



Title	有限差法に依る特殊床版の基本式
Author(s)	土橋, 由造; Dobashi, Yoshizo
Citation	北海道大學工學部研究報告, 24, 121-143
Issue Date	1961-02-28
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40677
Type	departmental bulletin paper
File Information	24_121-144.pdf



有限差法に依る特殊床版の基本式

土橋 由造

Fundamental Equations of Finite Difference for Special Varieties of Rectangular Plates

Yoshizo DOBASHI

Abstract

Most problems of the bending of rectangular plates appear to have been discussed for any combination of general boundary conditions. But it is far from the case with numerous varieties of rectangular plates which make some local, discontinuous changes from their prototype in shape or minor configuration (For example so-called centrally thin rectangular plates, slitted ones, ones with rectangular openings etc.).

The author has developed fundamental equations of difference at their assumed surface grid points including those in question which are on or adjacent to the boundary.

The latter equations originates from the idea of regard the corresponding points as the junction of four surrounding rectangular plate elements.

The appliance of this principle are made to the plain rectangular plate as involving special problems, the above mentioned rectangular plates, stariway plate etc..

序

矩形平版の曲げの問題はあらゆる周辺条件の組合せに対して論ぜられていると云つても過言ではない程であるが、版内の境界条件の急変する矩形床版に就いての研究はあまり行なわれていない様である(例えば周辺部より中央部の薄い所謂中央部薄肉版、細隙を持つ床版、矩形開口を有する床版等)。著者はこれらの特殊な床版に対し、普通の有限差法に依り、版の或る点を A, B, C, D 4 版の接合点と考える統一的な考え方より導き出された各点の基本式を作り、平版に於ける特殊な問題、中央部薄肉矩形版、細隙、有孔の矩形版、階段版等の特殊な床版についての研究を行なつた。

第 1 章 特殊床版の基本式

[1] 床版の仮定と条件

床版とは荷重を面に垂直に受ける版であつて、基本式の誘導には下記のような仮定と諸条件の下に誘導するものである。

1. 全体として薄肉の矩形版とする。
2. 原式は Kirchhoff の平版の基本式

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{N} \tag{1}$$

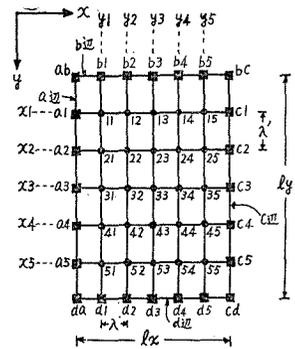
3. 上式の解法には有限差法を用いる。
4. 長辺と短辺の長さの比を r ，短辺の長さを l_x ，長辺の長さを l_y とするとき

$$r = l_y/l_x \quad \therefore \lambda' = r\lambda \tag{2}$$

[2] 定義と版の区劃による名称

第1図の版内の各点を内点，周辺上の各点を辺点，特に隅部に対しては隅点，尚版外の仮想点に対しては外点，之等を総称して区点と呼ぶ事とする。而して之等の区点の位置を示す為には第1図の如く

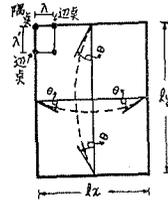
- 隅点： ab, bc, cd, da
- 辺点： $a1, a2, a3, a4, a5 \dots$
 $b1, b2, b3, b4, b5 \dots$
 $c1, c2, c3, c4, c5 \dots$
 $d1, d2, d3, d4, d5 \dots$
- 内点： $11, 12, 13 \dots$
 $21, 22, 23 \dots$
 \vdots



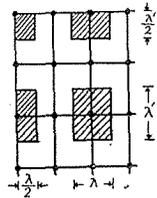
第1図

とし，又次の用語と記号を用いる。

- 区線： $x1, x2, x3, x4, x5 \dots$
 $y1, y2, y3, y4, y5 \dots$
- 区幅： $\lambda \dots x$ 方向の区幅
 $\lambda' \dots y$ 方向の区幅
- 区面積：内点では $\lambda\lambda'$
 辺点では $\frac{1}{2} \lambda\lambda'$
 隅点では $\frac{1}{4} \lambda\lambda'$



第2図



第3図

版剛比 n

版剛度は周知の如く

$$N = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{4}$$

- 茲に E : ヤング係数
- h : 版厚
- ν : ポアソン比

であるが，今或る版を規準版に選び，この版の N を N_0 と記号し

$$n = \frac{N}{N_s} = \frac{h^3}{h_s^3} \quad (5)$$

とおき、 n をラーメンに於ける剛比にならぬ版剛比と呼ぶ事とする。

撓度 ψ

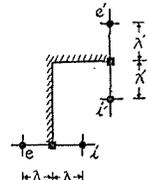
版の撓みを w にて表わし、次式に依り定載される ψ を撓度と呼ぶ事とする。

$$\psi = \frac{N}{\lambda^2} w \quad (6)$$

撓角 θ

第4図に於いて傾斜角 θ は

$$\left. \begin{aligned} \text{長边上} \quad \theta &= \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{w_i - w_e}{2\lambda} \\ \text{短边上} \quad \theta &= \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{w_{i'} - w_{e'}}{2\lambda'} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$



第4図

更に、次式に依り表わされる φ を撓角と呼ぶ事とする。

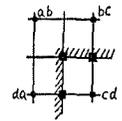
$$\left. \begin{aligned} \text{長边上} \quad \varphi &= \frac{N}{\lambda} \theta = \frac{N}{\lambda} \frac{w_i - w_e}{2\lambda} = \frac{1}{2} (\psi_i - \psi_e) \\ \text{短边上} \quad \varphi &= \frac{N}{\lambda'} \theta = \frac{N}{\lambda'} \frac{w_{i'} - w_{e'}}{2\lambda'} = \frac{1}{2r} (\psi_{i'} - \psi_{e'}) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

而して θ 、従つて φ は常に版の内側に傾く時を正にとる事を約束する。

角 φ_{xy}

第5図に於いて

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{xy} &= N \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{N}{4r\lambda^2} (w_{ab} - w_{bc} + w_{cd} - w_{da}) \\ &= \frac{1}{4r} (\psi_{ab} - \psi_{bc} + \psi_{cd} - \psi_{da}) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$



第5図

[3] 連続条件

厚さの異なる2個以上の版が連続する場合その接合辺(点)に於いて下記の連続条件を満足せねばならない。

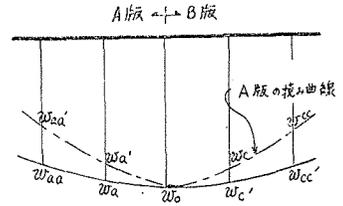
今 A, B, C, D 4版について考えるに

i) A, B, C, D 4版の接合点の撓みが等しい

$$\left. \begin{aligned} w_{0A} &= w_{0B} & \left(\text{或いは} \quad \psi_{0A} &= \psi_{0B} \right) \\ w_{0C} &= w_{0D} & \psi_{0C} &= \psi_{0D} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ii) 接合点の切線の共有

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{0A} &= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{0B} \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{0C} &= \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{0D} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$



第 6 図

c', a' は夫々 A, B 版の外点を表はす。C, D 版についても同上。

iii) 曲げモーメント SM の連続

$$\left. \begin{aligned} SM_A = SM_B \quad N_A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{0A} \\ = N_B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{0B} \\ SM_C = SM_D \quad N_C \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{0C} \\ = N_D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{0D} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

iv) 合支持力の連続

$$\left. \begin{aligned} SA_{0A} &= -SA_{0B} \\ SA_{0C} &= -SA_{0D} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

茲に $SM_x = M_x \lambda' = M_x r \lambda$
 $SM_y = M_y \lambda$
 $SA_x = A_x \lambda' = A_x r \lambda$
 $SA_y = A_y \lambda$

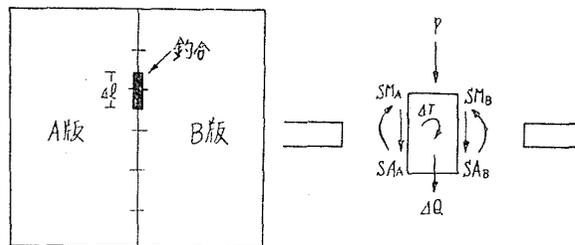
[4] 辺点方程式

今辺点の釣合条件式は A, B 両版間に梁のある場合第 7 図の如き諸力に対し釣合条件式

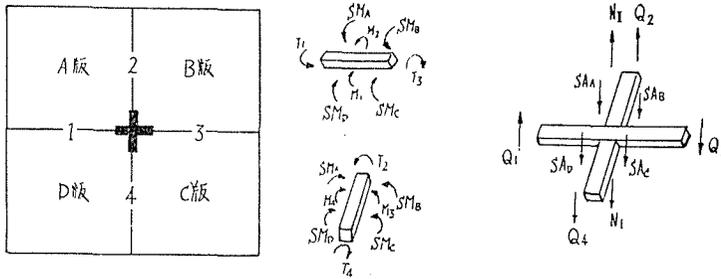
$$\left. \begin{aligned} \sum M = 0 \quad SM_A - SM_B + \Delta T = 0 \\ \sum Z = 0 \quad SA_A + SA_B + P + \Delta Q = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

茲に ΔT : 梁の Δl 間の振りモーメントの差
 P : Δl 間に作用する荷重
 ΔQ : 梁の Δl 間の剪断力の差

を作るとよい。



第 7 図



第 8 図

隅点に於いては 3 個の釣合条件式が作られる。

$$\left. \begin{aligned} \sum M_x &= SM_A + SM_D - SM_B - SM_C + M_1 - M_3 + T_4 - T_2 + M_{xI} - M_{xII} = 0 \\ \sum M_y &= SM_C + SM_D - SM_A - SM_B + M_4 - M_2 + T_3 - T_1 + M_{yI} - M_{yII} = 0 \\ \sum M_z &= SA_A + SA_B + SA_C + SA_D - Q_1 - Q_2 + Q_3 + Q_4 + N_I - N_{II} + P = 0 \end{aligned} \right\} (15)$$

- 茲に
- SA: 各版の隅点に於ける $dl/2$ 上の合支持力
 - SM: 各版の隅点に於ける $dl/2$ 上の合曲げモーメント
 - M: 梁の曲げモーメント
 - T: 梁の振りモーメント
 - Q: 梁の剪断力
 - $M_{x(y)}$: 柱の上下の曲げモーメント
 - N: 柱の上下の軸方向力
 - P: 隅点の荷重

従つて各種の状態の床版のみを扱う場合は、上の釣合条件式のうち梁柱に関する項を除いたものが各版間の釣合条件式となる。

尚区幅上の合曲げモーメント SM は

$$SM = Mdl$$

但し 隅点では $SM = M \frac{dl}{2}$

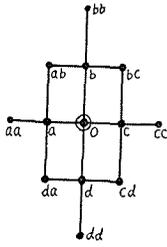
短边上 $dl = \lambda$

長边上 $dl = \lambda' = r\lambda$

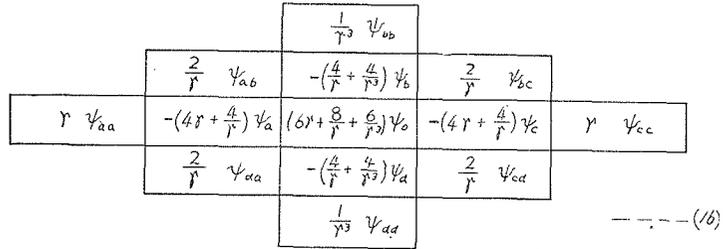
[5] 特殊床版各点の基本式の誘導

ここで A, B 床版の基本式, 支力持の式, 集中反力の式を有限差式に展開し図表化すると第 10~21 図となる (但し支持力の式は合支持力を求めて図表化)。

$$\Delta^2 w = \frac{P}{N_A}$$



第 9 図

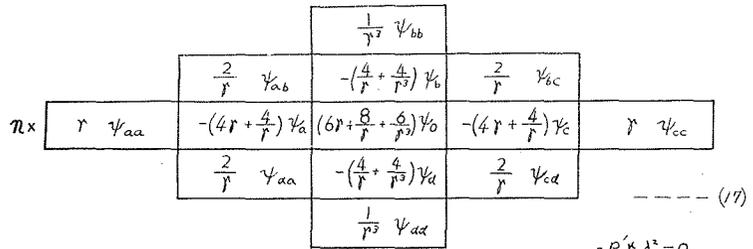


第 10 図

----- (6)
-Prλ² = 0

$$\Delta^2 w = \frac{P}{N_B}$$

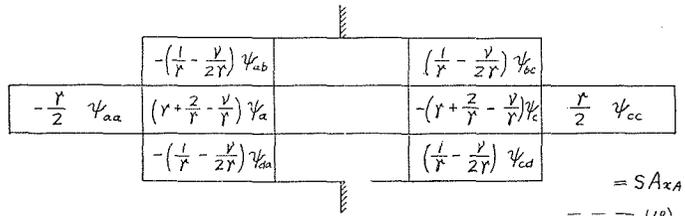
但し $N_A/N_B = n$



第 11 図

----- (7)
-Prλ² = 0

$$A_{xA} = -N_A \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]$$

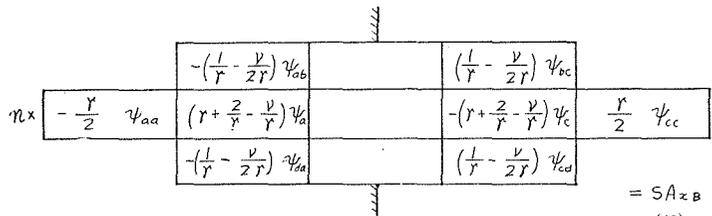


第 12 図

= SA_{xA}

----- (8)

$$A_{xB} = -N_B \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]$$

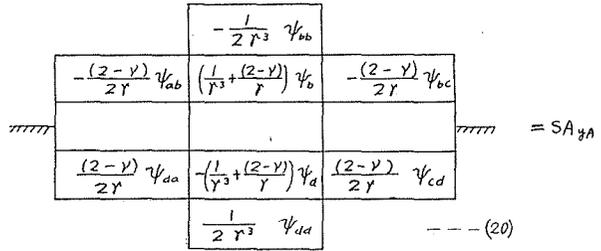


第 13 図

= SA_{xB}

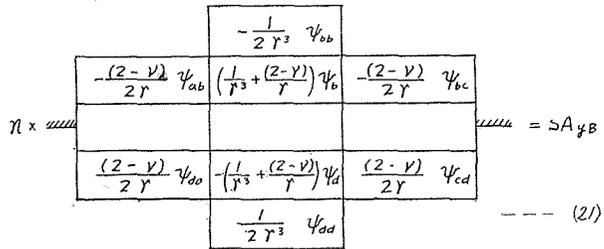
----- (9)

$$A_{yA} = -N_C \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]$$



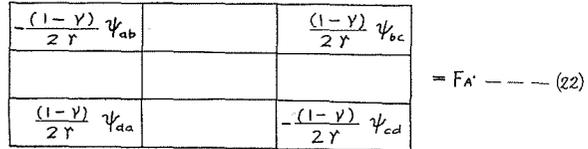
第 14 図

$$A_{yB} = -N_D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]$$



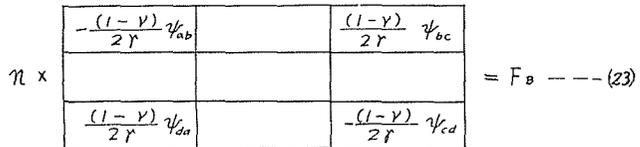
第 15 図

$$F_A = -2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$



第 16 図

$$F_B = -2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$



第 17 図

となる。

[3] の版の連続条件の

ii) 接合点の切線の共有

iii) 曲げモーメントの連続

の 2 式より外点の式が導かれる。

(11) 式を有限差式に書き換えると

$$\left. \begin{aligned} \frac{w_{a'} - w_a}{2\lambda} &= \frac{w_c - w_{a'}}{2\lambda} \\ \frac{w_{a'} - w_b}{2r\lambda} &= \frac{w_d - w_{b'}}{2r\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

(12) 式より

$$\left. \begin{aligned} \frac{N_A}{\lambda^2} \left[w_a + w_{c'} - n w_c - n w_{a'} + 2(n-1) \left(1 + \frac{\nu}{r^2} \right) w_0 \right. \\ \left. - (n-1) \frac{\nu}{r^2} w_b - (n-1) \frac{\nu}{r^2} w_b - (n-1) \frac{\nu}{r^2} w_d \right] = 0 \\ \frac{N_c}{\lambda^2} \left[\frac{1}{r^2} w_b + \frac{1}{r^2} w_{d'} - \frac{n}{r^2} w_a - \frac{n}{r^2} w_b + \frac{n}{r^2} w_d \right. \\ \left. + 2(n-1) \left(\frac{1}{r^2} + \nu \right) w_0 - (n-1) \nu w_a - (n-1) \nu w_c \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

茲で $\left. \begin{aligned} \frac{N_B}{N_A} &= n \\ \frac{N_D}{N_C} &= n \end{aligned} \right\} \text{とす。}$

(11), (12) 式より外点の式を求めると

x 方向

$$\psi_c = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{\nu}{r^2} \cdot \psi_b & \\ \hline \frac{n-1}{n+1} \cdot \psi_a & -2 \frac{n-1}{n+1} \left(1 + \frac{\nu}{r^2} \right) \psi_0 & \frac{2n}{n+1} \cdot \psi_c \\ \hline & \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{\nu}{r^2} \cdot \psi_d & \\ \hline \end{array} \quad \text{----- (24)}$$

第 18 図

$$\psi_{a'} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & -\frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{\nu}{r^2} \cdot \psi_b & \\ \hline \frac{2}{n+1} \cdot \psi_a & 2 \frac{n-1}{n+1} \left(1 + \frac{\nu}{r^2} \right) \psi_0 & -\frac{n-1}{n+1} \cdot \psi_c \\ \hline & -\frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{\nu}{r^2} \cdot \psi_d & \\ \hline \end{array} \quad \text{----- (25)}$$

第 19 図

y 方向

$$\psi_d' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \frac{n-1}{n+1} \cdot \psi_b & \\ \hline \frac{n-1}{n+1} \cdot \nu \cdot r^2 \cdot \psi_a & -2 \frac{n-1}{n+1} (1+r^2 \nu) \psi_0 & \frac{n-1}{n+1} \cdot \nu \cdot r^2 \cdot \psi_c \\ \hline & \frac{2n}{n+1} \cdot \psi_d & \\ \hline \end{array} \quad \text{--- (26)}$$

第 20 図

$$\psi_b' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \frac{2}{n+1} \cdot \psi_b & \\ \hline -\frac{n-1}{n+1} \cdot \nu \cdot r^2 \cdot \psi_a & 2 \frac{n-1}{n+1} (1+r^2 \nu) \psi_0 & -\frac{n-1}{n+1} \cdot \nu \cdot r^2 \cdot \psi_c \\ \hline & -\frac{n-1}{n+1} \cdot \psi_d & \\ \hline \end{array} \quad \text{--- (27)}$$

第 21 図

中央部薄肉及び有孔床版の基本式

次に各点の基本式を誘導する。

A 版について (16) 式 $\times \frac{1}{2}$ + (18) 式

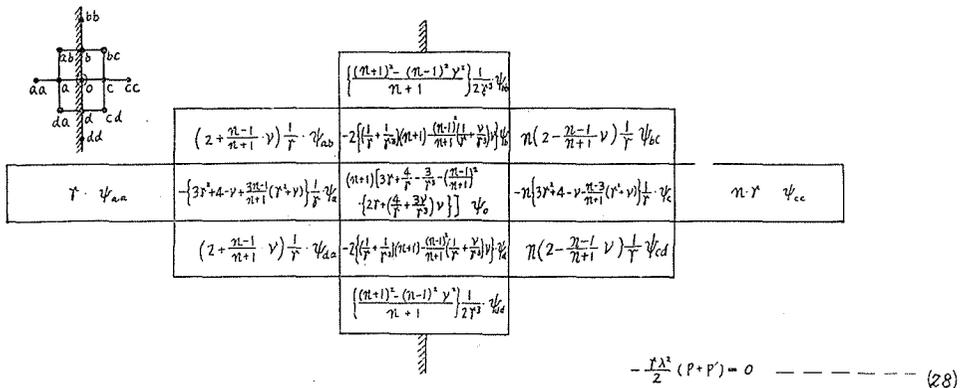
B 版について (17) 式 $\times \frac{1}{2}$ + (19) 式

を作りこれらの式の外点に (24), (25) 式を代入して, 更に合支持力の連続条件式より第 (28) 式を得る。

同様にして各点の式を図表化すると第 23~33 図となる。尚第 24 図の (30) 式は A, B, C, D 4 版の接合点と考え, 各版の隅点の合支持力を

$$SA_{隅} = SA_{x/2} + SA_{y/2} + F$$

と考え, 之れと連続条件式より作式する。

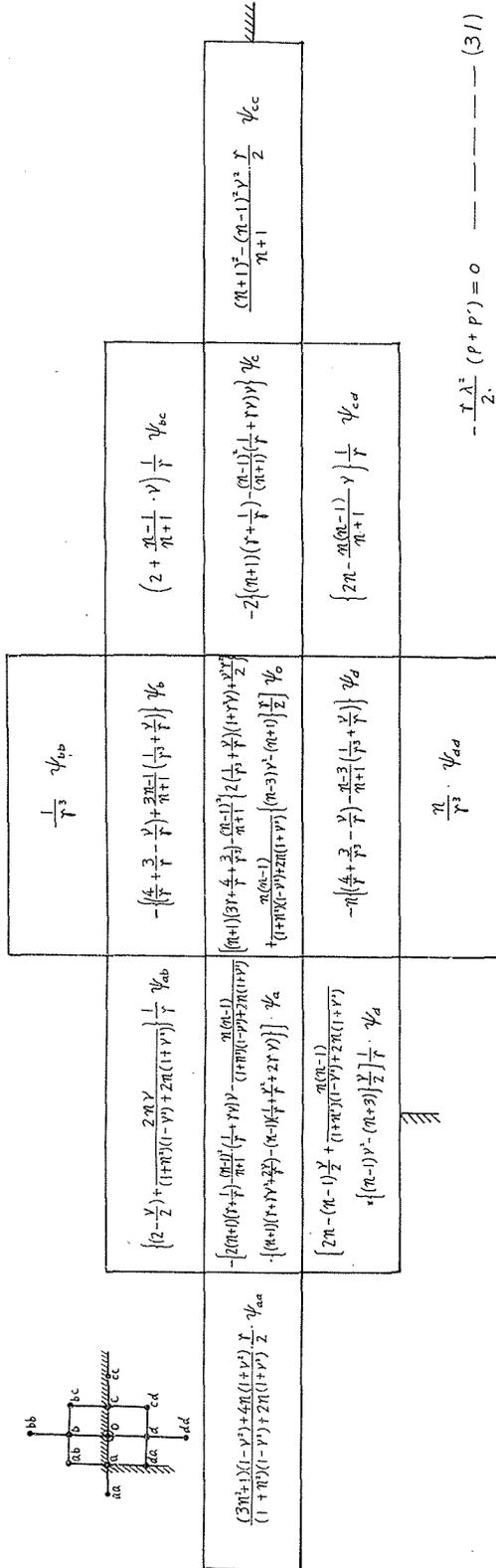


$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & \left\{ \frac{(n+1)^2 - (n-1)^2 \nu^2}{n+1} \right\} \frac{1}{2r^2} \psi_0 & \\ \hline \left(2 + \frac{n-1}{n+1} \nu \right) \frac{1}{r} \psi_{ab} & -2 \left\{ \frac{1}{r^2} \nu (n+1) \frac{(n-1)(1+r^2 \nu)}{n+1} \right\} \psi_0 & n \left(2 - \frac{n-1}{n+1} \nu \right) \frac{1}{r} \psi_{bc} \\ \hline r \cdot \psi_{aa} & - \left\{ 3r^2 + 4 - \nu + \frac{3n-1}{n+1} (r^2 \nu) \right\} \frac{1}{r} \psi_a & \frac{(n+1) \left[3r^2 + \frac{4}{r} - \frac{3}{r^3} \frac{(n-1)^2}{(n+1)} \right]}{\left\{ 2r^2 \left(\frac{2}{r} + \frac{3\nu}{r^3} \right) \nu \right\}} \psi_0 & -n \left\{ 3r^2 + 4 - \nu + \frac{3n-1}{n+1} (r^2 \nu) \right\} \frac{1}{r} \psi_c & n \cdot r \cdot \psi_{cc} \\ \hline \left(2 + \frac{n-1}{n+1} \nu \right) \frac{1}{r} \psi_{da} & -2 \left\{ \frac{1}{r^2} \nu (n+1) \frac{(n-1)(1+r^2 \nu)}{n+1} \right\} \psi_0 & n \left(2 - \frac{n-1}{n+1} \nu \right) \frac{1}{r} \psi_{cd} \\ \hline & \left\{ \frac{(n+1)^2 - (n-1)^2 \nu^2}{n+1} \right\} \frac{1}{2r^2} \psi_0 & \\ \hline \end{array} \quad \text{--- (28)}$$

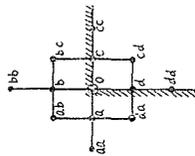
第 22 図

	$\left\{ 2 - \frac{\nu}{2} + \frac{2\mu\nu}{(1+\mu)(1-\nu^2)} + 2\mu(1+\nu^2) \right\} \frac{1}{\gamma} \psi_{ab}$	$\frac{(1+3\mu)(1-\nu^2) + 4\mu(1+\nu^2)}{(1+\mu)(1-\nu^2)} + 2\mu(1+\nu^2) \frac{1}{2\gamma^2} \psi_{ab}$	$\left[2\mu - (\mu-1) \frac{\nu}{2} + \frac{\mu(\mu-1)}{(1+\mu)(1-\nu^2)} + 2\mu(1+\nu^2) \right] \frac{1}{\gamma} \psi_{bc}$	$\mu \cdot \nu \cdot \psi_{cc}$
$\gamma \psi_{aa}$	$\left\{ (3\gamma + \frac{4}{\gamma} - \frac{\nu}{\gamma}) + \frac{2\mu-1}{\mu+1} \left(\frac{\nu+\nu^2}{\gamma} \right) \right\} \psi_a$	$\left[\mu + (3\gamma + \frac{4}{\gamma} + \frac{3}{\mu+1}) \frac{\mu-1}{\mu+1} + \frac{\mu-1}{\mu+1} \left(2\gamma + \frac{6\nu}{\gamma} + \frac{5\nu^2}{2\gamma^2} \right) + \frac{\mu(\mu-1)}{(1+\mu)(1-\nu^2)} + 2\mu(1+\nu^2) \right] \frac{1}{2\gamma^2} \psi_a$	$-\mu \left\{ (3\gamma + \frac{4}{\gamma} - \frac{\nu}{\gamma}) - \frac{\mu-3}{\mu+1} \left(\frac{\nu+\nu^2}{\gamma} \right) \right\} \psi_c$	$\mu \cdot \nu \cdot \psi_{cc}$
ψ_{aa}	$\left(2 + \frac{\mu-1}{\mu+1} \cdot \nu \right) \frac{1}{\gamma} \psi_{aa}$	$-2 \left\{ (\mu+1) \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\mu^2} \right) + \frac{(\mu-1)^2}{\mu+1} \left(1 + \frac{\nu^2}{\gamma^2} \right) \right\} \psi_a$	$\left\{ 2\mu - \frac{\mu(\mu-1)}{\mu+1} \cdot \nu \right\} \frac{1}{\gamma} \psi_{cd}$	$\mu \cdot \nu \cdot \psi_{cc}$
		$\frac{(\mu+1)^2 - (\mu-1)^2 \nu^2}{(\mu+1)} \cdot \frac{1}{2\gamma^2} \psi_{dd}$	$-\frac{\nu \lambda^2}{2} (P + \nu) = 0 \quad \text{----- (30)}$	

第 24 図



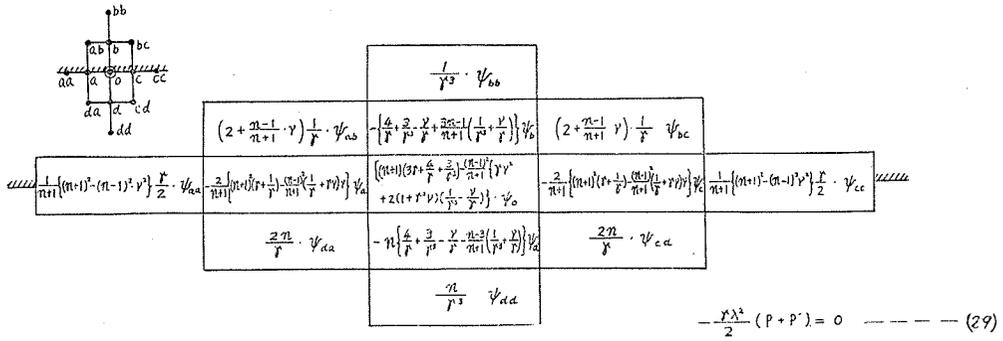
第 25 図



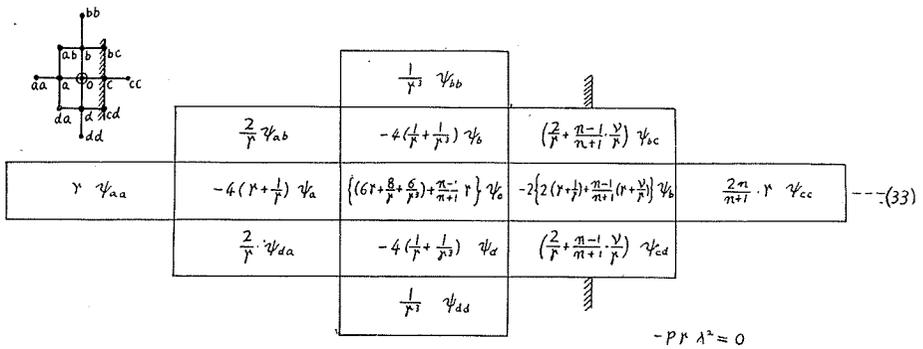
$\gamma \cdot \psi_{aa}$	$\frac{2}{\gamma} \cdot \psi_{ab}$	$\frac{1}{\gamma^2} \cdot \psi_{aa}$	$\left\{ \frac{2}{\gamma} + \frac{(\eta-1)}{(\eta+1)} \frac{\nu}{\gamma} \right\} \cdot \psi_{bc}$	$\frac{1}{2} \left\{ (\eta+1) - \frac{(\eta-1)^2}{\eta+1} \right\} \nu^2 \cdot \psi_{cc}$
$\gamma \cdot \psi_{aa}$	$\left(\frac{2}{\gamma} + \frac{\eta-1}{\eta+1} \right) \cdot \psi_{aa}$	$-\left\{ \frac{\gamma}{2} + \frac{2\eta}{2\gamma} + \frac{\eta-1}{\eta+1} \left[\frac{\eta-1}{2\gamma^2} + \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\nu}{2\gamma} \right) \nu \right] \right. \\ \left. + \frac{\eta}{(\eta+1)(\gamma+2\eta)(\eta+1)} \left[(\eta+1) \left(\frac{\gamma}{\gamma} + \frac{\nu}{\gamma} \right) - (\eta-1) \left(\frac{\gamma}{\gamma} + \nu \right) \right] \right\} \cdot \psi_c$	$-\left\{ \frac{\gamma}{2} + \frac{2\eta}{2\gamma} + \frac{\eta-1}{\eta+1} \left[\frac{\eta-1}{2\gamma^2} + \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\nu}{2\gamma} \right) \nu \right] \right. \\ \left. + \frac{\eta}{(\eta+1)(\gamma+2\eta)(\eta+1)} \left[(\eta+1) \left(\frac{\gamma}{\gamma} + \frac{\nu}{\gamma} \right) - (\eta-1) \left(\frac{\gamma}{\gamma} + \nu \right) \right] \right\} \cdot \psi_c$	$-\left\{ \frac{\gamma}{2} + \frac{2\eta}{2\gamma} + \frac{\eta-1}{\eta+1} \left[\frac{\eta-1}{2\gamma^2} + \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\nu}{2\gamma} \right) \nu \right] \right. \\ \left. + \frac{\eta}{(\eta+1)(\gamma+2\eta)(\eta+1)} \left[(\eta+1) \left(\frac{\gamma}{\gamma} + \frac{\nu}{\gamma} \right) - (\eta-1) \left(\frac{\gamma}{\gamma} + \nu \right) \right] \right\} \cdot \psi_d$
$\frac{1}{2\gamma^2} \left\{ (\eta+1) - \frac{(\eta-1)^2}{\eta+1} \right\} \nu^2 \cdot \psi_d$	$-\frac{\gamma \eta}{(\eta+1)(\gamma+2\eta)(\eta+1)} \left[\frac{\eta-1}{\eta+1} \left(\frac{\gamma}{\gamma} + \frac{\nu}{\gamma} \right) - \frac{\eta-1}{\eta+1} \left(\frac{\gamma}{\gamma} + \nu \right) \right] \cdot \psi_c$			

$-\frac{\gamma \eta}{4} (3\eta+1) = 0 \quad \text{--- (32)}$

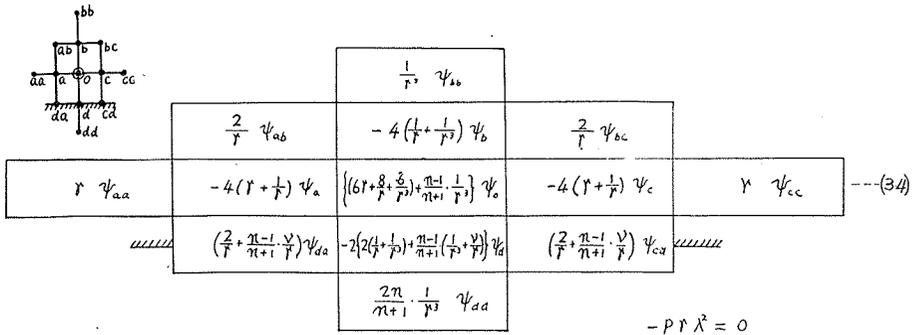
第 26 図



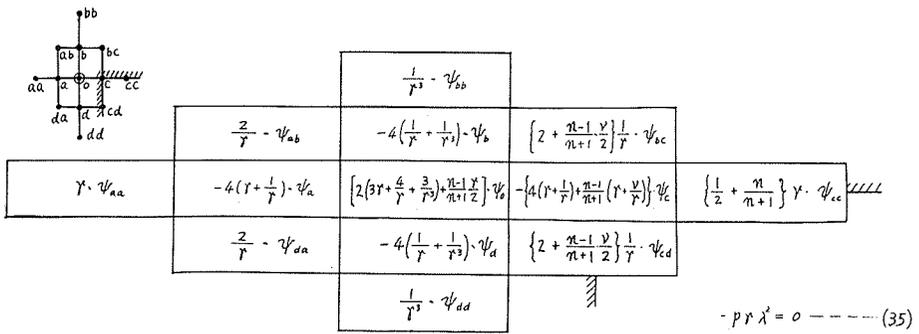
第 23 図



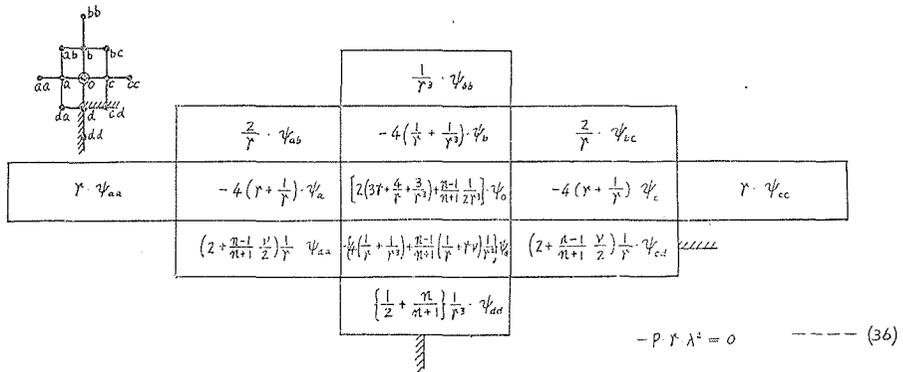
第 27 図



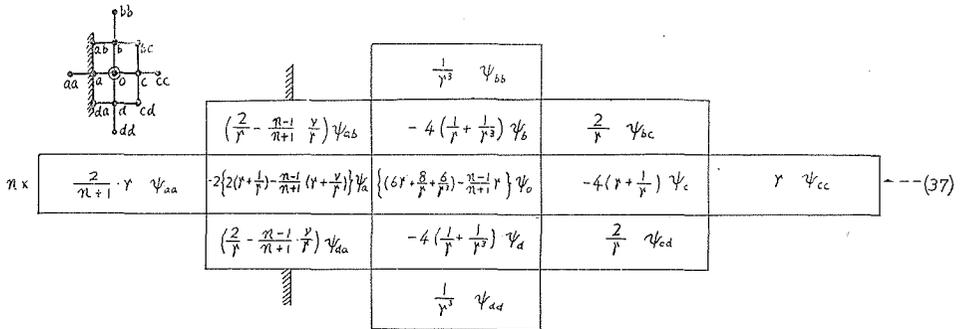
第 28 図



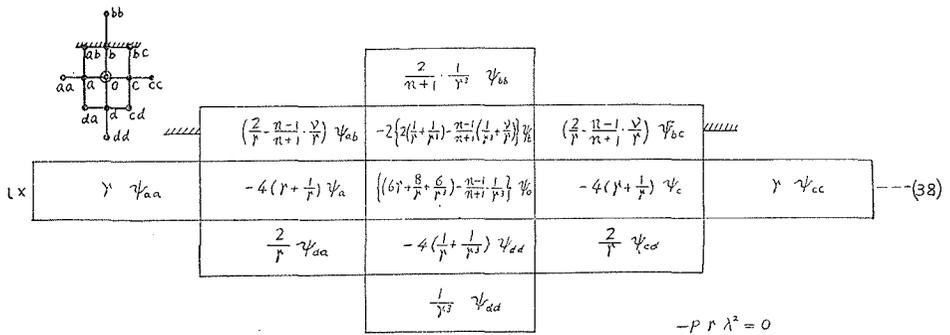
第 29 図



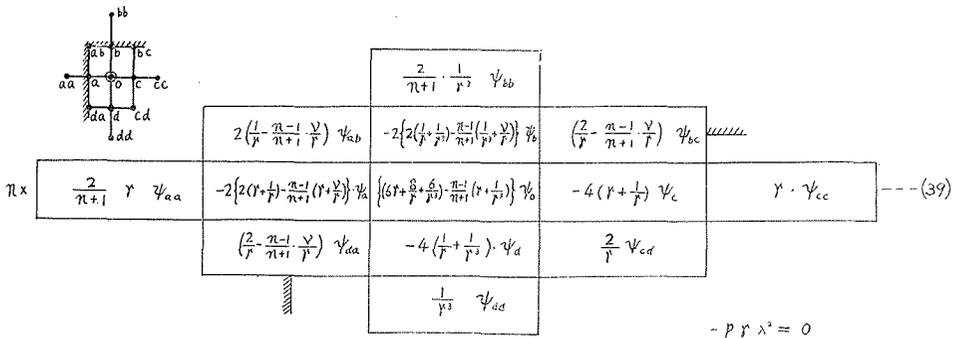
第 30 图



第 31 图



第 32 图



第 33 图

尚 (28)~(39) 式に於いて $n=1$ とすると平板の基本式 (16) 式となる。

細隙を有する床版の基本式

(40) 式, (33) 式と同様に今版の或る点を, A, B, C, D 4 版の接合点と考えると, 各版の隅点の合支持力は第 34 図となる。

$$SA_{隅} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \frac{1}{2r^3} \cdot \psi_{bb} & & \\ \hline \frac{v}{2r} \cdot \psi_{ab} & -(\frac{3}{2r^3} + \frac{2}{r} - \frac{v}{2r}) \cdot \psi_b & (\frac{2}{r} - \frac{v}{r}) \cdot \psi_{bc} & \\ \hline -(\frac{1}{2} + \frac{v}{2r}) \cdot \psi_a & (\frac{3}{2}r + \frac{2}{r} + \frac{3}{2r^3}) \cdot \psi_0 & -(\frac{3}{2}r + \frac{2}{r} - \frac{v}{2r}) \cdot \psi_c & \frac{r}{2} \cdot \psi_{cc} \\ \hline & -(\frac{1}{2r^3} + \frac{v}{2r}) \cdot \psi_d & \frac{v}{2r} \cdot \psi_{cd} & \\ \hline & & & -pr\lambda^2/4 \dots (40) \end{array}$$

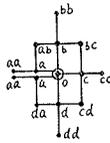
第 34 図

連続条件式より

$$SA_A + SA_B + SA_C + SA_D = 0$$

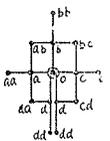
切欠のある部分の SA の式は自由辺を持つ故 $M=0$ より外点となる点を消去すると (41) 式となる。

同様にして (41)~(46) 式を得る。



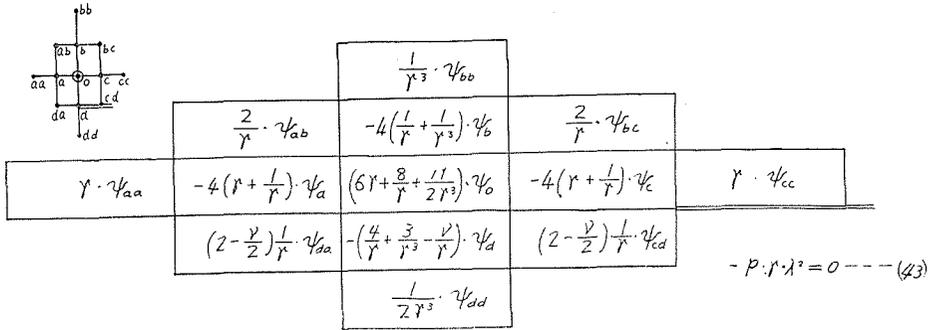
$$SA_{隅} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \frac{1}{r^3} \cdot \psi_{bb} & & \\ \hline (\frac{2}{r} - \frac{v}{r}) \cdot \psi_{ab} & -(\frac{3}{r^3} + \frac{4}{r} - \frac{v}{r}) \cdot \psi_b & (\frac{2}{r} + \frac{v}{2r}) \cdot \psi_{bc} & \\ \hline \frac{v}{2} \cdot \psi_{aa} & -(2r + \frac{2}{r} - \frac{v}{r}) \cdot \psi_a & 2(3r + \frac{4}{r} + \frac{2}{r^3}) \cdot \psi_0 & -2(2r + \frac{2}{r}) \cdot \psi_c & r \cdot \psi_{cc} \\ \hline \frac{1}{2} \cdot \psi_{aa} & -(2r + \frac{2}{r} - \frac{v}{r}) \cdot \psi_a & & & \\ \hline (\frac{2}{r} - \frac{v}{r}) \cdot \psi_{da} & -(\frac{3}{r^3} + \frac{4}{r} - \frac{v}{r}) \cdot \psi_d & (\frac{2}{r} + \frac{v}{2r}) \cdot \psi_{cd} & & \\ \hline & \frac{1}{r^3} \cdot \psi_{dd} & & & \\ \hline & & & & -pr\lambda^2 = 0 \dots (41) \end{array}$$

第 35 図

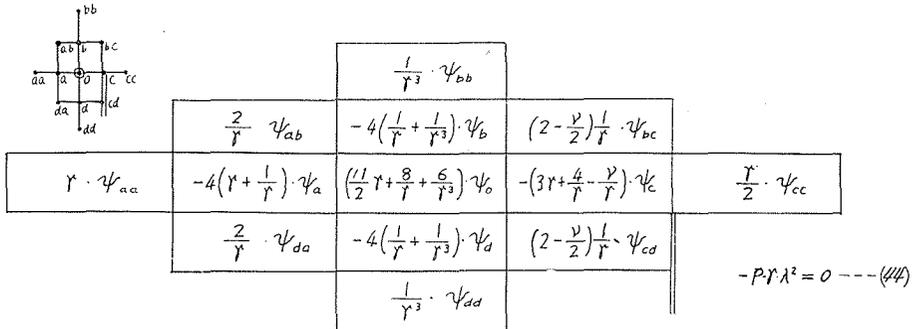


$$SA_{隅} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \frac{1}{r^3} \cdot \psi_{bb} & & \\ \hline \frac{2}{r} \cdot \psi_{ab} & -2(\gamma + \frac{2}{r} + \frac{1}{r^3}) \cdot \psi_b & \frac{2}{r} \cdot \psi_{bc} & \\ \hline \gamma \cdot \psi_{aa} & -(3\gamma + \frac{4}{r} - \frac{v}{r}) \cdot \psi_a & (4\gamma + \frac{8}{r} + 6\gamma^2 - \frac{2v}{r}) \cdot \psi_0 & -(3\gamma + \frac{4}{r} - \frac{v}{r}) \cdot \psi_c & \gamma \cdot \psi_{cc} \\ \hline & (\frac{2}{r} - \frac{v}{r}) \cdot \psi_{da} & (\frac{2}{r} + \frac{2}{r^3} + \frac{v}{r}) \cdot \psi_d & (\frac{2}{r} - \frac{v}{r}) \cdot \psi_{cd} & \\ \hline & \frac{1}{2r^3} \cdot \psi_{dd} & \frac{1}{2r^3} \cdot \psi_{dd} & & \\ \hline & & & & -pr\lambda^2 = 0 \dots (42) \end{array}$$

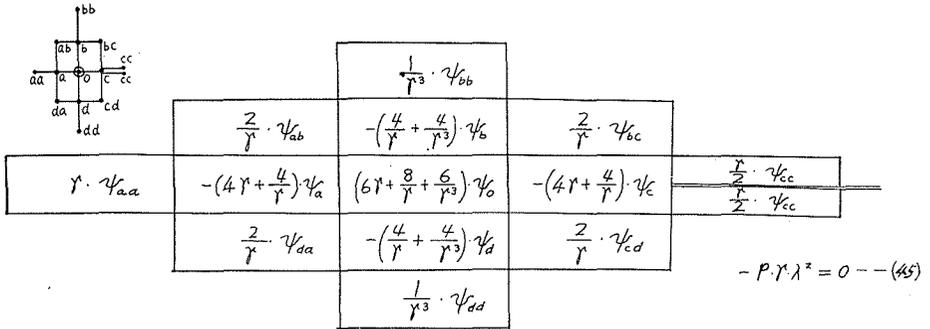
第 36 図



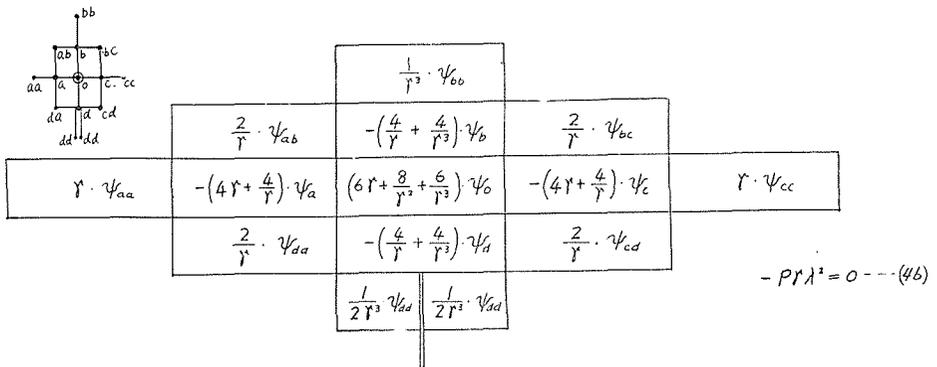
第 37 图



第 38 图



第 39 图



第 40 图

[6] 各点の応力計算式

(1) 曲げモーメント M_x, M_y

A版における曲げモーメントの式は

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -N_A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -N_A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

上式において

$$\left. \begin{aligned} m_x &= -N_A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ m_y &= -N_A \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

とおけば, (47) 式は

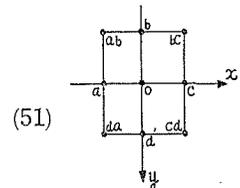
$$\left. \begin{aligned} M_x &= m_x + \nu m_y \\ M_y &= m_y + \nu m_x \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

となり, 又, $\nu=0$ の時の M_x, M_y は, m_x, m_y で表わされることとなる。

$$\left. \begin{aligned} M_{x(\nu=0)} &= m_x \\ M_{y(\nu=0)} &= m_y \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

 m_x, m_y を第 41 図の 0 点において有限差式に展開すれば

$$\left. \begin{aligned} m_x &= N_A \frac{-w_a + 2w_0 - w_c}{\lambda^2} \\ m_y &= N_A \frac{-w_b + 2w_0 - w_d}{\lambda^2} \end{aligned} \right\}$$



(51)

第 41 図

 ϕ にて表わすと

$$\left. \begin{aligned} m_x &= -\phi_a + 2\phi_0 - \phi_c \\ m_y &= \frac{1}{\lambda^2} \left(-\phi_b + 2\phi_0 - \phi_d \right) \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

B版における曲げモーメントは B版の撓みを用い A版と同様にして求めた値を n 倍する。

$$\left. \begin{aligned} m_x &= n \left(-\phi_a + 2\phi_0 - \phi_c \right) \\ m_y &= n \left[\frac{1}{\lambda^2} \left(-\phi_b + 2\phi_0 - \phi_d \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

A版と B版の境界線上の曲げモーメントは, B版(A版)の撓みを外点の式を用いて A版(B版)の撓みに統一し同様にして求める。

(2) 振りモーメント M_{xy} A版における振りモーメント M_{xy} の式は

$$M_{xy} = -(1-\nu)N_A \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{54}$$

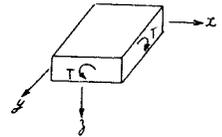
有限差式に展開すると

$$M_{xy} = -(1-\nu) \varphi_{xy} = \frac{1-\nu}{4r} (-\psi_{ab} + \psi_{bc} - \psi_{cd} + \psi_{da}) \tag{55}$$

M_{xy} の正の向きは第 42 図の方向である。

B 版における振りモーメントは B 版の撓みを用いた値を n 倍して求める。

$$M_{xy} = n \times \frac{1-\nu}{4r} (-\psi_{ab} + \psi_{bc} - \psi_{cd} + \psi_{da}) \tag{56}$$



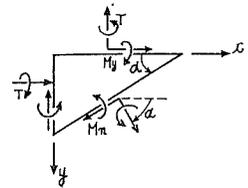
第 42 図

A, B 版の境界線上の振りモーメントは, B 版 (A 版) の撓みを外点の式を用いて, A 版 (B 版) の撓みに統一し同様にして求める。

(3) 主曲げモーメント M_1, M_2

第 43 図の如く, 各記号の正の向きを定めると

$$\left. \begin{aligned} M_n &= M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha + M_{xy} \sin 2\alpha \\ M_{nt} &= \frac{1}{2} (M_x - M_y) \sin 2\alpha - M_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \right\} \tag{57}$$



第 43 図

主曲げモーメントの大きさは

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{M_x + M_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4M_{xy}^2}$$

主曲げモーメント面の方向は

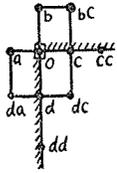
$$\tan 2\alpha = \frac{2M_{xy}}{M_x - M_y} \tag{58}$$

主振りモーメントは, 主曲げモーメント面と 45° の差の面で, その大きさは

$$\frac{M_{nt_1}}{M_{nt_2}} = \pm \frac{1}{2} (M_1 - M_2) \tag{59}$$

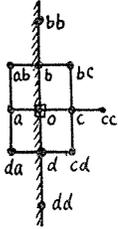
(4) 合支持力 SA

前項の各点の基本式の誘導の SA の求め方に従つて辺点の合支持力を求め図表化すると (60)~(63) 式となる。



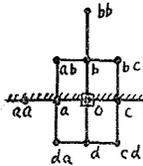
$$SA = \begin{array}{cccc} & \begin{array}{c} (\frac{1}{2r} + \frac{v}{2r}) \psi_b \\ -\frac{v}{2r} \psi_{bc} \end{array} & & \\ \begin{array}{c} (\frac{1}{2} + \frac{v}{2r}) \psi_a \\ -\frac{v}{2r} \psi_{da} \end{array} & \begin{array}{c} -(\frac{1}{2}r + \frac{1}{2} + \frac{v}{2r}) \psi_o \\ (\frac{1}{2}r + \frac{1}{2} + \frac{v}{2r}) \psi_c \end{array} & \begin{array}{c} (\frac{1}{2}r + \frac{1}{2} + \frac{v}{2r}) \psi_c \\ -(\frac{1}{2} - \frac{v}{2r}) \psi_{cd} \end{array} & -\frac{1}{2} \psi_{cc} \\ & \begin{array}{c} -\frac{v}{2r} \psi_{da} \\ -\frac{v}{2r} \psi_{dd} \end{array} & & + \frac{Px\lambda^2}{4} \end{array} \quad \text{---(60)}$$

第 44 図



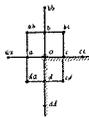
$$SA = \begin{array}{cccc} & \begin{array}{c} -\frac{1}{2r} \psi_{bb} \end{array} & & \\ \begin{array}{c} -\frac{v}{2r} \psi_{ab} \\ (1 + \frac{v}{r}) \psi_a \end{array} & \begin{array}{c} (2r + \frac{1}{2}) \psi_b \\ -(3r + \frac{1}{2} + \frac{v}{2r}) \psi_o \end{array} & \begin{array}{c} -(r - \frac{v}{2r}) \psi_{bc} \\ (3r + \frac{1}{2} - \frac{v}{r}) \psi_c \end{array} & -r \psi_{cc} \\ \begin{array}{c} -\frac{v}{2r} \psi_{da} \\ -\frac{v}{2r} \psi_{dd} \end{array} & \begin{array}{c} (2r + \frac{1}{2}) \psi_d \\ -\frac{v}{2r} \psi_{dd} \end{array} & \begin{array}{c} -(r - \frac{v}{2r}) \psi_{cd} \\ -\frac{v}{2r} \psi_{dd} \end{array} & + \frac{Px\lambda^2}{2} \end{array} \quad \text{---(61)}$$

第 45 図



$$SA = \begin{array}{cccc} & \begin{array}{c} -\frac{1}{r} \psi_{bb} \end{array} & & \\ \begin{array}{c} -\frac{1}{2} \psi_{aa} \\ (2r + \frac{1}{2}) \psi_a \end{array} & \begin{array}{c} (\frac{1}{2} + \frac{v}{2r}) \psi_b \\ -(3r + \frac{1}{2} + \frac{v}{2r}) \psi_o \end{array} & \begin{array}{c} -(r - \frac{v}{2r}) \psi_{bc} \\ (2r + \frac{1}{2}) \psi_c \end{array} & -\frac{1}{2} \psi_{cc} \\ \begin{array}{c} -\frac{v}{2r} \psi_{da} \\ -\frac{v}{2r} \psi_{dd} \end{array} & \begin{array}{c} (\frac{1}{2} + \frac{v}{2r}) \psi_d \\ -\frac{v}{2r} \psi_{cd} \end{array} & & + \frac{Px\lambda^2}{2} \end{array} \quad \text{---(62)}$$

第 46 図



$$SA = \begin{array}{cccc} & \begin{array}{c} \frac{1}{r} \psi_o \end{array} & & \\ \begin{array}{c} -r \psi_{oo} \end{array} & \begin{array}{c} \frac{2}{r} \psi_o \\ (1r \cdot 8 \cdot v) \frac{1}{2r} \psi_o \end{array} & \begin{array}{c} (4 \cdot \frac{1}{2r} - \frac{v}{2r}) \frac{1}{r} \psi_o \\ -\frac{1}{2} (3r + 4 \cdot \frac{1}{2r} + \frac{v}{2r} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r}) \frac{1}{r} \psi_o \end{array} & \begin{array}{c} -(2 \cdot \frac{1}{2r} + \frac{v}{2r}) \frac{1}{r} \psi_o \\ (3r + 4 \cdot v) \frac{1}{2} + \frac{1}{2r} (1 + r \cdot v) \frac{1}{r} \psi_o \end{array} & - (1 + \frac{1}{2r} \cdot v) \frac{1}{2} \psi_o \\ \begin{array}{c} -(2 \cdot \frac{1}{2r} + \frac{v}{2r}) \frac{1}{r} \psi_o \end{array} & \begin{array}{c} (4 \cdot \frac{1}{2r} \cdot v) \frac{1}{2r} \frac{1}{r} \psi_o \\ -(1 + \frac{1}{2r} \cdot v) \frac{1}{2r} \psi_o \end{array} & \begin{array}{c} -\frac{1}{2r} \frac{1}{r} \psi_{oo} \end{array} & \end{array} \quad \text{---(63)}$$

第 47 図

尚(63)式は出隅の SA を求める式であり、第 49 図の如く 0 点を 3 版の接合点と見做して誘導した式である。

[7] 計算簡易化の為の係数表

有限差法に依る床版の研究に於ける方程式の解は、多元連立 1 次方程式を解く事に帰着する。多元連立 1 次方程式の解法には、繰返し試索法、消去法等があるが、繰返し試索法は適当な假定値のない場合や方程式の性状等に依り収斂が甚だ困難な場合がある。例えば(自由辺を持つ床版等の方程式)消去法は誤りがなければ解く際の緊張度は別として前者に優るものであるが、著者の経験上、一度で正しい解を得るのは非常に難しい事であり、方程式の数が多くな

ればなる程その困難さは倍加する。従つてこれから取扱う問題に於いて、基本となる周辺固定の矩形平版の方程式を消去法で解いて置けば、細隙及び有孔矩形版の方程式でも或る部分迄は平版と同一方程式である故それ以後の計算のみで解が求まる事となる。この便宜の為に作ったのが第1~6表の係数表である(ここには有限差式に依る実用的周辺固定版解の短辺最少分割数6のものを例として挙げる)。

荷重項は等分布荷重の場合のものが記してある。集中或いは等変荷重の際の解を得る為には荷重項の計算のみを行なえばよい($\nu=0$, $r=1$ として計算)。

