



# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	テーパード・ランド型推力軸受の潤滑における慣性力の影響について
Author(s)	飯田, 誠一; Iida, Sei-ichi; 有江, 幹男 他
Citation	北海道大學工学部研究報告, 28, 135-155
Issue Date	1962-03-06
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/40691">https://hdl.handle.net/2115/40691</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	28_135-156.pdf



# テーパード・ランド型推力軸受の潤滑に おける慣性力の影響について

飯 田 誠 一  
有 江 幹 男

## On the Effect of Lubricant Inertia in the Tapered-land Thrust Bearing Lubrication

Sei-ichi IIDA  
Mikio ARIE

### Abstract

A tapered-land or a pivoted-shoe thrust bearing is extensively used as a thrust bearing of large rotating machines. The hydrodynamic theories of lubrication for these bearings are derived on the basis of Reynolds equation in polar co-ordinates, which does not include the terms of inertia force.

In this paper, the basic equation of lubrication including such terms is derived in order to determine the effect of lubricant inertia for the actual sectorial geometry of finite-length thrust bearings. An analytical solution of this equation is given by relaxation method to compare with the results of Reynolds equation for several characteristics on hydrodynamic lubrication.

### 目 次

I. 緒 言 .....	2
II. 潤滑理論の基礎式 .....	3
§1. 粘性流体の流れの基礎方程式 .....	3
§2. 潤滑理論の基礎式 .....	6
§3. 潤滑理論の基礎式の無次元式による表示 .....	11
III. 潤滑特性におよぼす慣性力の影響 .....	12
§1. 数 値 計 算 .....	12
§2. 圧 力 分 布 .....	13
§3. 負 荷 容 量 .....	16
§4. 動 力 損 失 .....	17
§5. 流 量 .....	19
IV. 結 論 .....	21

## 使用記号

- $a$ : 軸受最小隙間  
 $b$ : 軸受の中心半径における最大傾き量  
 $h$ : 隙間の厚さ  
 $\bar{n}$ : 回転数の無次元項  $\bar{n} = rNb^2/g\mu$   
 $p$ : 圧力  
 $\bar{p}$ : 圧力の無次元項  $\bar{p} = -\frac{p}{\mu N} \left(\frac{b}{L}\right)^2$   
 $r$ : 回転中心からの半径  
 $t$ : 時間  
 $u$ : 円周方向の分速度  
 $v$ : 半径方向の分速度  
 $z$ : 滑り面からの垂直距離  
 $L$ : 軸受の半径方向の長さ  
 $N$ : 滑り面の毎秒回転数  
 $R$ : 滑り面の外半径  
 $\gamma$ : 潤滑油の比重量  
 $\theta$ : 軸受面の開き角  
 $\mu$ : 潤滑油の粘性係数  
 $\nu$ : 潤滑油の動粘性係数

## I. 緒言

テーパー・ランド型推力軸受はミッチェル型推力軸受とともに水車発電機、船用推進機および蒸気タービン等の比較的大型回転機械の推力軸受として広く使われているが、その潤滑特性を理論的あるいは実験的に解析する場合には、テーパー・ランド型推力軸受の方が Tilting pad bearing に属するミッチェル型推力軸受にくらべて、軸受面の傾きおよび隙間の厚さを一定に保ちうる点で適当である。しかしながら、それらの潤滑原理はいずれも軸受面と境界面とが互いに潤滑油を含む楔型の隙間を介して運動し、両者の相対速度によって生ずる流体圧が推力と釣合うようになっているため、同一の潤滑理論が両型式の推力軸受に対して適用できることになる。従来、この種の軸受に対する流体力学的な潤滑理論の基礎式としては軸受面と境界面とが互いに直線運動をする場合の式を単に円柱座標に変換したレイノルズの式が用いられていて、慣性力の項が考慮されておらず潤滑油が回転運動をすることによって生ずる遠心力等の影響は無視されたままになっている。

最近、大型回転機械の使用速度が次第に高速化される傾向にあるとき、その重要部分であ

る推力軸受の流体力学的な潤滑理論に関して、回転運動にともなう慣性力の影響を検討しておくことは意義があろう。

一般に潤滑の問題を流体力学的に解析する場合には、次のような仮定に基くのが普通である：

- 1) 軸受の隙間における油膜の厚さが軸受の寸法割合にくらべて非常に薄く、したがって油の流動状態は層流である。
- 2) 油はニュートン流体の性質をもっている。
- 3) 油の粘性係数は温度・圧力の変化によって変らない。
- 4) 油が隙間において加速されることにより生ずる慣性力は粘性力にくらべて無視しうほど小さい。

しかしながら、回転機械の高温・高圧・高負荷および高速回転数における使用にともない潤滑油の軸受間隙を通る際の流動状態は上記の仮定に従わなくなるので、何らかの形で従来の潤滑理論に対する乱流の影響、温度・圧力の変化による粘性係数の変化の影響、および慣性力の影響等を考慮してやらなければならない。Sternlicht, B. は推力軸受において温度と圧力が粘性係数に対して著しい影響をもつことに着目し、軸受内の温度および圧力分布に関する実験について報告しており<sup>1)</sup>、Milne, A. A. はジャーナル軸受においても慣性力の項を無視することができないとして解析を試みている<sup>2)</sup>。また Chou, Y. T. および Saibel, E. は直線運動としての送り軸受内における乱流の影響に関する理論考察を報告している<sup>3)</sup>。

本報告は上記の理由から、理論的に解析の可能な慣性力の項を導入した場合を取扱おうとするものであって、理論考察には上記の仮定のうち、1), 2), 3)を採用してある。

## II. 潤滑理論の基礎式

### §1. 粘性流体の流れの基礎方程式

時間を  $t$ 、流体の速度を  $\mathbf{V}$ 、密度を  $\rho$  とするとき、液体の単位質量に関して次のような連続の方程式が成立する。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (1)$$

いま、流れが定常であれば  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  であるから

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2)$$

となる。特に流体が非圧縮性 ( $\rho = \text{一定}$ ) であれば、(1) 式は

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \quad (3)$$

1), 2), 3) 参考文献 1), 2), 3) を参照。

となり、これは流れが定常であると否にかかわらず成立する。

一方、粘性流体の運動方程式は単位質量の粘性流体に作用する力と加速度との釣合から、Navier-Stokes の式として広く知られている運動の基礎式

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{1}{3\rho} \mu \text{grad div } \mathbf{V} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{V} \quad (4)$$

となる。ここに

$\mathbf{K}$ : 外 力

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla V^2 - \mathbf{V} \times \text{rot } \mathbf{V}$$

である。いま、流体が非圧縮性である場合には、(3)式より  $\text{div } \mathbf{V} = 0$  であるから(4)式は

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{V} \quad (5)$$

となる。

したがって、非圧縮性粘性流体の流れに関する基礎方程式は(3)式および(5)式で与えられ、これらを第1表に示すような方向余弦を用いて直交曲線座標  $(\alpha, \beta, r)$  で表わすことにすれば次のようになる。

第1表 方 向 余 弦

	$x$	$y$	$z$
$\alpha$	$\frac{1}{h_1} \frac{\partial x}{\partial \alpha}, h_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x}$	$\frac{1}{h_1} \frac{\partial y}{\partial \alpha}, h_1 \frac{\partial \alpha}{\partial y}$	$\frac{1}{h_1} \frac{\partial z}{\partial \alpha}, h_1 \frac{\partial \alpha}{\partial z}$
$\beta$	$\frac{1}{h_2} \frac{\partial x}{\partial \beta}, h_2 \frac{\partial \beta}{\partial x}$	$\frac{1}{h_2} \frac{\partial y}{\partial \beta}, h_2 \frac{\partial \beta}{\partial y}$	$\frac{1}{h_2} \frac{\partial z}{\partial \beta}, h_2 \frac{\partial \beta}{\partial z}$
$r$	$\frac{1}{h_3} \frac{\partial x}{\partial r}, h_3 \frac{\partial r}{\partial x}$	$\frac{1}{h_3} \frac{\partial y}{\partial r}, h_3 \frac{\partial r}{\partial y}$	$\frac{1}{h_3} \frac{\partial z}{\partial r}, h_3 \frac{\partial r}{\partial z}$

ここに

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2} \\ h_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2} \\ h_3 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

連続の式:

$$\text{div } \mathbf{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial (h_2 h_3 V_\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (h_3 h_1 V_\beta)}{\partial \beta} + \frac{\partial (h_1 h_2 V_r)}{\partial r} \right\} = 0 \quad (7)$$

運動方程式:

( $\alpha$  方向)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V_\alpha}{\partial t} + \frac{V_\alpha}{h_1} \frac{\partial V_\alpha}{\partial a} + \frac{V_\beta}{h_2} \frac{\partial V_\alpha}{\partial \beta} + \frac{V_r}{h_3} \frac{\partial V_\alpha}{\partial r} - \frac{V_\beta^2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial a} - \frac{V_r^2}{h_1 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial a} + \\
& + \frac{V_\alpha V_\beta}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \beta} + \frac{V_\alpha V_r}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial r} = K_\alpha - \frac{1}{\rho h_1} \frac{\partial p}{\partial a} + \frac{\mu}{\rho} \left[ \mathcal{F}^2 V_\alpha + \frac{2}{h_1} \times \right. \\
& \times \frac{\partial V_\beta}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{h_2} \right) + \frac{2}{h_1} \frac{\partial V_r}{\partial r} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{h_3} \right) - \frac{2}{h_2} \frac{\partial V_\beta}{\partial a} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{h_1} \right) - \\
& - \frac{2}{h_3} \frac{\partial V_r}{\partial a} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{h_1} \right) + \frac{V_\alpha}{h_1 h_2 h_3} \left\{ h_2 h_3 \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (h_2 h_3)}{\partial a} \right) + \right. \\
& + h_1 \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \beta} \right) + h_1 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{h_2}{h_3 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial r} \right) \left. \right\} + \\
& + \frac{V_\beta}{h_1 h_2 h_3} \left\{ h_2 h_3 \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (h_3 h_1)}{\partial \beta} \right) - h_1 \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial a} \right) \right\} + \\
& + \frac{V_r}{h_1 h_2 h_3} \left\{ h_2 h_3 \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (h_1 h_2)}{\partial r} \right) - h_1 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{h_2}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial a} \right) \right\} \left. \right] \quad (8-a)
\end{aligned}$$

(β 方向)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V_\beta}{\partial t} + \frac{V_\alpha}{h_1} \frac{\partial V_\beta}{\partial a} + \frac{V_\beta}{h_2} \frac{\partial V_\beta}{\partial \beta} + \frac{V_r}{h_3} \frac{\partial V_\beta}{\partial r} - \frac{V_r^2}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial \beta} - \frac{V_\alpha^2}{h_2 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \beta} + \\
& + \frac{V_\beta V_r}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial r} + \frac{V_\beta V_\alpha}{h_2 h_1} \frac{\partial h_2}{\partial a} = K_\beta - \frac{1}{\rho h_2} \frac{\partial p}{\partial \beta} + \frac{\mu}{\rho} \left[ \mathcal{F}^2 V_\beta + \frac{2}{h_2} \frac{\partial V_r}{\partial r} \times \right. \\
& \times \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{h_3} \right) + \frac{2}{h_2} \frac{\partial V_\alpha}{\partial a} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{h_1} \right) - \frac{2}{h_3} \frac{\partial V_r}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{h_2} \right) - \frac{2}{h_1} \frac{\partial V_\alpha}{\partial \beta} \times \\
& \times \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{h_2} \right) + \frac{V_\alpha}{h_1 h_2 h_3} \left\{ h_3 h_1 \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (h_2 h_3)}{\partial a} \right) - h_2 \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \beta} \right) \right\} + \\
& + \frac{V_\beta}{h_1 h_2 h_3} \left\{ h_3 h_1 \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (h_3 h_1)}{\partial \beta} \right) + h_2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial r} \right) + \right. \\
& + h_2 \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial a} \right) \left. \right\} + \frac{V_r}{h_1 h_2 h_3} \left\{ h_3 h_1 \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (h_1 h_2)}{\partial r} \right) - \right. \\
& - h_2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial \beta} \right) \left. \right] \quad (8-b)
\end{aligned}$$

(r 方向)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V_r}{\partial t} + \frac{V_\alpha}{h_1} \frac{\partial V_r}{\partial a} + \frac{V_\beta}{h_2} \frac{\partial V_r}{\partial \beta} + \frac{V_r}{h_3} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_\alpha^2}{h_3 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial r} - \frac{V_\beta^2}{h_3 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial r} + \\
& + \frac{V_r V_\alpha}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial a} + \frac{V_r V_\beta}{h_3 h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \beta} = K_r - \frac{1}{\rho h_3} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \left[ \mathcal{F}^2 V_r + \frac{2}{h_3} \frac{\partial V_\alpha}{\partial a} \times \right. \\
& \times \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{h_1} \right) + \frac{2}{h_3} \frac{\partial V_\beta}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{h_2} \right) - \frac{2}{h_1} \frac{\partial V_\alpha}{\partial r} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{h_3} \right) - \frac{2}{h_2} \frac{\partial V_\beta}{\partial r} \times \\
& \times \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{h_3} \right) + \frac{V_\alpha}{h_1 h_2 h_3} \left\{ h_1 h_2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (h_2 h_3)}{\partial a} \right) - h_3 \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{h_2}{h_3 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial r} \right) \right\} + \\
& + \frac{V_\beta}{h_1 h_2 h_3} \left\{ h_1 h_2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (h_3 h_1)}{\partial \beta} \right) - h_3 \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial r} \right) \right\} + \\
& + \frac{V_r}{h_1 h_2 h_3} \left\{ h_1 h_2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (h_1 h_2)}{\partial r} \right) + h_3 \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{h_2}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial a} \right) + \right. \\
& + h_3 \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial \beta} \right) \left. \right] \quad (8-c)
\end{aligned}$$

ただし

$$\mathcal{F}^2 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial a} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right\}$$

これらの基礎方程式を円柱座標  $(r, \theta, z)$  で表わすため、 $\alpha=r, \beta=\theta, \gamma=z$  なるものとすれば、直交直線座標  $(x, y, z)$  と円柱座標  $(r, \theta, z)$  との間には

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

なる関係があるから、(6) 式より  $h_1, h_2, h_3$  はそれぞれ

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1 \quad (10)$$

となる。また

$$\left. \begin{aligned} V_\alpha &= V_r = v \\ V_\beta &= V_\theta = u \\ V_\gamma &= V_z = w \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

なるものとして、これら (10) 式および (11) 式を基礎方程式 [(7) 式および (8-a, b, c) 式] に代入すればそれぞれ次のようになる。

連続の式：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

運搬方程式：

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{u^2}{r} \right) &= \rho K_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \\ &+ \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (13-a)$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{vu}{r} \right) &= \rho K_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ &+ \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (13-b)$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \rho K_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \\ &+ \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (13-c)$$

## § 2. 潤滑理論の基礎式

大型回転機械の推力軸受は楔型の隙間を介して流体潤滑を行なうが、その場合次のような仮定に基づくのが普通である：

1) 油の流れは定常流である。したがって

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (14)$$

2) 隙間の厚さは半径方向および円周方向の長さと比較して非常に小さいため、厚さ方向 ( $z$  方向) の流れはないものと考えることができる。したがって

$$w = 0 \quad (15)$$

3) 油が流動している系に作用する外力は流動することによって生ずる圧力、および加速度によって生ずる力にくらべて無視しうるほど小さい。したがって

$$K_r = K_\theta = K_z = 0 \quad (16)$$

これらの仮定を粘性流体の流れの基礎式 [(12) および (13-a, b, c) 式] に代入すれば連続の式:

$$\frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \quad (17)$$

運動方程式:

$$\begin{aligned} \rho \left( v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u^2}{r} \right) \\ = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (18-a)$$

$$\begin{aligned} \rho \left( v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{vu}{r} \right) \\ = - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (18-b)$$

$$0 = - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (18-c)$$

となる。ここで (18-c) 式は厚さ方向に圧力勾配のないことを意味するものであるから、運動方程式としては (18-a) 式および (18-b) 式のみを考えればよいことになる。したがって問題はこれらの両式を (17) 式と関連させて解くことに帰着するが、この解を求めることは方程式が非線型微分方程式であるために極めて困難である。

一般に複雑な方程式を解く場合、各項の order を比較して極く小さな order の項を省くことが行なわれるが、これは方程式の性質をほとんど変えることなく複雑さを避けることのできる方法として有効なものである。本報告でも問題の複雑化を避けるため、(18-a) 式および (18-b) 式における  $p$  の項を除いた各項について order を比較してみる。

いま、半径方向の代表長さを  $r$  とすれば、円周方向のそれは  $r\theta$  であり、これらが同一 order をもつものと考えて

$$r\theta = r \quad \therefore \theta = 1$$

となる。また隙間の厚さ  $z$  は  $r$  に較べて非常に小さいから

$$z \ll r$$

であり、円周方向の速度  $u$  は境界面の回転周速度  $U$  と等しい order をもつものとして

$$u = U$$

である。ここで

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} \propto \frac{U}{1}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \propto \frac{U}{r}$$

なるものと考えれば(17)式より

$$\frac{rv}{r} + \frac{U}{1} = 0, \quad \therefore |v| = U$$

となるから  $v$  の order は  $U$  である。したがって(18-a)式および(18-b)式の order は次のようになる。

左辺の order :

$$v \frac{\partial v}{\partial r} = v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{U^2}{r}, \quad \frac{u}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{U^2}{r},$$

$$\frac{u^2}{r} = \frac{vu}{r} = \frac{U^2}{r}$$

右辺の order :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{U}{r^2}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{U}{r^2},$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{U}{r^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{U}{z^2},$$

$$\frac{v}{r^2} = \frac{u}{r^2} = \frac{U}{r^2}, \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{U}{r^2}$$

これより左辺の order はすべて  $U^2/r$  であり、右辺の order は  $U/r^2$  および  $U/z^2$  であることがわかる。したがって  $z \ll r$  なることより

$$\frac{U}{r^2} \ll \frac{U}{z^2}$$

であるから、右辺の各項のうち  $\partial^2 v / \partial z^2$  および  $\partial^2 u / \partial z^2$  以外の各項は省略しうる項であることがわかる。ゆえに(18-a)式および(18-b)式は簡単になり次のように表わされる。

$$\rho \left( v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u^2}{r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (19-a)$$

$$\rho \left( v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{vu}{r} \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (19-b)$$

上式において左辺は慣性力の項であり、右辺第2項は粘性力の項である。

通常使用されている潤滑油に関しては  $\nu = \mu/\rho$  [cm<sup>2</sup>/sec] は1の order であるから、境界面の円周速度が小さく

$$\frac{U^2}{r} \ll \frac{U}{z^2}$$

と考える場合には慣性力は粘性力にくらべて非常に小さくなるため、(19-a) 式および (19-b) 式の左辺を無視することができ運動方程式は

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \tag{20-a}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{20-b}$$

となる。

一方、境界面の回転速度が大きくなれば  $U^2/r$  を  $U/z^2$  にくらべて無視できなくなるため慣性力の項を導入した運動方程式を用いなければならなくなるが、(19-a, b) 式をそのまま解くことは非常に困難であるため、左辺の各項のうち最大項を導入した場合を考える。すなわち慣性力の原因となる加速度の項としては

$$v \frac{\partial v}{\partial r}, \frac{u}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{u^2}{r}, v \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{vu}{r} \tag{21}$$

があるが、楔型の隙間を流体が流れる場合、円周方向の速度  $u$  は境界面の回転につれて運動する流体の速度であるため、半径方向の速度  $v$  にくらべて比較的大きな値をもつ。また  $\partial u/\partial \theta$  も  $u$  が比較的等速運動をすることより小さく、結局 (21) 式の各項の大きさは

$$\frac{u^2}{r} > v \frac{\partial v}{\partial r}, \frac{u}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, v \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{vu}{r}$$

となることが知られる。ここで慣性力の最大項  $\rho \frac{u^2}{r}$  は単位体積の流体に作用する遠心力の項であり、主として流体の回転運動を代表する項であるから、(20-a, b) 式に基づく解析 (Reynolds の方程式—後述、(31) 式—より出発した解析) にくらべて回転運動の影響を知ることができる点で意義がある。

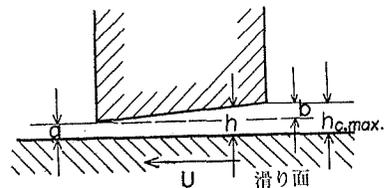
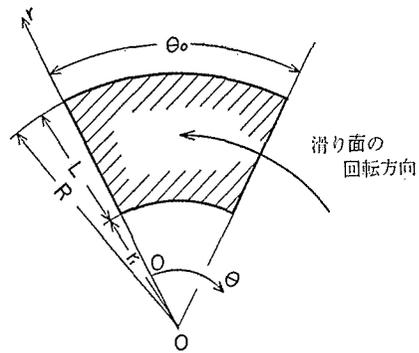
かかる回転運動による慣性力の項を導入する場合には、(19-a, b) 式の左辺は  $-\rho \frac{u^2}{r}$  を残してすべて消えるから、半径向および円周方向についてそれぞれ

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \rho \frac{u^2}{r} \tag{22}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{23}$$

となる。

したがって、潤滑理論の基礎式としてはこれらの両式を連続の式 (17) とともに第 1 図に示すような楔型の隙間に適用して解けばよいことになる。



第 1 図 推力軸受の形状

いま、流体の微小部分に関する連続の式(17)を任意の隙間  $h$  に関する連続の式に書きかえれば

$$\frac{\partial}{\partial r} \int_0^h (rv) dz + \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^h u dz = 0 \quad (24)$$

となり、運動方程式 [(22) 式および (23) 式] も  $z$  に関して積分すればそれぞれ

$$v = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial r} z^2 - \frac{\rho}{r} \iint u^2 dz dz + C_1 z + C_2 \right] \quad (25)$$

$$u = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{1}{2r} \frac{\partial p}{\partial \theta} z^2 + C_3 z + C_4 \right] \quad (26)$$

となる。ただし  $C_1, C_2, C_3, C_4$  は積分常数である。

ここで、速度および圧力に関する境界条件を次のように選ぶ；

$$\left. \begin{array}{l} \text{境界面 (滑り面) 上では } z = 0; u = U, v = 0 \\ \text{軸受面上では } z = h; u = 0, v = 0 \\ \text{圧力は軸受の外周ですべて零} \end{array} \right\} \quad (27)$$

この境界条件(27)式を(26)式に代入して  $C_3$  および  $C_4$  をきめれば

$$C_3 = -\frac{1}{h} \left[ \frac{h^2}{2r} \frac{\partial p}{\partial r} + \mu U \right], \quad C_4 = \mu U$$

を得るから、これより円周方向の速度  $u$  は

$$u = \frac{U}{h} (h-z) - \frac{1}{2\mu r} \frac{\partial p}{\partial \theta} (h-z)z \quad (28)$$

となる。さらに(28)式を(25)式に代入し、境界条件(27)式にしたがって  $C_1$  および  $C_2$  をきめれば

$$C_1 = \frac{\rho}{r} \left[ \frac{h^3}{240\mu^2 r^2} \left( \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{Uh^3}{20\mu r} \left( \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{U^2 h}{4} \right] - \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad C_2 = 0$$

となるから、半径方向の速度  $v$  は

$$\begin{aligned} v = & -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} (h-z)z - \frac{\rho}{\mu r} \left[ \frac{\left( \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)^2}{240\mu^2 r^2} (2z^6 - 6hz^5 + 5h^2 z^4 - h^3 z) + \frac{U \left( \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)}{60\mu r} \right. \\ & \left. \times \left( -3 \frac{z^5}{h} + 10z^4 - 10hz^3 + 3h^2 z \right) + \frac{U^2}{12} \left( \frac{z^4}{h^2} - 4 \frac{z^3}{h} + 6z^2 - 3hz \right) \right] \end{aligned} \quad (29)$$

となる。(28)式および(29)式を連続の式(24)に代入して整理すれば

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{rh^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{h^3}{\mu r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\rho h^3}{10\mu} \left\{ -\frac{3h^4}{28\mu^2 r^2} \left( \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{Uh^2}{\mu r} \left( \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) - 3U^2 \right\} \right] = 6U \frac{\partial h}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (30)$$

を得る。結局、これが回転運動による慣性力の項を考慮した潤滑理論の基礎式であって、考慮しない場合には(20-a, b)式から同様の手順によって得られる Reynolds の方程式

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r h^3}{\mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{h^3}{\mu r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) = 6U \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (31)$$

となる。(30)式と(31)式とを比較すれば明らかなように、回転運動による慣性力の影響を示す項は(30)式の左辺第3項であることが知られる。

### § 3. 潤滑理論の基礎式の無次元式による表示

一般に流体力学的な諸問題を取扱う場合、使用されている種々の量をそれぞれの次元にしたがっていくつかの無次元項にまとめ、その無次元項を用いて解析を進めて行く方法がしばしばとられる。いま潤滑理論の基礎式である(30)式および(31)式を無次元化するために次のような無次元項を選ぶ：

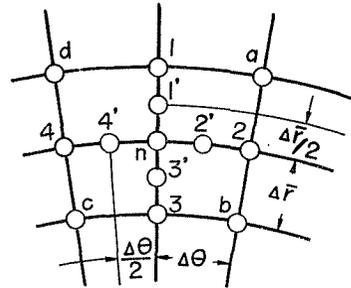
$$\left. \begin{aligned} \bar{r} &= \frac{r}{R}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_{\text{avg}}} = 1, \quad \bar{z} = \frac{z}{b}, \quad \bar{h} = \frac{h}{b}, \quad \bar{u} = \frac{u}{U}, \quad \bar{v} = \frac{v}{U} \\ U &= 2\pi r N = 2\pi R \bar{r} N, \quad \bar{p} = -\frac{\bar{p}}{\mu N} \left( \frac{b}{L} \right)^2, \quad \bar{n} = \frac{N b^2}{\nu} = \frac{\rho N b^2}{\mu} = \frac{r N b^2}{g \mu} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

これらを用いれば(30)式および(31)式はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[ \frac{3\bar{n}\bar{h}'}{280 \left( \frac{R}{L} \right)^2 \bar{r}^2} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\pi \bar{n} \bar{h}^5}{5} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \frac{6\pi^2 \bar{n} \bar{r}^2 \bar{h}^3}{5} \left( \frac{R}{L} \right)^2 \right] = -12\pi \bar{r} \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) = -12\pi \bar{r} \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} \quad (34)$$

(33)式および(34)式を解いて圧力分布を求めるのであるが、これらの式から解析的に厳密解を得ることは困難であり、近似計算によって求めるのが妥当な方法と考えられる。そのため Relaxation method を用いることにすれば、(33)式および(34)式は第2図に示すような位置の添字にしたがってそれぞれ次のように書きかえることができる。



第2図 位置の添字

慣性力の項を導入した場合：

$$\begin{aligned} \left( \frac{\bar{r}_1 \bar{h}_1^3 + \bar{r}_3 \bar{h}_3^3}{(\Delta \bar{r})^2} + \frac{\bar{h}_2^3 + \bar{h}_4^3}{\bar{r}_n (\Delta \theta)^2} \right) \bar{p}_n - \frac{\bar{r}_1 \bar{h}_1^3 \bar{p}_1}{(\Delta \bar{r})^2} - \frac{\bar{h}_2^3 \bar{p}_2}{\bar{r}_n (\Delta \theta)^2} - \frac{\bar{r}_3 \bar{h}_3^3 \bar{p}_3}{(\Delta \bar{r})^2} - \\ - \frac{\bar{h}_4^3 \bar{p}_4}{\bar{r}_n (\Delta \theta)^2} - 12\pi \left( \frac{R}{L} \right)^2 \bar{r}_n \frac{\bar{h}_2 - \bar{h}_4}{\Delta \theta} - \frac{3\pi^2 \bar{n}}{5 \Delta \bar{r}} \left( \frac{R}{L} \right)^2 (\bar{r}_1^2 \bar{h}_1^3 - \bar{r}_3^2 \bar{h}_3^3) - \\ - \frac{\pi \bar{n} \bar{h}_1^5}{20 \Delta \bar{r} \Delta \theta} (\bar{p}_a - \bar{p}_b) + \frac{\pi \bar{n} \bar{h}_3^5}{20 \Delta \bar{r} \Delta \theta} (\bar{p}_b - \bar{p}_c) - \frac{3\bar{n} \bar{h}_1^7 (\bar{p}_a - \bar{p}_b)^2}{2240 (R/L)^2 \Delta \bar{r} (\Delta \theta)^2 \bar{r}_1^2} + \\ + \frac{3\bar{n} \bar{h}_3^7 (\bar{p}_b - \bar{p}_c)^2}{2240 (R/L)^2 \Delta \bar{r} (\Delta \theta)^2 \bar{r}_3^2} = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

慣性力の項を導入しない場合：

$$\left( \frac{\bar{r}_1 \bar{h}_1^3 + \bar{r}_3 \bar{h}_3^3}{(\Delta \bar{r})^2} + \frac{\bar{h}_2^3 + \bar{h}_4^3}{\bar{r}_n (\Delta \theta)^2} \right) \bar{p}_n - \frac{\bar{r}_1 \bar{h}_1^3 \bar{p}_1}{(\Delta \bar{r})^2} - \frac{\bar{r}_3 \bar{h}_3^3 \bar{p}_1}{(\Delta \bar{r})^2} - \frac{\bar{h}_2^3 \bar{p}_2}{\bar{r}_n (\Delta \theta)^2} - \frac{\bar{h}_4^3 \bar{p}_4}{\bar{r}_n (\Delta \theta)^2} - 12\pi \left( \frac{R}{L} \right)^2 \bar{r}_n \frac{\bar{h}_2 - \bar{h}_4}{\Delta \theta} = 0 \tag{36}$$

これらの両式を用いれば軸受面内に適当に選んだ各  $n$  点に関する圧力分布を近似的に計算することができる。

### III. 潤滑特性におよぼす慣性力の影響

#### §1. 数値計算

圧力分布を計算する際に問題となるのは軸受面の形状すなわち隙間の形状をいかに選ぶかということである。一般に軸受面の形状は理論的な取扱いに不便な形で形成されているが、ここではそれを容易にするために

$$h = a + r \tan \varphi \sin \theta \tag{37}$$

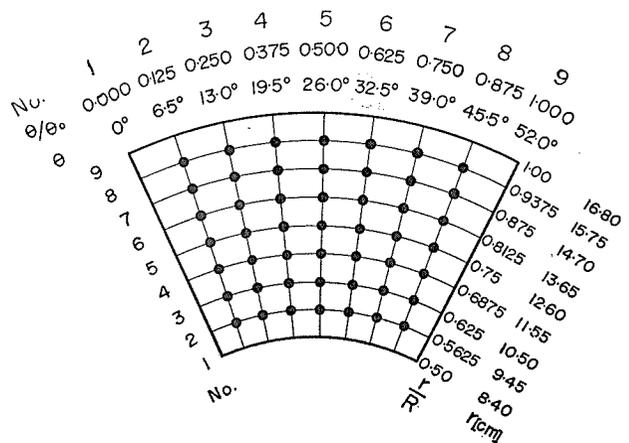
なる最も簡単な形状を採用している。すなわち、上式からも明らかなように軸受面は一つの平面で作られていて、軸受端 ( $\theta=0$ ) で半径に無関係な最小隙間  $a$  となり、同時に境界面に対して  $\tan \varphi$  だけ傾いているような面である。また、軸受の寸法割合は実用上妥当と思われるものの一例を採用し、

$$\left. \begin{aligned} a &= 0.020 \text{ cm}, & b &= 0.160 \text{ cm}, & a/b &= 1/8, \\ L &= 8.40 \text{ cm}, & R &= 16.80 \text{ cm}, & L/R &= 1/2 \\ \theta_0 &= 52.0^\circ = 0.907571 \text{ radian} \end{aligned} \right\} \tag{38}$$

としている。

一般に、潤滑特性は非常に多くの因子により影響を受けるが、いま目的とするところは Reynolds の方程式に対する慣性力の影響を知ることであるから、その他の因子については上記のように妥当と思われる範囲内に固定して考えてもなんら支障をきたすことにはならない。

数値計算は軸受面を第3図に示すように分割した網目状の区分線の各交点について(35)式および(36)式を適用し、Relaxationの操作をくりかえすことにより行なわ



第3図 Relaxation method による計算点

れる。ただし、(33)式および(35)式における慣性力の項の中には回転数  $N$  に直接比例する  $\bar{n}(=Nb^2/\nu)$  なる無次元項が入っているため、これを適当に選んでから計算しなければならない。 $\bar{n}$  は  $\nu$  および  $b$  をきめれば回転数を与えるものであるから、慣性力の影響を考える場合、非常に重要な意味をもってくる。本報告では  $\bar{n}$  として

$$\bar{n} = 0.25, 0.50, 1.00, 2.00, 3.00$$

なる5通りの値を選定し、それぞれについて潤滑特性を算定してある。

慣性力の影響を考慮しない場合の計算は  $\bar{n}$  に無関係であり、得られた圧力分布の無次元値  $\bar{p}_n$  が回転数に比例する圧力分布を与えることになる。したがってこの場合の数値計算は1通りでよく、また項数も少ないので慣性力の項を導入した場合にくらべて比較的容易に行なうことができる。

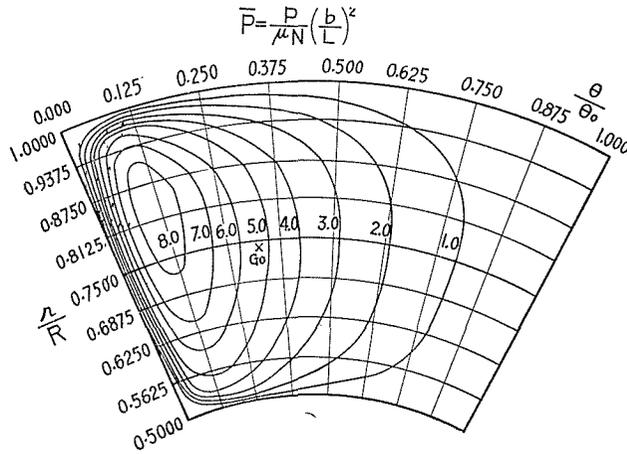
## §2. 圧力分布

以上の数値例に対する圧力分布の計算結果を第3図に対比して示せば第2表のようになる。ただし、軸受周辺の圧力はすべて零と仮定しているため第2表には軸受面内の圧力分布だけを示してある。また、これらの圧力分布のうち、慣性力の項を導入しない場合と導入した場

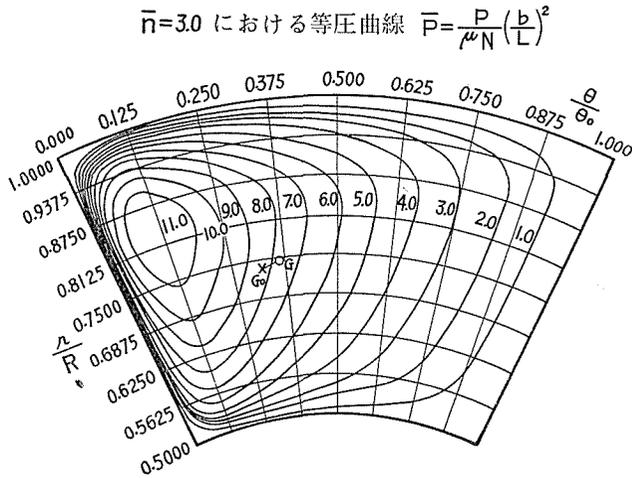
第2表 圧力分布  $\bar{p} = -\frac{p}{\mu N} \left(\frac{b}{L}\right)^2$

No.	$\theta/\theta_0$	2	3	4	5	6	7	8
No.	$r/R$	Inertia Force の項を導入しない場合						
8	0.9375	6.85	4.37	2.72	1.72	1.08	0.63	0.29
7	0.8750	8.46	5.99	4.00	2.65	1.70	1.01	0.46
6	0.8125	8.65	6.47	4.50	3.06	2.01	1.20	0.55
5	0.7500	8.31	6.44	4.58	3.17	2.10	1.26	0.58
4	0.6875	7.68	6.12	4.43	3.10	2.07	1.25	0.58
3	0.6250	6.81	5.54	4.04	2.84	1.90	1.15	0.53
2	0.5625	5.32	4.31	3.12	2.17	1.45	0.88	0.41
Inertia Force の項を導入した場合								
$\bar{n} = 0.25$								
8	0.9375	7.03	4.58	2.93	1.92	1.25	0.76	0.37
7	0.8750	8.72	6.28	4.28	2.91	1.93	1.18	0.56
6	0.8125	8.91	6.76	4.78	3.32	2.22	1.36	0.64
5	0.7500	8.54	6.70	4.84	3.40	2.30	1.41	0.66
4	0.6875	7.88	6.34	4.64	3.29	2.22	1.36	0.64
3	0.6250	6.95	5.69	4.18	2.97	2.02	1.24	0.58
2	0.5625	5.41	4.42	3.22	2.27	1.53	0.94	0.44

	No.	2	3	4	5	6	7	8
	$\theta/\theta_0$	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750	0.875
No.	$r/R$	$\bar{n} = 0.50$						
8	0.9375	7.21	4.78	3.13	2.10	1.41	0.89	0.45
7	0.8750	8.97	6.56	4.56	3.16	2.14	1.35	0.65
6	0.8125	9.19	7.07	5.08	3.59	2.45	1.53	0.73
5	0.7500	8.80	7.00	5.13	3.67	2.52	1.57	0.75
4	0.6875	8.11	6.60	4.90	3.52	2.42	1.50	0.71
3	0.6250	7.14	5.92	4.40	3.17	2.18	1.35	0.64
2	0.5625	5.53	4.56	3.36	2.39	1.63	1.01	0.48
$\bar{n} = 1.00$								
8	0.9375	7.59	5.22	3.57	2.51	1.77	1.18	0.63
7	0.8750	9.52	7.17	5.16	3.71	2.61	1.70	0.85
6	0.8125	9.75	7.70	5.70	4.14	2.91	1.86	0.90
5	0.7500	9.31	7.57	5.68	4.17	2.94	1.88	0.91
4	0.6875	8.56	7.12	5.40	3.97	2.79	1.78	0.86
3	0.6250	7.51	6.34	4.82	3.55	2.49	1.58	0.76
2	0.5625	5.77	4.83	3.63	2.64	1.84	1.17	0.57
$\bar{n} = 2.00$								
8	0.9375	8.35	6.09	4.44	3.34	2.51	1.77	0.99
7	0.8750	10.54	8.33	6.30	4.76	3.50	2.36	1.22
6	0.8125	10.78	8.86	6.82	5.16	3.75	2.47	1.23
5	0.7500	10.24	8.62	6.69	5.06	3.66	2.39	1.18
4	0.6875	9.33	7.99	6.24	4.72	3.40	2.21	1.10
3	0.6250	8.12	7.04	5.50	4.15	2.98	1.93	0.95
2	0.5625	6.17	5.30	4.08	3.04	2.16	1.40	0.69
$\bar{n} = 3.00$								
8	0.9375	9.06	6.91	5.27	4.14	3.23	2.36	1.36
7	0.8750	11.52	9.44	7.39	5.76	4.35	3.00	1.57
6	0.8125	11.76	9.96	7.87	6.09	4.51	3.01	1.51
5	0.7500	11.10	9.58	7.61	5.87	4.31	2.85	1.43
4	0.6875	10.03	8.78	6.99	5.38	3.94	2.61	1.32
3	0.6250	8.65	7.64	6.07	4.65	3.39	2.22	1.10
2	0.5625	6.50	5.68	4.45	3.37	2.44	1.59	0.79



(a) 慣性力の項を導入しない場合



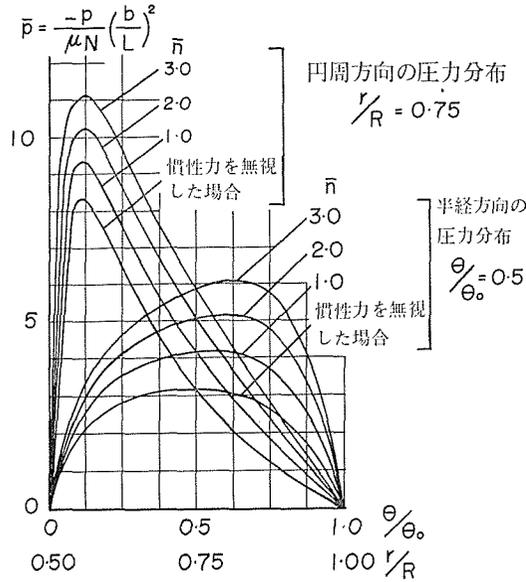
(b) 慣性力の項を導入した場合

第4図 等圧線図

合(一例として  $\bar{n}=3.00$ ) について等圧線図を示せば第4図のような結果となる。第4図からわかることは圧力中心の位置  $G$  が  $\bar{n}$  の増大につれて  $r$  および  $\theta$  の大きくなる方向に幾分移動することであり, Pinkus, O. および Lynn, W. の論文<sup>4)</sup> で述べているように  $\theta_0$ ,  $a/b$  および  $L/R$  によってのみ圧力中心の移動が考えられるものではない。

次に, これらの圧力分布を一例として, 軸受の中心半径上および中心円周上について図示すれば第5図のようになる。これより  $\bar{n}$  すなわち回転数が大きくなるにつれて圧力分布におよぼす慣性力の影響は無視しえないほど大きくなるのがわかる。

4) 参考文献4)を参照。



第5図 圧力分布におよぼす慣性力の影響

### §3. 負荷容量

圧力分布  $\bar{p}$  が第2表に示すように得られたので、負荷容量  $W$  は

$$W = - \int_{r_1}^R \int_0^{\theta_0} p r \, d\theta \, dr = \mu N R^2 \left( \frac{L}{b} \right)^2 F_v \tag{39}$$

ただし

$$F_v = \int_{\bar{r}_1}^{1.0} \int_0^{\theta_0} \bar{p} \bar{r} \, d\theta \, d\bar{r} \tag{40}$$

より計算することができる。また、軸受面積  $A$  は

$$A = \left( \frac{\theta_0}{2\pi} \right) \pi (R^2 - r_1^2) = \frac{\theta_0 R^2}{2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{L}{R} \right)^2 \right] \tag{41}$$

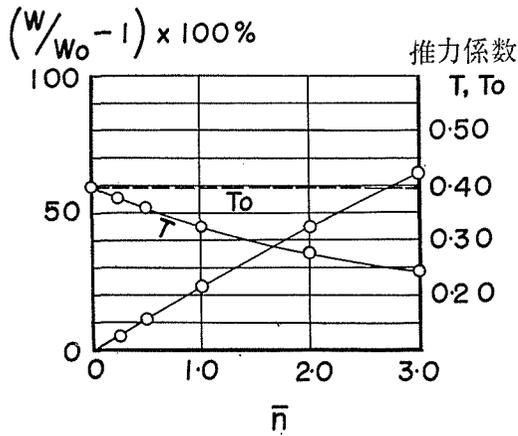
で与えられるから、軸受の平均負荷容量  $P$  および推力係数  $T$  はそれぞれ

$$P = \frac{W}{A} = \frac{2\mu N (L/b)^2 F_v}{\theta_0 [1 - (1 - L/R)^2]} \tag{42}$$

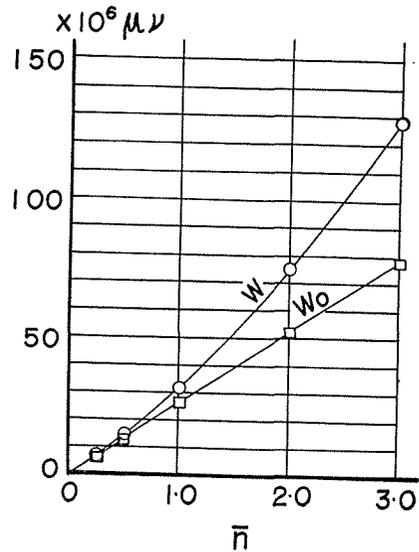
$$T = \frac{\mu N}{P} \left( \frac{L}{b} \right)^2 = \frac{\theta_0}{2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{L}{R} \right)^2 \right] \frac{1}{F_v} \tag{43}$$

となる。

第6図には上式にもとづいて計算した諸結果のうち、 $T_0$ 、 $T$  および  $(W/W_0 - 1) \times 100\%$  の値を  $\bar{n}$  について示してあり、第7図には  $W_0$  および  $W$  の値が示してある。ただし、 $T_0$ 、 $W_0$  等の添字は慣性力の影響を考慮しない場合 ( $\bar{n}$  に無関係な場合) に関するものあって、後述する  $L_{p0}$ 、 $\zeta_0$ 、 $q_{e0}$ 、 $q_{s0}$  についても同様である。



第6図 推力係数の変化と負荷容量の変化



第7図 負荷容量におよぼす慣性力の影響

第6図より明らかなように、 $\bar{n}$ が0.50以上の回転数になれば  $(W/W_0 - 1) \times 100\%$  の値は10%以上になるため、(31)式で与えられた慣性力の項を導入しない Reynolds の式からはもはや妥当な負荷容量を計算しえないことが推察される。それは推力係数  $T$  が回転数に対して一定値をとらず、第6図に示すような減少曲線を描くことから明らかであって、第7図に示した結果にも見られるように負荷容量  $W$  は  $T$  の減少すなわち  $\bar{n}$  の増加につれて著しく増大する傾向にあるためである。一方、慣性力の項を考えない場合には  $T = T_0$ 、 $W = W_0$  となり、負荷容量  $W_0$  は直線的に増大するにすぎない。

#### §4. 動力損失

潤滑油が隙間を流れる場合、円周方向の速度  $u$  は(28)式で与えられているから、これを  $z$  に関して微分し、境界面(滑り面)上における隙間の厚さ方向の速度勾配  $[du/dz]_{z=0}$  を求めれば

$$\left[ \frac{du}{dz} \right]_{z=0} = -\frac{U}{h} - \frac{h}{2\mu r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \tag{44}$$

となる。いま、境界面上における摩擦力を  $F$  とすれば

$$dF = -\mu \left[ \frac{du}{dz} \right]_{z=0} \cdot dA$$

であるから、これに(44)式を代入すれば

$$dF = \mu \left( \frac{U}{h} + \frac{h}{2\mu r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) r dr d\theta \tag{45}$$

を得る。したがって、粘性抵抗によって失われる動力  $L_p$  は

$$\begin{aligned}
 dL_p &= U dF \\
 &= 2\pi r N \mu \left( \frac{2\pi r N}{h} + \frac{h}{2\mu r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) r dr d\theta \\
 &= 4\mu\pi^2 N^2 \frac{r^3}{h} dr d\theta + \pi N r h \frac{\partial p}{\partial \theta} dr d\theta
 \end{aligned}$$

で定義されるから

$$\begin{aligned}
 L_p &= 4\mu\pi^2 N^2 \int_{r_1}^R \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{h} d\theta dr + \pi N \int_{r_1}^R \int_0^{2\pi} r h \frac{\partial p}{\partial \theta} d\theta dr \\
 &= 4\mu\pi^2 N^2 R^4 \frac{1}{b} \int_{\bar{r}_1}^{1.0} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{r}^3}{h} d\theta d\bar{r} - \mu\pi L^2 N^2 R^2 \frac{1}{b} \int_{\bar{r}_1}^{1.0} \int_0^{2\pi} \bar{r} \bar{h} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} d\theta d\bar{r} \\
 &= \zeta \frac{\pi\mu N^2 R^4}{b}
 \end{aligned} \tag{46}$$

ただし

$$\zeta = 4\pi \int_{\bar{r}_1}^{1.0} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{r}^3}{h} d\theta d\bar{r} - \left( \frac{L}{R} \right)^2 \int_{\bar{r}_1}^{1.0} \int_0^{2\pi} \bar{r} \bar{h} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} d\theta d\bar{r} \tag{47}$$

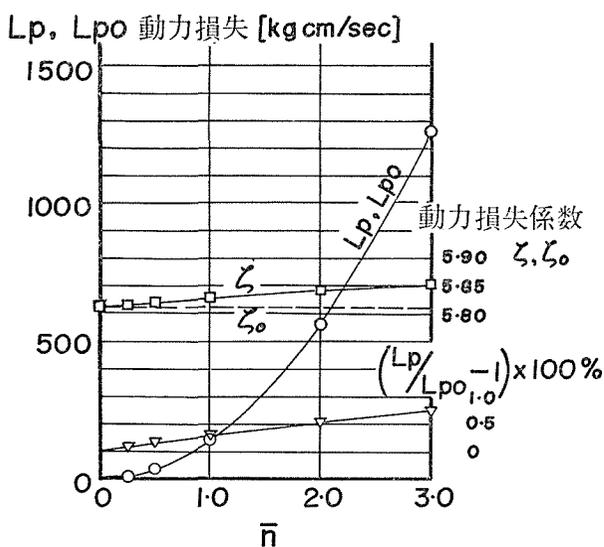
となる。

また、油の比熱を  $C_p$  [kcal/kg °C] とし、単位体積当りの重量を  $\gamma$  [kg/cm<sup>3</sup>] とすれば、油が隙間を流れる際に発生する温度上昇は

$$\Delta t = \frac{L_p}{J C_p \gamma Q} \text{ [°C]} \tag{48}$$

より計算することができる。ここに、 $J$  は熱の仕事当量 [kg cm/kcal]、 $Q$  は流量 [cm<sup>3</sup>/sec]、 $L_p$  は動力損失 [kg cm/sec] である。

第2表に示した圧力分布より  $\partial \bar{p} / \partial \theta$  を求め、(47)式より慣性力の項を導入した場合と導入



第8図 動力損失におよぼす慣性力の影響

しない場合との動力損失係数 ( $\zeta$  および  $\zeta_0$ ) を求めてこれらを (46) 式に代入すれば動力損失 ( $L_p$  および  $L_{p0}$ ) を算定することができる。これらをまとめて図示すれば第 8 図のようであるが、これより明らかなように  $L_p$  はほとんど慣性力の影響を受けないことが認められる。すなわち、 $\bar{n}=3.0$  の場合でも  $(L_p/L_{p0}-1)\times 100\%$  の値は 0.7% 程度であって動力損失の算定には慣性力の項を導入しない Reynolds の式 (31) で十分目的を達しうることがわかる。

## §5. 流 量

隙間における流れを円周方向 (end flow) および半径方向 (side flow) に分けて考えれば、それぞれの分速度は (28) 式および (29) 式で与えられるから、円周方向の流量  $Q_e$  は

$$Q_e = \int_{r_1}^R \int_0^h u dz dr \quad (49)$$

となり、半径方向の流量  $Q_s$  は

$$Q_s = \int_0^{\theta_0} \int_0^h rv dz d\theta \quad (50)$$

となる。いま、(49) 式および (50) 式を無次元項で表わすために、(32) 式に示した記号を使えば

$$\begin{aligned} Q_e &= \int_{r_1}^R \left[ \frac{Uh}{2} - \frac{h^3}{12\mu r} \left( \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \right] dr \\ &= RN L b \int_{\bar{r}_1}^{1.0} \left[ \frac{\bar{h}^3}{12\bar{r}} \left( \frac{L}{R} \right) \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \pi \bar{r} \bar{h} \left( \frac{R}{L} \right) \right] d\bar{r} \\ &= \pi RN L b (q_{e1} + q_{e2}) \\ &= \pi RN L b \cdot q_e \end{aligned} \quad (51)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} q_e &= q_{e1} + q_{e2} \\ q_{e1} &= \frac{1}{12\pi} \left( \frac{L}{R} \right) \int_{\bar{r}_1}^{1.0} \frac{\bar{h}^3}{\bar{r}} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) d\bar{r} \\ q_{e2} &= \frac{R}{L} \int_{\bar{r}_1}^{1.0} \bar{r} \bar{h} d\bar{r} = \frac{R}{L} \int_{\bar{r}_1}^{1.0} \bar{r} \left( \frac{a}{b} + \frac{R\bar{r}}{b} \tan \varphi \sin \theta \right) d\bar{r} \\ &= \frac{a}{b} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{L}{R} \right) \right] + \frac{R(1 + \bar{r}_1 + \bar{r}_1^2)}{3b} \tan \varphi \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

となる。同様にして

$$\begin{aligned} Q_s &= \int_0^{\theta_0} \left[ -\frac{r h^3}{12\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\rho h^3}{120\mu} \left\{ \frac{3h^4}{28\mu^2 r^2} \left( \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{Uh^2}{\mu r} \left( \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + 3U^2 \right\} \right] d\theta \\ &= RN L b \left( \frac{L}{R} \right) \int_0^{\theta_0} \left[ \frac{\bar{r} \bar{h}^3}{12} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{\bar{n}}{10} \left\{ \frac{\bar{h}^7}{112\bar{r}^2} \left( \frac{L}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\pi \bar{h}^5}{6} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \pi^2 \bar{r}^2 \bar{h}^3 \left( \frac{R}{L} \right)^2 \right\} \right] d\theta \\ &= \pi RN L b (q_{s1} + q_{s2}) \end{aligned}$$

$$= \pi RNLb \cdot q_s \tag{53}$$

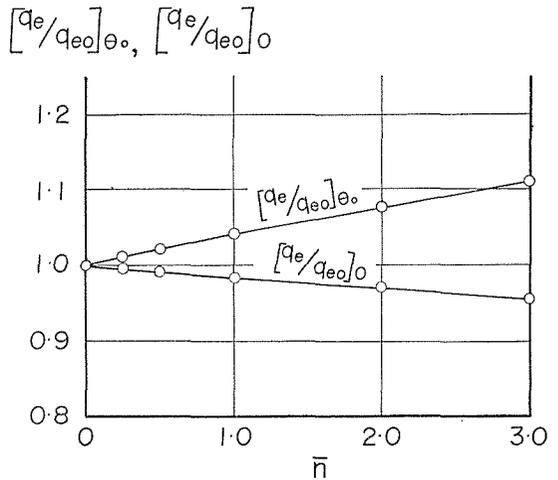
ただし

$$\left. \begin{aligned} q_s &= q_{s1} + q_{s2} \\ q_{s1} &= \frac{1}{12\pi} \left( \frac{L}{R} \right) \int_0^{\theta_0} \bar{r} \bar{h}^3 \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right) d\theta \\ q_{s2} &= \frac{\bar{n}}{10\pi} \left( \frac{L}{R} \right) \int_0^{\theta_0} \left[ \frac{\bar{h}^7}{112\bar{r}^2} \left( \frac{L}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\pi \bar{h}^5}{6} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \pi^2 \bar{r}^2 \bar{h}^3 \left( \frac{R}{L} \right)^2 \right] d\theta \end{aligned} \right\} \tag{54}$$

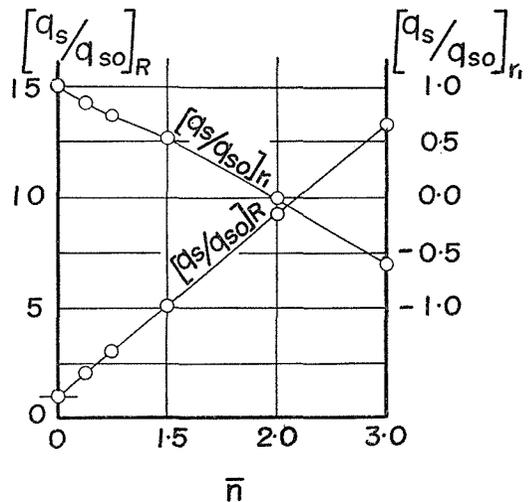
となる。

(52) 式および (54) 式から明らかなように、円周方向の流量  $Q_e$  は圧力勾配 ( $q_{e1}$  を発生させる) と粘性剪断力 ( $q_{e2}$  を発生させる) とによって生ずるものであり、半径方向の流量  $Q_s$  は圧力勾配 ( $q_{s1}$  を発生させる) と慣性力 ( $q_{s2}$  を発生させる) とによって生ずるものであることがわかる。

いま、慣性力の影響を知るために (52) 式および (54) 式から  $q_e$  および  $q_s$  を求め、それぞれについて  $q_{e0}$  および  $q_{s0}$  との比をとれば第 9 図および第 10 図に示すような結果となる。すなわち、第 9 図によれば、 $\bar{n}$  の増大にともない流入端 ( $\theta = \theta_0$ ) における円周方向の流量割合は慣性力の影響を考慮しない場合に較べて増加し、流出端 ( $\theta = 0$ ) におけるそれは幾分減少する傾向にあることが認められる。また、第 10 図からは内側方向 ( $r = r_1$  方向) への流量割合は慣性力のために著しく減少し、 $\bar{n} = 2.0$  附近で軸受面内からの流出が止まり、それ以上の回転数では逆に軸受面内へ流入することが認められる。一方、外側方向 ( $r = R$  方向) への流量割合は  $\bar{n}$  の増大とともに著しく増加しこれが慣性力の影響を考慮しない場合に比較して流出端 ( $\theta = 0$ ) および内側方向 ( $r = r_1$  方向) への流量割合が減少する直接の



第 9 図 円周方向の流量係数におよぼす慣性力の影響



第 10 図 半径方向の流量係数におよぼす慣性力の影響

原因になっているものと考えられる。

#### IV. 結 論

慣性力の項を考慮していない従来の潤滑理論の基礎式——Reynolds の方程式——に対して、慣性力の項のうち最大項である回轉運動による慣性力の項を導入した潤滑理論の基礎式を導き、妥当と思われる軸受寸法割合の一例について潤滑特性を算定し、比較検討を行なった結果次のような結論を得た。

- 1) 流れが層流であり、慣性力の影響を軽視できる場合——回轉数が小さく、 $0 < \bar{n} \leq 0.25 \sim 0.5$  なる場合——には負荷容量は回轉数にほぼ比例して増大する。
- 2) 慣性力は負荷容量に対して著しい影響をもち、 $\bar{n} \approx 0.5$  で 10% 程度の増加を示し、 $\bar{n} \approx 3.0$  では 64% にも達するため、回轉数が大きくなれば Reynolds の式からはもはや妥当な負荷容量を算定することができない。
- 3) 動力損失は第 8 図に示すようであるが、慣性力の影響はほとんどなく、動力損失のみを算定する場合には Reynolds の式で十分である。
- 4) 流量は慣性力の影響を無視しうる場合、回轉数に比例して増大するが、回轉数が高くなり慣性力の影響が無視できなくなれば  $\bar{n} = 3.0$  で 10% 程度増加する。

終りにのぞみ、本研究の実施に際して協力を受けた山口弘氏 (当時助手)、山崎輝夫技官および阿部勇氏 (当時大学院学生) に対し謝意を表する。

#### 参 考 文 献

- 1) Sternlicht, B.: Influence of Pressure and Temperature on Oil Viscosity in Thrust Bearings. Trans. A.S.M.E., Vol. 80, 1958, pp. 1108-1112.
- 2) Milne, A. A.: On the Effect of Lubricant Inertia in the Theory of Hydrodynamic Lubrication., Journal of Basic Engineering, A.S.M.E., June 1959, pp. 239-244.
- 3) Chou, Y. T. and Saibel, E.: The Effect of Turbulence on Slider-Bearing Lubrication., Journal of Applied Mechanics, March 1959, pp. 122-126.
- 4) Pinkus, O. and Lynn, W.: Solution of the Tapered-LandSector Thrust Bearing., Trans. A.S.M.E., Vol. 80, 1958, pp. 1510-1516.
- 5) Shaw, M. C. and Macks, F.: Analysis and Lubrication of Bearings. McGraw-Hill, New York, 1949.