)$$

となる。ここで、前掲の逆変換公式 (I・6) を用いれば、式 (II・1) の条件を満たす解は

$$\theta = -\theta_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\operatorname{erf} c \frac{2nl+x}{2\sqrt{\kappa t}} + \operatorname{erf} c \frac{2(n+1)l-x}{2\sqrt{\kappa t}} \right]. \quad (\text{II} \cdot 3)$$

あるいは、座標をもとに戻して (右辺に θ_0 を加算する)

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{\theta_0} &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\operatorname{erf} c \frac{2nl+x}{2\sqrt{\kappa t}} + \operatorname{erf} c \frac{2(n+1)l-x}{2\sqrt{\kappa t}} \right] \\ &= \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} - \left[\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{erf} c \frac{2nl+x}{2\sqrt{\kappa t}} + \operatorname{erf} c \frac{2(n+1)l-x}{2\sqrt{\kappa t}} \right] \end{aligned} \quad (\text{II} \cdot 4)$$

(III) 式 (25) の誘導

座標変換を行い、式 (24) の代りに

$$t = 0, \theta = 0; \quad x = 0, \theta = (\theta_c - \theta_0) - k\sqrt{t}. \quad (\text{III} \cdot 1)$$

基礎微分方程式 (1) および (III・1) に L-変換を施して求めた $\bar{\theta}$ は、

$$\bar{\theta} = (\theta_c - \theta_0) \frac{e^{-qx}}{s} - \frac{k\sqrt{\pi}}{2} \frac{e^{-qx}}{s^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{III} \cdot 2)$$

ここで、逆変換公式 (I・6) およびつぎの関係

$$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} e^{-qx} \subset 2\sqrt{t} \cdot i \operatorname{erf} c \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \quad (\text{III} \cdot 3)$$

を適用すると、

$$\theta = (\theta_c - \theta_0) \operatorname{erf} c \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} - k\sqrt{\pi} \sqrt{t} \cdot i \operatorname{erf} c \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \quad (\text{III} \cdot 4)$$

あるいは、座標をもとに戻して

$$\theta = \theta_0 \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} + \theta_c \operatorname{erf} c \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} - k\sqrt{\pi} \sqrt{t} \cdot i \operatorname{erf} c \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \quad (\text{III} \cdot 5)$$

を得る。