



Title	河口に於ける二重水層（2）：河口二重水層の力学的特性に関する研究
Author(s)	柏村, 正和; Kashiwamura, Masakazu
Citation	北海道大學工學部研究報告, 28, 1-44
Issue Date	1962-03-06
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40693
Type	departmental bulletin paper
File Information	28_1-44.pdf



河口に於ける二重水層 (2)

— 河口二重水層の力学的特性に関する研究 —

柏村正和*

A Study on the dynamical properties of the two-layer flow system at a river-mouth

Masakazu KASHIWAMURA

Abstract

The two-layer flow which is composed of salt water and fresh water plays a very interesting role at a river-mouth.

In this paper, various phenomena of the two-layer flow system, which have been previously made clear by many field observations, are intended to be analysed theoretically by introducing a series of fundamental equations of motion.

First, the control action of the system at the river-mouth is discussed when a tidal effect exists.

Secondly, in a stationary state of the flow, the relation between the surface-slope and the interfacial slope was obtained, and the magnitude of the shearing stress between the two layers was also estimated.

Next, in regards to surface waves and internal waves which are caused by various disturbances, their propagating velocities and other properties were theoretically deduced, and further, were compared with observational data.

In addition, by taking account of a frictional force between the two layers, the decreasing rate and the variation of the internal waves were calculated.

Finally, the diffusivity of salt water into the fresh layer was discussed. The exchange of water-mass through the interface of the two layers can be estimated to be generally very small, by plotting the electric resistance of water at every depth on a normal-probability sheet.

目次

1. 概説	2
2. 二重水層の基本方程式	4
3. 河口の control action	6
4. 河口内二重水層の定常状態	10
5. 二重水層に発生する波動	17

* 北海道大学工学部理学第一研究室助教授

6. 二層間の摩擦を考慮した場合の波動	29
7. 二層間の塩分拡散の一考察	39
8. 結 語	42

1. 概 説

河口は海洋と陸水の境界に位置し、各々の現象が干渉しあつてさらに複雑な現象を呈しているところである。上流からの廢棄物はここから海中に放出され、大河川では河口港を形成して海上運輸や漁業の基地となり、河口附近の平野に展開する農業・工業の用水には川の上層から淡水が供給される。利用面から見た河口の役割りはこのように少なからぬものがあるが、しかし河口をこれらの目的の為に充分生かす事は決して容易な事ではない。廢棄物の流出は漁業に被害をもたらす、出水時の流出土砂は河口を浅くして航路の機能を奪う。農業に最も多く水を必要とする夏期には淡水中に塩分が含まれて用をなさなくなる。冬期渇水期には海中の漂砂により河口が閉塞され河道は干涸の原因になることもある。加えて寒冷地では冬期の結氷によりすべての活動を停止せねばならぬ事もおこる。このように河口は御し難い多くの性質を持っている。河口の地球物理学的性質を川と海の両面から追求して深く理解し、これをもつてその対策の基礎とすべきことは当然である。近年次第に河口の重要性が認められその研究が各国に於いて活潑になりつつあることはこの意味から喜ぶべきことである。然しながら研究の現在の段階はようやく軌道に乗りかけたところであつて河口の諸現象における未解決の問題はまだ非常に多い。筆者の属する研究室では戦前から河口の持つ地球物理学的性質に関心を持ち幾多の観測を行なつて来た^{1),2)}。筆者も昭和26年以来主として天塩川、石狩川の河口を中心に観測及び研究を続けている。そしてこの間には多くの興味ある現象を見出して報告した^{3),4),5)}。

河口に於ける諸現象の中で最も関心の的となつているものは海水と淡水の接触によるそれらの挙動である。海水は淡水との密度差によつて河口から川の内部に入り込み、淡水の下を楔状に陸地深く横たわる。塩水楔という名称がこの形状に対して与えられている。この二重水層は非常に複雑な運動を示し現象を正しく知る事は大変に困難である。

二重水層は又潮差や河口内部の渦動の発達によつて次第に二層間の境界が不明瞭となり河口から上流に向かつていくに従い上層、下層共塩分が次第に減少するような型に変つて行く⁶⁾。歐米大陸で報告される estuary にはこのような型が多いが⁷⁾、わが天塩川、石狩川では二・三の理由、殊に日本海の潮差の小さい事が主に原因しておおむね二層が明瞭に識別出来る二重層を形成している。下層塩水楔の長さは上層淡水の流量により敏感に変化し流量が増加してある限界値をこえると楔は河口外に押し出されて内部は淡水だけとなる。出水時にはこのような状態が多く、淡水のはげしい流れは直接河底を洗掘して河底の縦断形状を変えることがしばしばある。渇水期に陸地深く入り込んだ塩水楔は川によつては河口から上流に向かつて20 km 以上にも及ぶ事がある。一定の淡水流量に対しては一定の長さの塩水楔が対応すると考えられる。

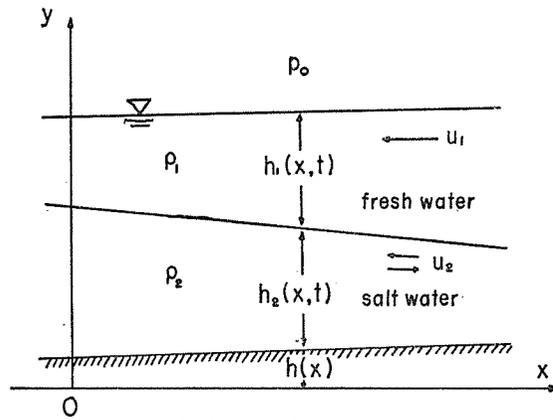
定常的な楔の状態は、例えば上に述べた一定の淡水流量に対する楔の長さとかその形状の見積り等の研究は理論、実験共かなり方々で行なわれており^{8),9)} 定性的な説明を下すには今日不自由はないが定量的には実験と現実との間に尚差があつて例えば二層間に働く抵抗の評価にかなりのへだたりが認められこれが新しい研究の一方向ともなつている^{10),11)}。塩水と淡水がこのように層状をなすときには上層の淡水は下層から塩分の供給を受け下流に行く程その濃度が高まるものである。淡水中の塩分分布から鉛直の渦動粘性係数を計算した研究や¹²⁾ 又下流に向かつての塩分濃度の増加は指数関数的であるという研究報告もある¹³⁾。淡水中の塩分濃度の研究は淡水を農業や工業に利用する場合に重要であることは論をまたないが、このような研究に於ける二重水層はやはり定常と考へて考へているのが普通である。あるいは、かんがい用に取水する目的からいかなる条件をもつて取水口附近の淡水塩分が増減するかという実測研究もある¹⁴⁾。つぎにこのような二層流体での内部波が非常に大きな役割りを果たすことに注目する必要がある。密度の異なる二つの流体の境界面には内部波が発生することは気象学や海洋学で古くから知られており又多くの研究があるが、河口内の二層流体にも種々の条件によつて内部波が発生する。潮汐による長周期の波から風圧や他の機械的攪乱によつて生ずる短周期の波にいたるまで多くの周波数成分を含んだ内部波が考えられる。内部波の発達した二層流体は境界面が不安定となり、渦動粘性の発達を促がして下層の塩分が上層に拡散し、淡水中の塩分を増すことが知られている¹⁵⁾。従つて潮差の大きい河口を持つ川又は estuary では二層がはつきり区切られずに前に述べたように上層と下層との塩分差が小さくなると共に上下平均の塩分が河口から上流に向かうに従つて減少するような型のものになる。このような型に於いて解析上重要な役割りを果たすのは水中の水平拡散係数であつて、これに関する研究もある¹⁶⁾。又気象条件によつても内部波は発達する。石狩川における実測資料によると¹⁷⁾、表層淡水中の塩分と気圧の示度との間には非常によい相関のあることが認められているが、これは気圧の変化による内部波の発達が原因と考へられよう。又風圧の鉛直成分が内部波を誘起して風の強い時に表層塩分が増加するという研究結果もある¹⁸⁾。

以上の展望から河口の二層流体に関して行なわれている研究の方向は定常的塩水楔の問題、表層淡水中の塩分の問題、内部波の問題、水平混合の問題等があるが、しかし日常よく観測され、又現象的には重要であるにもかかわらず二層流の非定常問題になるとあまり研究の成果が見られない。淡水の出水期には前に述べたように塩水層が河口から押し出されるが、出水がおさまつた後にどのようにして海水が河口内に浸入し塩水楔の形状を回復して行くかという問題や¹⁹⁾、あるいは河口の潮汐によつて塩水楔がいかなる応答をするかというような問題は非定常の場合に属するであろう。例えば、筆者が天塩川に於いて数多く観測した結果によると潮差が小さければ淡水と塩分の各層は二層にはつきり区別されたまま潮汐によつて変動することが知られている。このような変動状況を解析した研究は見当らない。これは観測技術の困難から現象自身があまりよく知られていないのも一因であろうが、さらにその非定常の運動方程式の解

を得るのが容易でないことが又一つの原因ではないかと考えられる。筆者は内部波の考えを拡張して二層流の潮汐による応答の状況を調べその性質についてかなり明確な解釈を下すことができた。本論文においてはこの問題を中心にして、さらに他の問題についても筆者が行なつた実測結果と理論結果をもとにして考察が行なわれている。以下節を追ってこれについて述べようと思う。

2. 二重水層の基本方程式

二重水層の力学を調べる為にはまず二層流体を第1図の如く二次元的に表わして基本方程式を誘導しよう。各層ではつぎの運動方程式が成り立つ。



第1図 二重水層模型

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(A_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(A_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(A_x \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(A_y \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2)$$

ただし u, v はそれぞれ流速の x, y 分値、 p は圧力、 ρ は流体の密度、 A_x, A_y はそれぞれ x, y 方向の渦動粘性係数である。二重水層の実際の状態から見て $v=0, A_x=0$ として式を簡単にすることが出来る。(2)から

$$-g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

を得るから大気圧を p_0 とし添字 1, 2 によつて淡水、塩水の各層を区別することにすれば淡水中では

$$p = p_0 + \rho_1 g (h_1 + h_2 + h - y) \quad (4)$$

ただし

$$h_1 + h_2 + h \geq y \geq h_2 + h$$

塩水中では

$$p = p_0 + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g (h_2 + h - y) \quad (5)$$

ただし

$$h_2 + h \geq y \geq h$$

なる関係式を得る。故に

淡水中で

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_1 g \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial x} + I_b \right) \quad (6)$$

塩水中で

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_1 g \frac{\partial h_1}{\partial x} + \rho_2 g \left(\frac{\partial h_2}{\partial x} + I_b \right) \quad (7)$$

となる。ただし $I_b = \partial h / \partial x$ でこれは河床の縦断勾配を表わす。又 $v=0$ としたので運動方程式は(1)だけを考慮すればよい。

従つて淡水中では

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial x} + I_b \right) + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial y} \left(A_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (8)$$

海水中では

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \left(r \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial x} + I_b \right) + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial y} \left(A_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (9)$$

が成り立つ。ただし $r = \rho_1 / \rho_2$ である。これら各層の運動方程式を各層の厚さにわたって積分しさらにその結果を各層の厚さ h_1 , h_2 で割って平均の方程式を求める。今

$$u_1 = \int_{h_2+h}^{h_1+h_2+h} u dy / h_1$$

$$u_2 = \int_h^{h_2+h} u dy / h_2$$

$$\tau = A_y \frac{\partial u}{\partial y}$$

としさらに一つの層の中で u は y 方向には一様に近いものと仮定すれば次式を得る。

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -g \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial x} + I_b \right) + [\tau]_{h_2+h}^{h_1+h_2+h} / \rho_1 h_1 \quad (10)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = -g \left(r \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial x} + I_b \right) + [\tau]_h^{h_2+h} / \rho_2 h_2 \quad (11)$$

$\tau_{h_1+h_2+h}$ は水面と大気との間に働く shearing stress で微小であるから普通は無視することができる。又 τ_h は塩水層と川底との間の同じく shearing stress であつて河口内の二重水層にあつ

ては下層の海水の流速 u_2 は上層に較べてかなり小さいのが普通であるから多くの場合無視して考えることができる。 τ_{h_2+h} は淡水層と海水層との間の shearing stress であつてこれをあらためて τ と書くことにすれば

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -g \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial x} + I_b \right) - \frac{\tau}{\rho_1 h_1} \quad (12)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = -g \left(r \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial x} + I_b \right) + \frac{\tau}{\rho_2 h_2} \quad (13)$$

を得る。又連続の方程式は各層に於てそれぞれ

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} + h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} + h_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

となるから (12)~(15) の式が河口内二重水層の運動を記述する基本運動方程式と考えることができる。

定常的な塩水楔, あるいは変動する非定常の二重水層の状態はこれらの方程式をさらにそれらの適当な条件に従つて解くことにより得られる。二層間の stress τ の評価は今日また定説がない。これを上流から下流にわたつてほぼ一定と見做して塩水楔の形状を導いた研究もある²⁰⁾。しかし海底の流れによる stress の取り扱いとか²¹⁾, 同じく風の地表に於けるその見積り²²⁾等から考えてこれらと同様な形式, 即ち

$$\tau = k(u_1 - u_2)|u_1 - u_2|, \quad k > 0 \quad (16)$$

とおくのが最も一般的であつて又妥当と思われる。 k は抵抗係数の役目を持つ一つの常数であつて河口内の二層流では $|u_1| \gg |u_2|$ という場合が多いので, 従つて

$$\tau \doteq k u_1 |u_1|$$

と近似しておくことにしよう。さらに第 1 図のような模型では上層淡水が逆流する場合を考えなければ u_1 は常に (-) の符号を持つており, 上層に対しては摩擦応力は常に (+), 下層に対しては常に (-) として働くから

$$\tau = -k u_1^2 \quad (17)$$

とおくことが許されるであろう。

3. 河口の control action について

二重水層を持つ水路に於て水路幅が急激に変化する部分では, 流れがある一つの条件を満足するように制御される^{23), 24)}。この条件は

$$F_i = \frac{u_i^2}{(1-\tau)gh_1} \doteq 1 \quad (18)$$

で表わされるものであつて、 F_i は interfacial Froude number と呼ばれる無次元量である。この式の由来は (12)~(15) の基礎方程式に於いて $\tau=0$, $I_b=0$ としさらに $\partial/\partial t$ で表わされる項をすべて 0 として定常化した式

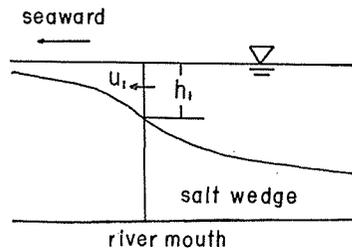
$$\begin{cases} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + g \frac{\partial h_1}{\partial x} + g \frac{\partial h_2}{\partial x} = 0 \\ u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \gamma g \frac{\partial h_1}{\partial x} + g \frac{\partial h_2}{\partial x} = 0 \\ u_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} + h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \\ u_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} + h_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (19)$$

に於いて x の微分項の係数によつて作られる行列式が 0 となること、即ち

$$\begin{vmatrix} u_1 & 0 & g & g \\ 0 & u_2 & \gamma g & g \\ h_1 & 0 & u_1 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & u_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (20)$$

なる関係式からさらに $|u_1| \gg |u_2|$ という条件を入れることによつて Stommel 等が誘導したものである²²⁾。

(18) の物理的意味はつぎの通りである。川幅が急変する所では淡水層と海水層の厚さ h_1 , h_2 や流速 u_1 , u_2 が急激に変化することが期待される。(19) からただちに h_1 , h_2 , u_1 , u_2 のいずれもが一定であるという解を得るがこれは一定の川幅の所では比較的短かい区間については近似的に正しいと思われる。しかし当然の事ながらこれは上記のような川幅の急変する場合の解たることはできない。故に (19) を恒等的に満足するような別の条件即ち (20) が成り立つ必要があり、これから (18) が導かれるのであるが、川幅の急変する所で (20) が成り立つこと、云い換えれば $\partial h_1/\partial x$, $\partial h_2/\partial x$ が 0 でないと云うことは淡水と海水の境界が水平でないことを意味しこれは段波状の内部波が静止してそこに存在していることを表わしている。結局 (18) は内部波が静止するための条件式でもある。このように川幅が急変するところでは流れは (18) を満足するような状況に置かれるのであつてこれを二層流体の control action と称している。以上の考察によつて河口に於いても同様の条件が成立するであろうことが類推される。河口を出た淡水は海上に拡がってその厚さを減ずるから河口では当然前記の段波状の内部波が二層間に存在していることになり、その波は河口内部に進行することは出来ないから河口では (18) の条件によつて流れが control されると考えられるのである。上流から流れて来る淡水はこのように河口で制御され、層の厚さ h_1 を減じ流速 u_1 を増大して流出するから河口の内部では $F_i < 1$ が成り立たなければならない。若し河口内部で $F_i \geq 1$ である時は塩水層は河口内に



第2図 河口の段波状二層境界面

存在することが出来ないことになる。従つて今河口の水深を D とすれば

$$\frac{u_1^2}{(1-\gamma)gD} \geq 1 \quad (21)$$

で表わされる流速 u_1 を河口の淡水流が持っている時には海水は河口から浸入することが出来ないことになり、出水時に塩水楔が河口から押し出される時の条件を与えることになる。この条件から石狩川の河口内に塩水楔が存在し得る淡水の限界流量を計算した研究がある²²⁾。

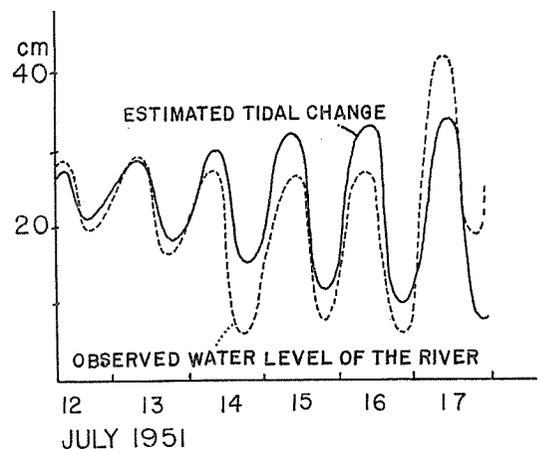
以上はすべて流れを定常として考えた上での議論であるが、非定常の場合には必ずしも(18)は河口で成りたない。例えば、出水によつて河口外に押し出された海水が淡水流量の減少によつて再び河口から入り楔の形状を回復しつつある過程では河口で $F_\xi < 1$ である。石狩川に於て筆者は上記の如き塩水楔の回復過程を調べたことがあるが²⁶⁾ その際河口での F_ξ は 1 より小さかつた (第 1 表)。これは今までの議論から当然予期されることである。つぎにやはり

第 1 表 石狩川河口附近の F_ξ の値 (昭和 33 年)

月 日	時 分	u_1	h_1	F_ξ	地 点	備 考
8. 1	1500	61.2 cm/s	10.0 m	0.19	河 口	出水の最盛期をすぎた時期、翌日から塩水は河口から遡上を始める
8. 4	1020	20 cm/s	5.5	0.039	河口から 1.5 km 上流	楔の回復過程の F_ξ の変化を示す。 F_ξ は時間と共に増加しているこの地点の平水時の F_ξ は約 0.2 である。
8. 4	1600	20 "	4.5	0.045		
8. 4	2200	28 "	5.0	0.080		
8. 5	0400	23 "	4.5	0.060		
8. 5	1000	29 "	4.5	0.095		

非定常の場合として十分に発達した塩水楔が存在する際に潮汐により二層流体は潮汐の周期をもつて振動するが、そのとき河口の F_ξ がいかなる変化をするかについて考えてみよう。

筆者の天塩川の観測によると²⁷⁾ 二重水層の境界がこの場合には潮汐によつて崩れることなく淡水層、塩水層ともそれぞれ潮汐と同じ周期で変動していた。一例を第 3 図に掲げるが、これによると河口内の水位はほぼ潮位と同じ変化をし、又、p. 25 第 12 図の如く、淡水の厚さは



第 3 図 天塩川河口から上流 300 m の地点の水位と小樽港推算潮位

落潮から干潮時にかけて最大、漲潮から満潮時にかけて最小になっている。

(12)~(15) に於て $\tau=0$, $I_b=0$ とおいた方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + g \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + g \left(\gamma \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial h_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} + h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} + h_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (22)$$

から $\partial h_1 / \partial x$ を求めれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} u_1 & 0 & -\partial u_1 / \partial t & g \\ 0 & u_2 & -\partial u_2 / \partial t & g \\ h_1 & 0 & -\partial h_1 / \partial t & 0 \\ 0 & h_2 & -\partial h_2 / \partial t & u_2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta} \left\{ (gh_2 - u_2^2) h_1^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u_1}{h_1} \right) + gh_1 u_2^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h_2}{u_2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

ただし

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} u_1 & 0 & g & g \\ 0 & u_2 & \gamma g & g \\ h_1 & 0 & u_1 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & u_2 \end{vmatrix} \\ &= gh_2 \{ (1-\gamma) gh_1 - u_1^2 \} + u_2^2 (u_1^2 - gh_1) \end{aligned} \quad (24)$$

大きな川の河口では一般に $h_2 \gg h_1$, $u_2 \ll u_1$ の状態が多いから (23) をこの条件を入れて整理すれば

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = - \frac{h_1^2}{(1-\gamma) gh_1 - u_1^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u_1}{h_1} \right) \quad (25)$$

を得る。河口では前に述べたように段波状の内部波が存在するから河口から上流を x 軸の正の方向として考えれば

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} > 0$$

$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{ u_1 }{h_1} \right)$	$(1-\gamma) gh_1 - u_1^2$	F_i
+	+	$F_i < 1$
0	0	$F_i = 1$
-	-	$F_i > 1$

が常に成り立つ必要がある。即ち $\frac{\partial}{\partial t}$

$\left(\frac{u_1}{h_1} \right)$ と $(1-\gamma) gh_1 - u_1^2$ とは常に異符号

でなければならないことになる。 u_1 の符号は負であることと $F_i = u_1^2 / (1-\gamma) gh_1$ とに注意すれば (前表参照) の関係がただちに導かれるであろう。 潮位の変動によつて $|u_1|/h_1$ も又同周期で

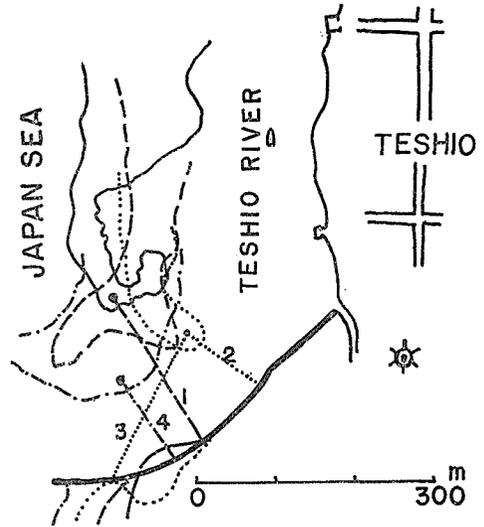
変動することが期待されるから結局潮位変動により河口の interfacial Froude number F_i は 1 を中心として変化することが理解される。潮位と $|u_1|/h_1$ との関係は流れの種々の条件, 例えば u_1, h_1 の時間平均の大きさ自体や淡水と塩水間の摩擦応力の大きさ等で位相は変化し得るので、(この事情については第 6 節に議論されている)

潮汐と河口の F_i の位相関係は一義的に決まるものではない。筆者が天塩川で実測した結果から河口の F_i を計算すると第 2 表のようになる。第 4 図はその観測地点を表わす図である。

第 2 表によると天塩川の河口では大体漲潮期に $F_i > 1$, 落潮期に $F_i < 1$, となり, 満潮, 干潮の近くで $F_i \approx 1$ になるものようである。

第 2 表 天塩川河口の F_i の潮汐による変動

年月日	時	u_1 (cm/s)	h_1 (m)	F_i	備考
1951. 7. 12	9~12	41	1.40	0.61	落潮期
1952. 8. 7	8~11	43	1.80	0.52	落潮期
1952. 8. 8	14~16	57	0.85	1.95	漲潮期
1956. 7. 14	12~14	55	1.70	0.91	干潮時
1956. 7. 15	10~12	56	1.60	0.67	落潮期



第 4 図 天塩川河口観測地点

1. 昭和 26 年 7 月 12 日
2. 昭和 27 年 8 月 7 日
3. 昭和 27 年 8 月 8 日
4. 昭和 31 年 7 月 14 日及び同 15 日

この結果は勿論前述のように他の河川の河口にそのまま適用できるわけではないし, 又天塩川自体でも非常に違う条件下, 例えば出水時とか非常に濁水期とかでは異なるものと思われる。筆者の観測を行なった時は淡水流量はおおむね $50 \sim 100 \text{ m}^3/\text{sec}$, であるのでこのような条件下の天塩川では河口の F_i と潮汐の関係は上記のようになるのであろうと思われる。結局感潮河川で二重水層が保たれているときは河口の一断面に於ける interfacial Froude number は潮汐により 1 を中心に変動するものであることを結論することができる。

4. 河口内二重水層の定常状態

河口内に海水が浸入して塩水楔をなすときにこれが定常である場合の研究は多い^{28), 29)}。これらの研究は二層の流れの状態をいろいろ仮定して方程式を立て, 楔の形状を誘導して模型実験や実際の塩水楔の測定結果と比較し, 二層流体間の抵抗係数がどの程度の値の時によく適合するかを調べるのが普通である。定常的な塩水楔の形状はその上流の先端附近と河口附近の control action の働く部分とを除いた中央の長い区間は境界面の勾配はほとんど直線的できわめてゆるいものである。筆者が天塩川で測定した楔の形状を第 5 図と第 6 図とに示すがこれによつて上記の事実を知ることができる。楔の先端は図のように丸くなつて塩水の頭がくずれず

に維持される。この塩水水頭の高さと上層淡水の流速との間には Kármán の提唱した関係式

$$h_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \frac{u_1^2}{2g} \quad (26)$$

ただし h_2 は塩水楔先端の高さ

u_1 は淡水流速

があるが³⁰⁾実際に先端の形状を詳細に測定することは容易ではなくこの関係を実際にたしかめるには至っていない。

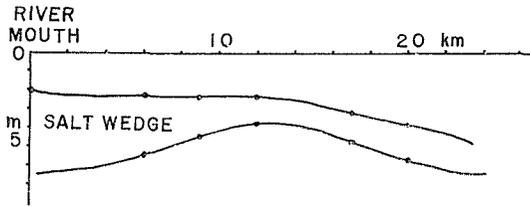
定常二重水層では下層塩水層は静止していると考えられるが、実際は下層塩水から上層淡水中へ塩分が拡散混入して流下するのでそれによって生ずる密度

不平衡を補う為に微弱ではあるが、下層塩水は上流に向かって流れているのが普通である^{31),32)}。第3表と第7図に天塩川の河口から300m上流の地点で行なつた観測結果を示す。これは一昼夜連続観測した淡水層の厚さと流速の日平均を示したものであつて1日を平均することにより下層塩水が上流に向かって流れていることを認めることができる。この塩水の遡上流はこの地点から上流で次第に上層へ混入して淡水と共に流下し再び河口に戻るのであるから、河口に於ける上層淡水中の塩分濃度は下層塩水の遡上速度から概算することができる。即ちこの時淡水流量は約 $130 \text{ m}^3/\text{sec}$ 、下層の遡上流量は約 $10 \text{ m}^3/\text{sec}$ であるから淡水中の塩分濃度は

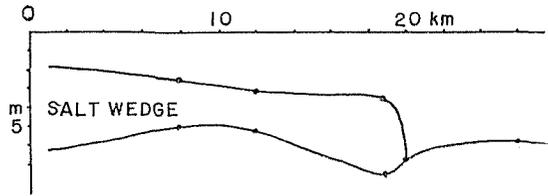
$$18\% \times 10/130 \approx 1.4\%$$

(塩素量濃度で示す)

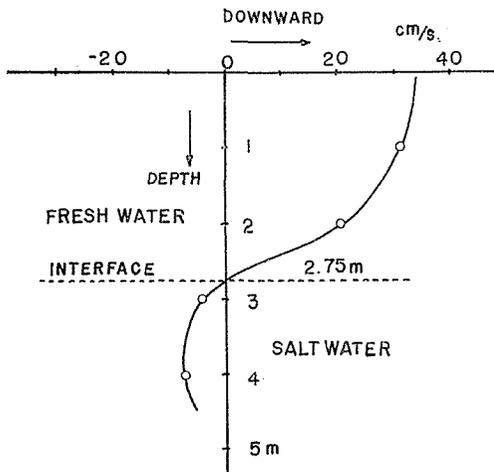
となる。この値は河口で電気伝導度を測定して求めた塩素量濃度の値と大体同じ程度の値である。このように下層から上層へ塩分が拡



第5図 天塩川水楔型形状
昭和26年7月16日 10~16時



第6図 天塩川塩水楔形状
昭和27年8月7日 13~18時

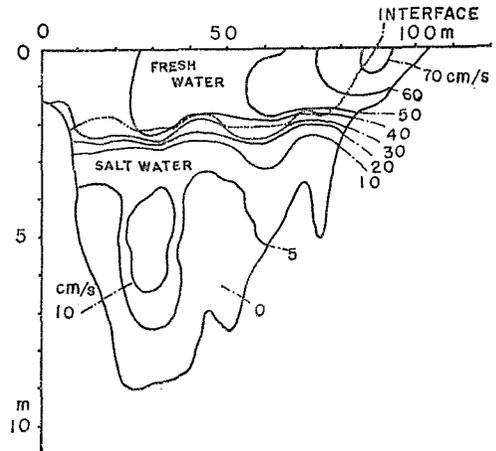


第7図 天塩川の日平均流速
(昭和26年7月15~16日, 河口から300m上流)

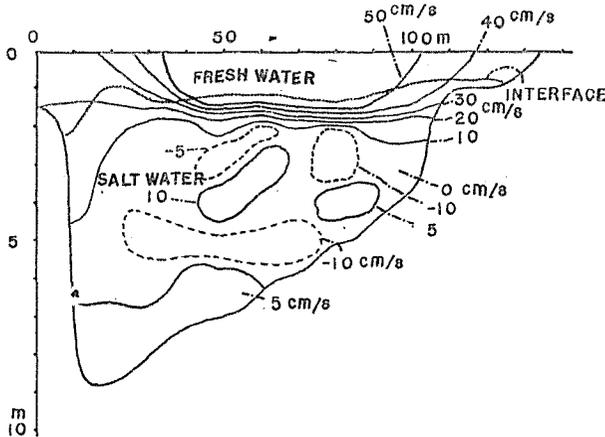
第3表 天塩川の日平均流速
(昭26.7-15~16)

深 度 (m)	日平均流速 (cm/s)	備 考
1	+31.0	測定地点は河口から300m上流, +は河口向きの流れ, -は上流向きの流れ, 二層平均境界面の深度は2.75mである。
2	+20.5	
3	-4.6	
4	-7.1	
5	

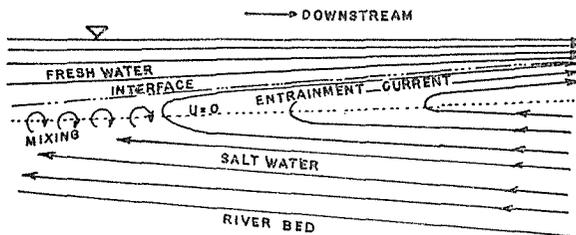
散して海水の循環が行なわれる一方、河口では淡水層が薄くなって加速される為に二層間の摩擦応力が増加し淡水層が直接下層海水の上部を進行して流出する現象が見られる。河口で行なった観測では常にこの事実が見られ存在が確かめられている³³⁾。その例を第8図と第9図に示す。淡水と共に塩水の上部が同時に流出していることが認められるであろう。このように直接海水を連行流出する場合にもやはり密度不平衡を来しそれを補償する海水の流入が下層に存在することになる。出水期のあとに河口内に、沖の海底に存在するような粗砂を見出すことがあるが、これはこのような底部の補償流が出水期に強調され、それが河口外から河口内へ海底の粗砂を選びこ



第8図 天塩川河口断面1の流速分布
(昭和26年7月12日, 9~12時, 満潮後2~3)
(時間海水上部が淡水と共に流出している。)



第9図 天塩川河口断面2の流速分布
(昭和27年8月7日, 8~11時, 落潮期)
(海水の上部が淡水と共に流出している)



第10図 河口循環流の模型

む為ではないかと考えられる。

以上のような海水の循環運動はPritchardの提唱した広くて浅い湾の流れの模型に似ており³⁴⁾第10図の如き循環流として図解的に画くことができる。勿論このような循環は淡水と塩水が非常に不連続的に区切られているときは微弱であろう。気象条件や潮汐の影響等によって二層間に内部波が発達し二層間の拡散が増大すれば循環流も又発達するであろう。

つぎに基本方程式(12)~(15)を用いて下層塩水が静止している場合の川の水面勾配や二層の境界面の勾配を調べてみることにする。

後節で二重水層の周期的変動の解析を行なう関係上(12)~(15)の式の解をつぎのような形におこ

とにする。

$$\begin{cases} u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} u_{1n}(x) e^{in\sigma t} \\ u_2 = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}(x) e^{in\sigma t} \\ h_1 = \sum_{n=0}^{\infty} h_{1n}(x) e^{in\sigma t} \\ h_2 = \sum_{n=0}^{\infty} h_{2n}(x) e^{in\sigma t} \end{cases} \quad (27)$$

ここに u_{1n} , u_{2n} , h_{1n} , h_{2n} はそれぞれ x のみの関数で一般的に複素数を表わすものとする。
従つて

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= \sum_{n=0}^{\infty} in\sigma u_{1n} e^{in\sigma t}, & \frac{\partial u_1}{\partial x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial u_{1n}}{\partial x} e^{in\sigma t} \\ &\dots\dots\dots \\ u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{1n} e^{in\sigma t} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial u_{1n}}{\partial x} e^{in\sigma t} \right) \\ &= u_{10} \frac{\partial u_{10}}{\partial x} + \left(u_{10} \frac{\partial u_{11}}{\partial x} + u_{11} \frac{\partial u_{10}}{\partial x} \right) e^{i\sigma t} + \dots \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{u_1^2}{h_1} &= \frac{\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{1n} e^{in\sigma t} \right)^2}{\sum_{n=0}^{\infty} h_{1n} e^{in\sigma t}} = \frac{u_{10}^2}{h_{10}} + \left(2 \frac{u_{10}u_{11}}{h_{10}} - \frac{u_{10}^2 h_{11}}{h_{10}^2} \right) e^{i\sigma t} + \dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

等が導かれる。第2節で論じたように二層間の摩擦応力 τ は

$$\tau = -ku_1^2$$

であるとし(27)を(12)~(15)に代入して整頓すれば t の入らぬ項, $e^{i\sigma t}$ のつく項, $e^{2i\sigma t}$ のつく項
……というように分けてまとめることができる。しかし方程式が t のいかなる値についても満足されるためには上記のように分けた式がそれぞれ独立に成り立つ必要がある。例えば今 $n=0$, 即ち t の入らぬ項ばかりを集めて式を組み立てると $\partial/\partial t$ で表わされる各項が消えることに注意すればつぎの方程式を得る。

$$\begin{cases} u_{10} \frac{\partial u_{10}}{\partial x} = -g \left(\frac{\partial h_{10}}{\partial x} + \frac{\partial h_{20}}{\partial x} + I_0 \right) + \frac{ku_{10}^2}{\rho_1 h_{10}} \\ u_{20} \frac{\partial u_{20}}{\partial x} = -g \left(\gamma \frac{\partial h_{10}}{\partial x} + \frac{\partial h_{20}}{\partial x} + I_0 \right) - \frac{ku_{10}^2}{\rho_2 h_{20}} \\ u_{10} \frac{\partial h_{10}}{\partial x} + h_{10} \frac{\partial u_{10}}{\partial x} = 0 \\ u_{20} \frac{\partial h_{20}}{\partial x} + h_{20} \frac{\partial u_{20}}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (28)$$

これが二重水層の定常状態を与えるところの方程式であることは明らかである。同様の操作に

よつて $e^{i\omega t}$ の係数のみを集めて方程式を作ればそれは二重水層に発生する振動の基本成分を与える式となり、 $e^{2i\omega t}$ 、 $e^{3i\omega t}$ …等の係数を集めて作ればそれぞれ2倍、3倍…の周波数の振動を与える式となる。

まずここでは定常の場合を取り扱うことにする。始めに述べたように河口循環流のない場合を考えるから $u_{20}=0$ としてよい。さらに定常問題であることを一目瞭然たらしめるために記号を $u_{10} \rightarrow U_1$ 、 $h_{10} \rightarrow H_1$ 、 $h_{20} \rightarrow H_2$ の如く変えれば (28) は次式ようになる。

$$\begin{cases} U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} = -g \left(\frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial x} + I_b \right) + \frac{kU_1^2}{\rho_1 H_1} & (29) \\ 0 = -g \left(\gamma \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial x} + I_b \right) - \frac{kU_1^2}{\rho_2 H_2} & (30) \\ U_1 \frac{\partial H_1}{\partial x} + H_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} = 0 & (31) \end{cases}$$

これらの方程式は非線型であるからつぎのようにして第一近似解を求めることにしよう。

塩水楔の形状について前に述べたように、二層間の境界面の勾配は河口や楔の先端附近を除いた中間の大きな部分はほぼ直線的であるから、この部分を論ずる場合には第一近似解だけで充分であろう。(31) からただちに

$$H_1 U_1 = \text{const.} (= Q_1) \quad (32)$$

を得る。今 U_1 、 H_2 、 H_1 をそれぞれつぎの形に仮定しよう。

$$\begin{cases} U_1 = U_{10} + U_{11}x + U_{12}x^2 + \dots \\ H_2 = H_{20} + H_{21}x + H_{22}x^2 + \dots \\ H_1 = H_{10} + H_{11}x + H_{12}x^2 + \dots \\ \quad = \frac{Q_1}{U_1} = Q_1 \left(\frac{1}{U_{10}} - \frac{U_{11}}{U_{10}^2} x + \frac{U_{11}^2 - U_{10}U_{12}}{U_{10}^3} x^2 - \dots \right) \end{cases} \quad (33)$$

従つて

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial x} &= U_{11} + 2U_{12}x + \dots \\ \frac{\partial H_1}{\partial x} &= -Q_1 \frac{U_{11}}{U_{10}^2} + 2Q_1 \frac{U_{11}^2 - U_{10}U_{12}}{U_{10}^3} x - \dots \\ &\dots\dots\dots \\ U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} &= U_{10}U_{11} + (U_{11}^2 + 2U_{10}U_{12})x + \dots \\ \frac{U_1^2}{H_1} &= \frac{U_1^3}{Q_1} = \frac{1}{Q_1} (U_{10}^3 + 3U_{10}^2 U_{11}x + \dots) \\ \frac{U_1^2}{H_2} &= \frac{U_{10}^2}{H_{20}} + \left(\frac{2U_{10}U_{11}}{H_{20}} - \frac{U_{10}^2 H_{21}}{H_{20}^2} \right) x + \dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

等が成り立つ。これらを (29)~(31) に代入して x の入らぬ項のみについてまとめれば

$$\begin{cases} U_{10}U_{11} = -g\left(-Q_1\frac{U_{11}}{U_{10}^2} + H_{21} + I_b\right) + \frac{kU_{10}^3}{\rho_1Q_1} & (34) \\ 0 = -g\left(-rQ_1\frac{U_{11}}{U_{10}^2} + H_{21} + I_b\right) - \frac{kU_{10}^2}{\rho_2H_{20}} & (35) \\ Q_1 = U_{10}H_{10} & (36) \end{cases}$$

を得る。(34)を(32), (33)に代入して Q_1 を消去すると

$$U_{10}U_{11} = -g\left(-\frac{H_{10}U_{11}}{U_{10}} + H_{21} + I_b\right) + \frac{kU_{10}^2}{\rho_1H_{10}} \quad (37)$$

$$0 = -g\left(-r\frac{H_{10}U_{11}}{U_{10}} + H_{21} + I_b\right) - \frac{kU_{10}^2}{\rho_2H_{20}} \quad (38)$$

となる。(37), (38) から U_{11} , H_{21} を求めれば

$$U_{11} = -k\frac{U_{10}^3\left(\frac{1}{\rho_1H_{10}} + \frac{1}{\rho_2H_{20}}\right)}{(1-r)gH_{10} - U_{10}^2} \quad (39)$$

$$H_{21} = -k\frac{U_{10}^2\{g(H_{10} + H_{20}) - U_{10}^2\}}{\rho_2gH_{20}\{(1-r)gH_{10} - U_{10}^2\}} - I_b \quad (40)$$

を得る。又(33)の第三式から $H_{11} = -H_{10}U_{11}/U_{10}$ であるから(39)を代入して

$$H_{11} = k\frac{U_{10}^2\left(\frac{1}{\rho_1H_{10}} + \frac{1}{\rho_2H_{20}}\right)}{(1-r)gH_{10} - U_{10}^2} \quad (41)$$

を得る。(39)~(41)はそれぞれ U_1 , H_2 , H_1 の x に対する変化率の第一近似を与えるものである。この場合の境界条件は $x=0$ における U_1 , H_1 , H_2 の値、即ち U_{10} , H_{10} , H_{20} に数値を与えればよい。ただ河口を $x=0$ とすることは例の control action によつて各層が特別の変化をするところであるから避ける必要があり、この作用のほとんど及ばぬ上流側の地点を $x=0$ とおく必要がある。二層の境界面の勾配を I_i , 水面勾配を I_s とすれば

$$I_i = H_{21} + I_b = -\frac{kU_{10}^2\{g(H_{10} + H_{20}) - U_{10}^2\}}{\rho_2gH_{20}\{(1-r)gH_{10} - U_{10}^2\}} \quad (42)$$

$$I_s = H_{11} + H_{21} + I_b = \frac{kU_{10}^2\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} + \frac{U_{10}^2}{\rho_2gH_{20}}\right)}{(1-r)gH_{10} - U_{10}^2} \quad (43)$$

となる。河口内では第2節で述べたように $F_i < 1$, 即ち $(1-r)gH_{10} - U_{10}^2 > 0$ であるから, (39)~(41)は定常二重水層に於いて淡水層の厚さが上流に行く程増大し, 逆に海水層の厚さは減少し, さらに淡水流速は上流に行く程おそくなることを示している。又(42), (43)から二層境界面の勾配は上流に向かつて負の値をとり, 水面勾配は当然のことながら正の値をとることを示している。もし二層間に摩擦応力が働らかなければ $k=0$ となり, $I_i=I_s=0$ であつて, 水面勾配も境界面勾配も共に水平にならなければならない。このように境界面の勾配や水面勾配は二層間の摩擦によつて決まることが示されたが, 特に水面勾配が層間の摩擦によつて決まってく

ることは塩水楔の及ばぬ中流や上流の川の水面勾配が河床の粗度による摩擦によって決まると較べて異なる点であって、さらに k の値は一般に非常に小さいので感潮河川の水面の勾配は著るしく小さいものになるのである。又(42)と(43)とからすぐ判るように I_e と I_s との間には $I_s = -(1-\gamma)I_e$ なる関係がある。ただし $\gamma = \rho_1/\rho_2$ である。これは水面勾配と境界面勾配との間は密接な、しかも簡単な関係で結ばれていて、 I_s 、 I_e のどちらかが決まれば他のものは一義的に決まってくることを表わしている。従来塩水楔を論ずる際に水面勾配を0として取り扱っている場合が多いが、これは上の関係から見て片手落ちと思われるのである。

つぎに(42)、(43)を用いて実測結果から k の値を求めてみよう。一例を示すと、筆者が昭和35年10月4日に石狩川で行なった観測結果を第4表に掲げる。この観測で淡水の厚さはKohlrusch bridge と白金電極³⁵⁾ とによる各深度の水の電気伝導度測定とサーミスター温度計による水温測定の両方法によって決定した。後者を補助として用いたのは塩水層と淡水層とでは一般に温度差のあることが多いので、水温鉛直傾度の大きい深度の所を以て両層の接触面とすることができるからである。又流速は翼の廻転により発電機を廻しその起電力で瞬間流速を

第4表 石狩川観測結果

(昭和35年10月4日)

地 点	観測時刻	水 深 (m)	淡水の厚さ (m)	塩水の厚さ (m)	淡水層の 平均流速 (m/s)	河口から の 距 離 (km)
No. 1 (治水事業所前)	0900~0920	11.7	3.7	8.0	0.41	4.37
No. 2 (左岸渡船場)	0935~1000	7.0	3.2	3.8	0.41	3.00
No. 3 (第2水制)	1010~1025	10.5	3.0	7.5	0.36	1.02

読み取る方式のいわゆる発電式流速計を用いた。これは瞬間流速計であるので Ekman-Merz 流速計や Price 流速計のような時間的平均流速を測定するものに較べると精度は幾分劣る。以上のような測器による測定値から(42)を用いて各区間の k を算出する。二層境界面

の勾配は水面勾配がこれに較べて非常に小さいので、二地点の淡水層の厚さの差を地点間距離で割った値をそのまま適用して差支えない。この結果 k は第5表の如くなる。 k は密度の次元を持っているが本質的には抵抗係数に相当するものである。この k の値は福島教授の石狩川の実測結果³⁶⁾ から浜田氏が計算した抵抗係数の値と order の点で一致している³⁷⁾。二層間の抵抗係数は流れの状態や川の上流と下流とでも異なると云われており、勿論普遍常数ではなくその物理的性質の詳細は未だ明らかではないようである。では実際に二層の間でどの程度の摩擦応力が働いているかを計算してみると $|\tau| = k u_s^2$ であるから No. 1~No. 2 の区間については

第5表 石狩川の k (C.G.S.)

(昭和35年10月4日)

	No. 1~No. 2	No. 2~No. 3
k (C.G.S.)	0.00058	0.00025

$|\tau| \approx 1 \text{ dyne/cm}^2$ となる。この値は別に石狩川で行なわれた研究³⁸⁾による計算値とほぼ一致している。又 k の値からその時の水面勾配の値を (43) を用いて計算し得る。試みに同じく No. 1 ~ No. 2 について計算すると水面勾配 $I_s \approx 5.5 \times 10^{-6}$ となる。

つぎに天塩川に於ける水面勾配の実測結果から k の値を求めてみよう。実測は昭和 28 年 8 月 25~27 日に行なわれたものである³⁹⁾。下流の観測点は河口から 300 m 上流の地点で上流側観測点はここからさらに 5 km 上流の地点である。二地点間の水位観測は基準面を同じくした量水標の読み取りによって行なった。両地点の読みの差はそのまま二地点の水位差となる。この値は潮汐や流量の差によって水位が変動しているために 40 時間の連続観測値の平均をとって計算した。第 6 表はその結果である。(43) にそれぞれの値を代入して計算すると $k=0.00123$

第 6 表 天塩川二地点間の k

二 地 点 間		下 流 側 観 測 地 点			k (C.G.S.)
水 位 差 (cm)	距 離 (km)	淡水の厚さ (m)	塩水の厚さ (m)	淡水平均流速 (cm/s)	
6.2	5.0	3.7	1.8	42.7	0.00123

C.G.S. となる。この値は石狩川に於ける値より少々大きい。この事情を考えると上流観測地点では測器の数の不足の為に塩水楔の存在を確認しておらず、楔の先端が達していなかったおそれもあり、もしその通りであれば上記の k の値は過大に見積っていることになる。いずれにしても石狩川、天塩川の実測結果から推して k の値は $10^{-3} \sim 10^{-4}$ C.G.S. の order であると考えることができる。

以上の議論はすべて (42), (43) の両式に基づいているが、両式は第一近似を与えたものであって、もっと近似度を高める為には (33) を (29)~(31) に代入して出てくる方程式を α の 1 乗についてまとめて

$$\begin{cases} U_{11}^2 + 2U_{10}U_{12} = -g \left(2H_{10} \frac{U_{11}^2 - U_{10}U_{12}}{U_{10}^2} + 2H_{22} \right) + 3 \frac{kU_{10}U_{11}}{\rho_1 H_{10}} \\ 0 = -2g \left\{ \frac{\tau H_{10}(U_{11}^2 - U_{10}U_{12})}{U_{10}^2} + H_{22} \right\} - \frac{k}{\rho_2} \left(\frac{2U_{10}U_{11}}{H_{20}} - \frac{U_{10}^2 H_{21}}{H_{20}^2} \right) \end{cases} \quad (44)$$

を得るからこれから第一近似式を誘導したのと同じ方法で H_{12} , H_{22} , U_{12} 等を H_{10} , H_{20} , U_{10} の関数として誘導すればよい。しかし H_{12} , H_{22} , U_{12} 等は H_{11} , H_{21} , U_{11} に較べて無視出来る程微小であり、その上、式が非常に繁雑になるので実用上はほとんど必要がないと考えられるので省略する。

5. 二重水層に発生する波動

密度の異なる流体がある境界面を以て接しているときに境界面は外界の刺戟によって上下に振動し波動となって進行する。これは内部波 (internal wave) 又は境界波 (boundary wave)

と称せられる。内部波の最初の理論的研究は Stokes によって始められている⁴⁰⁾。内部波の波長がそれぞれ平均流速を持たない二層の厚さに較べて小さい場合にはその伝播速度 C は

$$C^2 = \frac{gL}{2\pi} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$$

によって表わされる。 L は内部波の波長、 ρ_2 、 ρ_1 はそれぞれ下層、上層の流体密度である。上層の厚さ h_1 が下層に較べて小さい時は上層の自由表面に生ずる表面波と境界面に生ずる内部波が同時に発生し、その伝播速度はそれぞれ

$$C_1^2 = \frac{gL_1}{2\pi}$$

$$C_2^2 = \frac{gL_2}{2\pi} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 \coth \frac{2\pi h_1}{L_2} + \rho_1}$$

で表わされる⁴¹⁾。 C_1 は表面波、 C_2 は内部波のそれぞれの伝播速度、 L_1 、 L_2 は表面波内部波の波長である。

(47) は又波長 L_2 が上層流体の厚さ h_1 より充分長い場合は

$$C_2^2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} gh_1$$

となる。内部波は気象学や海洋学に於いてはしばしば観測され研究されている現象である。例えば温度の異なる気団の接触面に現われる場合はしばしば雲が長い帯状の列をなす事などで目視し得る事がある⁴²⁾。又海洋に於いては深層と浅層とで温度が異なる時に温度勾配の最も急な部分に同様な波動が潮汐の周期を以て存在することが観測されている⁴³⁾。これは内部波が潮汐によって励起されたものと解釈出来る。

内部波の重要性は水塊の混合に大きな役割りを果たすことにある。内部波が発達すると二層接触面に於ける二流体の瞬時的な速度差が増大し速度勾配は非常に大きくなる。そしてこれは大きな渦動粘性の発達に導くことになって境界はくずれ二層は混合を行なう。これは鉛直混合の場合であるが、さらに粘性による energy の散逸によって内部波のために往復する水分子は決して元の位置に戻らずその為に水平方向の混合をももたらすことになる。

河口内の二重水層の境界面にも内部波が発生するであろう。そしてその発達には二層の混合を促がすであろう。歐米で報告されている強混合の型の estuary は潮汐や気象条件によって誘起発達した内部波により混合の促進された究極の型であると思われる。筆者は天塩川に於いて二層が境界を明瞭に保持しつつ、なおかつ潮汐により振動している現象を数多く観測した。潮汐の存在にもかかわらず二層がはっきりと区切られているのは天塩川の規模が大陸の estuary に比し小さい為に混合が進まぬ中に流出してしまうからであろう。又潮差の小さいことも一つの原因であろう。感潮河川の波動を層状構造を考慮した上で取り扱った例はあまり見当たらない。二層を区別せずに単に表面波のみを取り扱った研究はあり⁴⁵⁾潮汐による表面波は重力波と

して上流に伝播することが知られている。天塩川の潮汐による淡水層、海水層のそれぞれの厚さや流速の振幅あるいは位相はかなり複雑な様子を示しているが、その運動を理解し又解析するに当たってまず河口内二重水層に発生する表面波や内部波の性質を二重水層の基本方程式(12)~(15)を用いて一般的に調べることにする。

まず理想的な場合として層間の摩擦応力 τ を省略した場合について考察してみよう。

方程式は(12)~(15)から

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + g \frac{\partial h_1}{\partial x} + g \frac{\partial h_2}{\partial x} + gI_0 = 0 \end{array} \right. \quad (45)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \tau g \frac{\partial h_1}{\partial x} + g \frac{\partial h_2}{\partial x} + gI_0 = 0 \end{array} \right. \quad (46)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} + h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (47)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} + h_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (48)$$

を得る。 u_1, u_2, h_1, h_2 の解の形を(27)の如くおき(45)~(48)に代入し前節で述べたように $e^{i\omega t}$ の $n=1$ の場合、即ち $e^{i\omega t}$ のつく項のみを取り出してその係数から成る関係式を作れば

$$\left\{ \begin{array}{l} i\sigma u_{11} + \frac{\partial(U_1 u_{11})}{\partial x} + g \frac{\partial h_{11}}{\partial x} + g \frac{\partial h_{21}}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (49)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i\sigma u_{21} + \tau g \frac{\partial h_{11}}{\partial x} + g \frac{\partial h_{21}}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (50)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i\sigma h_{11} + \frac{\partial}{\partial x}(H_1 u_{11} + U_1 h_{11}) = 0 \end{array} \right. \quad (51)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i\sigma h_{21} + \frac{\partial}{\partial x}(H_2 u_{21}) = 0 \end{array} \right. \quad (52)$$

ここに H_1, U_1, H_2 はそれぞれ定常状態に於ける淡水層の厚さと流速及び塩水層の厚さである。塩水の流速は0として取り扱っているが、これは循環流の微弱な河口内の二重水層では妥当な取り扱いである。又今は $n=1$ の場合について進めているが、これは周期的変動の基本波を取り扱う事に相当し二層流体の周期変動の現象を理解するためにはこの場合の考慮だけで大方達成されるであろう。

前節で明らかなように U_1, H_1, H_2 の x に対する変化率は小さく、その為比較的長い区間でもこれらを一定と考へて取り扱う事が許されるであろう。もしこれらを x の関数として前節に得られた結果を用いて取り扱う時は上式の解を求めるのは著るしく困難になってくる。以上の理由から U_1, H_1, H_2 はこの場合 x に対して一定と考へることにする。従つて変数は $u_{11}, u_{21}, h_{11}, h_{21}$ であつて、これらは一般に複素数であり、各々は u_1, u_2, h_1, h_2 の周期的変動の振幅及び位相を与えるものである。これらを解くに当たつてLaplace変換を用いると解を得る操作が容易になるばかりでなく、さらに波動の伝播速度を直接誘導出来て便利である。

境界値として $x=0$ で $u_{11}=u_{110}, u_{21}=u_{210}, h_{11}=h_{110}, h_{21}=h_{210}$ とし(49)~(52)を x に関し

て Laplace 変換を行なうことにより次式の如く変換出来る。ここに \tilde{u}_{11} , \tilde{u}_{21} , \tilde{h}_{11} , \tilde{h}_{21} は u_{11} , u_{21} , h_{11} , h_{21} のそれぞれ Laplace 変換を表わすものとする。

$$\begin{cases} (i\sigma + U_1 s) \tilde{u}_{11} + g s \tilde{h}_{11} + g s \tilde{h}_{21} = U_1 u_{110} + g h_{110} + g h_{210} & (53) \\ i\sigma \tilde{u}_{21} + \tau g s \tilde{h}_{11} + g s \tilde{h}_{21} = \tau g h_{110} + g h_{210} & (54) \\ i\sigma \tilde{h}_{11} + H_1 s \tilde{u}_{11} + U_1 s \tilde{h}_{11} = H_1 u_{110} + U_1 h_{110} & (55) \\ i\sigma \tilde{h}_{21} + H_2 s \tilde{u}_{21} = H_2 u_{210} & (56) \end{cases}$$

を得る。

これらの式から \tilde{u}_{11} , \tilde{u}_{21} , \tilde{h}_{11} , \tilde{h}_{21} を求め、さらにそれを逆変換して u_{11} , u_{21} , h_{11} , h_{21} を得るのであるが、その前に直接波動伝播速度を得るためにこれらの式を matrix の形式に書き直すと

$$\begin{pmatrix} i\sigma + U_1 s & 0 & g s & g s \\ 0 & i\sigma & \tau g s & g s \\ H_1 s & 0 & i\sigma + U_1 s & 0 \\ 0 & H_2 s & 0 & i\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_{11} \\ \tilde{u}_{21} \\ \tilde{h}_{11} \\ \tilde{h}_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 u_{110} + g h_{110} + g h_{210} \\ \tau g h_{110} + g h_{210} \\ H_1 u_{110} + U_1 h_{110} \\ H_2 u_{210} \end{pmatrix} \quad (57)$$

となる。左辺の左の matrix の各要素により出来る行列式を \tilde{J} とすると

$$\begin{aligned} \tilde{J} &= \begin{vmatrix} i\sigma + U_1 s & 0 & g s & g s \\ 0 & i\sigma & \tau g s & g s \\ H_1 s & 0 & i\sigma + U_1 s & 0 \\ 0 & H_2 s & 0 & i\sigma \end{vmatrix} \\ &= g H_2 \{ (1-\tau) g H_1 - U_1^2 \} s^4 - 2 U_1 g H_2 (i\sigma) s^3 \\ &\quad - (g H_1 + g H_2 - U_1^2) (i\sigma)^2 s^2 + 2 U_1 (i\sigma)^3 s + (i\sigma)^4 \end{aligned} \quad (58)$$

である。(58)を0とおいて得られる s の4つの根の存在は二重水層に4種類の波動が存在することを示し、伝播速度はそれぞれ4根の値からすぐ導くことができる。(この節の末尾、補遺1参照 p. 28) しかしながら(58)から s の根を正確に導き出すことは四次の方程式の為に、理論的には可能でも實際上困難である。しかし(58)は高い近似度を以てつぎのように4個の因数の積の形に書き改めることが可能である。(補遺2参照 p. 29)

$$\begin{aligned} \tilde{J} &\doteq \left\{ \left(\frac{U_1 H_1}{H_1 + H_2} + \sqrt{g(H_1 + H_2)} \right) s + i\sigma \right\} \left\{ \left(\frac{U_1 H_1}{H_1 + H_2} - \sqrt{g(H_1 + H_2)} \right) s + i\sigma \right\} \\ &\quad \times \left\{ \left(\frac{U_1 H_2}{H_1 + H_2} + \frac{\sqrt{H_1 H_2}}{H_1 + H_2} \sqrt{(1-\tau)g(H_1 + H_2) - U_1^2} \right) s + i\sigma \right\} \\ &\quad \times \left\{ \left(\frac{U_1 H_2}{H_1 + H_2} - \frac{\sqrt{H_1 H_2}}{H_1 + H_2} \sqrt{(1-\tau)g(H_1 + H_2) - U_1^2} \right) s + i\sigma \right\} \end{aligned} \quad (59)$$

従ってこれから四種の波の伝播速度は

$$C_s \doteq \frac{U_1 H_1}{H_1 + H_2} \pm \sqrt{g(H_1 + H_2)} \quad (60)$$

$$C_i \doteq \frac{U_1 H_2}{H_1 + H_2} \pm \frac{\sqrt{H_1 H_2}}{H_1 + H_2} \sqrt{(1-\gamma)g(H_1 + H_2) - U_1^2} \quad (61)$$

となる。 C_s は表面波、 C_i は内部波のそれぞれ伝播速度である。± は伝播方向がおのおの上流方向、下流方向であることに対応している。この式は Schijf と Schönfeld が示した結果に於て $U_2=0$ としたものと一致している⁴⁶⁾。

(60), (61) は $H_1 \ll H_2$ のときは

$$C_s \doteq \pm \sqrt{g(H_1 + H_2)} \quad (62)$$

$$C_i \doteq U_1 \pm \sqrt{(1-\gamma)gH_1} \quad (63)$$

となることが、ただちに判る。

以上の結果から河口内二重水層に於いて塩水層が淡水層に較べて厚いときは C_s で表わされるような二層の層状構造に関係のない表面波と、 C_i で表わされるような二層が接触している為に発生する内部波と、二つの波動が存在する事を結論できる。 C_i の絶対値は C_s に較べて極めて小さいのが普通である。つぎにこれらの波動の位相、云いかえると淡水の厚さ、塩水の厚さ、又は淡水流速等が示す周期変動の位相や同じく振幅について調べてみることにする。まず (53)~(56) から \tilde{h}_{11} を求めると

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{11} &= \frac{1}{\tilde{A}} \begin{vmatrix} i\sigma + U_1 s & 0 & U_1 u_{110} + gh_{110} + gh_{210} & gs \\ 0 & i\sigma & \gamma gh_{110} + gh_{210} & gs \\ H_1 s & 0 & H_1 u_{110} + U_1 h_{110} & 0 \\ 0 & H_2 s & H_2 u_{210} & i\sigma \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\tilde{A}} \left[gH_2 \left\{ (1-\gamma)gH_1 - U_1^2 \right\} h_{110} s^3 + gH_2 \left\{ H_1(u_{210} - u_{110}) - U_1 h_{110} \right\} (i\sigma) s^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\{ U_1^2 h_{110} - gH_1(h_{110} + h_{210}) \right\} (i\sigma)^2 s + (H_1 u_{110} + U_1 h_{110})(i\sigma)^3 \right] \quad (64) \end{aligned}$$

もし $H_1 \ll H_2 \rightarrow \infty$, 従って $u_{110} \gg u_{210} \rightarrow 0$ とすれば

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{11} &= \frac{gH_2 s^2}{\tilde{A}} \left[\left\{ (1-\gamma)gH_1 - U_1^2 \right\} h_{110} s + \left\{ H_1(u_{210} - u_{110}) - U_1 h_{110} \right\} (i\sigma) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{h_{110} - \frac{H_1 u_{110}}{\sqrt{(1-\gamma)gH_1}}}{s - \frac{i\sigma}{\sqrt{(1-\gamma)gH_1} - U_1}} + \frac{h_{110} + \frac{H_1 u_{110}}{\sqrt{(1-\gamma)gH_1}}}{s + \frac{i\sigma}{\sqrt{(1-\gamma)gH_1} + U_1}} \right\} \quad (65) \end{aligned}$$

となる。

同様に \tilde{h}_{21} を求めれば

$$\tilde{h}_{21} = \frac{1}{\tilde{A}} \begin{vmatrix} i\sigma + U_1 s & 0 & gs & U_1 u_{110} + gh_{110} + gh_{210} \\ 0 & i\sigma & \gamma gs & \gamma gh_{110} + gh_{210} \\ H_1 s & 0 & i\sigma + U_1 s & H_1 u_{110} + U_1 h_{110} \\ 0 & H_2 s & 0 & H_2 u_{210} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{gH_2}{\tilde{A}} \left[\left\{ (1-\tau)gH_1 - U_1^2 \right\} h_{210} s^3 + \left\{ \tau H_1 u_{110} - U_1 (\tau h_{110} + 2h_{210}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{U_1^2 - gH_1}{g} u_{210} \right\} (i\sigma) s^2 + \left\{ \frac{2U_1 u_{210}}{g} - \tau h_{110} - h_{210} \right\} (i\sigma)^2 s + \frac{u_{210}}{g} (i\sigma)^3 \right] \quad (66)
\end{aligned}$$

前と同様に $H_1 \ll H_2 \rightarrow \infty$, $u_{110} \gg u_{210} \rightarrow 0$ とすれば

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_{21} &= \frac{gH_2 s}{\tilde{A}} \left[\left\{ (1-\tau)gH_1 - U_1^2 \right\} h_{210} s^2 + (\tau H_1 u_{110} - \tau U_1 h_{110} - 2U_1 h_{210}) (i\sigma) s \right. \\
&\quad \left. - (\tau h_{110} + h_{210}) (i\sigma)^2 \right] \\
&= \frac{\tau h_{110} + h_{210}}{s} + \frac{\tau}{2} \left\{ \frac{-\left(h_{110} - \frac{H_1 u_{110}}{\sqrt{(1-\tau)gH_1}} \right)}{s - \frac{i\sigma}{\sqrt{(1-\tau)gH_1} - U_1}} + \frac{-\left(h_{110} + \frac{H_1 u_{110}}{\sqrt{(1-\tau)gH_1}} \right)}{s + \frac{i\sigma}{\sqrt{(1-\tau)gH_1} + U_1}} \right\} \quad (67)
\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_{11} &= \frac{1}{\tilde{A}} \begin{vmatrix} U_1 u_{110} + gh_{110} + gh_{210} & 0 & gs & gs \\ \tau gh_{110} + gh_{210} & i\sigma & \tau gs & gs \\ H_1 u_{110} + U_1 h_{110} & 0 & i\sigma + U_1 s & 0 \\ H_2 u_{210} & H_2 s & 0 & i\sigma \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\tilde{A}} \left[gH_2 \left\{ (1-\tau)gH_1 - U_1^2 \right\} u_{110} s^3 - gH_2 \left\{ (1-\tau)gh_{110} + U_1 (u_{110} + u_{210}) \right\} (i\sigma) s^2 \right. \\
&\quad \left. + \left\{ (U_1^2 - gH_1)u_{110} + U_1 gh_{210} - gH_2 u_{210} \right\} (i\sigma)^2 s + \left\{ U_1 u_{110} + gh_{110} + gh_{210} \right\} (i\sigma)^3 \right] \quad (68)
\end{aligned}$$

$H_1 \ll H_2 \rightarrow \infty$, $u_{110} \gg u_{210} \rightarrow 0$ とすれば

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_{11} &= \frac{gH_2 s^2}{\tilde{A}} \left[\left\{ (1-\tau)gH_1 - U_1^2 \right\} u_{110} s - \left\{ (1-\tau)gh_{110} + U_1 u_{110} \right\} (i\sigma) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{u_{110} - \frac{\sqrt{(1-\tau)gH_1}}{H_1} h_{110}}{s - \frac{i\sigma}{\sqrt{(1-\tau)gH_1} - U_1}} + \frac{u_{110} + \frac{\sqrt{(1-\tau)gH_1}}{H_1} h_{110}}{s + \frac{i\sigma}{\sqrt{(1-\tau)gH_1} + U_1}} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{(1-\tau)gH_1}}{H_1} \right) \left\{ \frac{-\left(h_{110} - \frac{H_1 u_{110}}{\sqrt{(1-\tau)gH_1}} \right)}{s - \frac{i\sigma}{\sqrt{(1-\tau)gH_1} - U_1}} + \frac{h_{110} + \frac{H_1 u_{110}}{\sqrt{(1-\tau)gH_1}}}{s + \frac{i\sigma}{\sqrt{(1-\tau)gH_1} + U_1}} \right\} \quad (69)
\end{aligned}$$

同じく \tilde{u}_{21} は

$$\tilde{u}_{21} = \frac{1}{\tilde{A}} \begin{vmatrix} i\sigma + U_1 s & U_1 u_{110} + gh_{110} + gh_{210} & gs & gs \\ 0 & \tau gh_{110} + gh_{210} & \tau gs & gs \\ H_1 s & H_1 u_{110} + U_1 h_{110} & i\sigma + U_1 s & 0 \\ 0 & H_2 u_{210} & 0 & i\sigma \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\mathcal{J}} \left[gH_2 \left\{ (1-\tau)gH_1 - U_1^2 \right\} u_{210} s^3 - \left\{ ((1-\tau)gH_1 - U_1^2)gh_{210} + 2gH_2 U_1 u_{210} \right\} \right. \\
&\quad \times (i\sigma)s^2 + (\tau U_1 gh_{110} + 2U_1 gh_{210} - gH_2 u_{210} - \tau gH_1 u_{110})(i\sigma)^2 s \\
&\quad \left. + (\tau gh_{110} + gh_{210})(i\sigma)^3 \right] \quad (70)
\end{aligned}$$

$H_1 \ll H_2 \rightarrow \infty$, $u_{110} \gg u_{210} \rightarrow 0$ とすれば

$$\tilde{u}_{21} = \frac{u_{210}}{2} \left\{ \frac{1 - \frac{U_1}{\sqrt{(1-\tau)gH_1}}}{s - \frac{i\sigma}{\sqrt{(1-\tau)gH_1 - U_1}}} + \frac{1 + \frac{U_1}{\sqrt{(1-\tau)gH_1}}}{s + \frac{i\sigma}{\sqrt{(1-\tau)gH_1 + U_1}}} \right\} = 0 \quad (71)$$

となる。式の中に設けた仮定は天塩川、石狩川河口附近の二重水層にあつては一般に $H_1 < H_2$ であつて、又湖差が大きくない為に $u_{21} \ll u_{11}$ と考えてよい為になされたものであり、ここに展開した (65), (67), (69), (71) の諸式の $H_1 \ll H_2 \rightarrow \infty$, $u_{110} \gg u_{210} \rightarrow 0$ という理想化は現象の説明のためには決して不都合なことではない。しかもこのようにすることによって式の煩雑さを非常に緩和し考察を便ならしめる。(65)と(67)から

$$\tilde{h}_{11} + \tilde{h}_{21} = \frac{\tau h_{110} + h_{210}}{s} + \frac{1-\tau}{2} \left\{ \frac{h_{110} - \frac{H_1 u_{110}}{\sqrt{(1-\tau)gH_1}}}{s - \frac{i\sigma}{\sqrt{(1-\tau)gH_1 - U_1}}} + \frac{h_{110} + \frac{H_1 u_{110}}{\sqrt{(1-\tau)gH_1}}}{s + \frac{i\sigma}{\sqrt{(1-\tau)gH_1 + U_1}}} \right\} \quad (72)$$

となる。(65), (67), (69) 及び (72) を逆変換することによって h_{11} , h_{21} , u_{11} , $h_{11} + h_{21}$ 等を求めることができる。即ち

$$h_{11} = B \exp\left(\frac{i\sigma x}{\sqrt{(1-\tau)gH_1 - U_1}}\right) + A \exp\left(\frac{-i\sigma x}{\sqrt{(1-\tau)gH_1 + U_1}}\right) \quad (73)$$

$$h_{21} = T - \tau \left\{ B \exp\left(\frac{i\sigma x}{\sqrt{(1-\tau)gH_1 - U_1}}\right) + A \exp\left(\frac{-i\sigma x}{\sqrt{(1-\tau)gH_1 + U_1}}\right) \right\} \quad (74)$$

$$u_{11} = \frac{\sqrt{(1-\tau)gH_1}}{H_1} \left\{ -B \exp\left(\frac{i\sigma x}{\sqrt{(1-\tau)gH_1 - U_1}}\right) + A \exp\left(\frac{-i\sigma x}{\sqrt{(1-\tau)gH_1 + U_1}}\right) \right\} \quad (75)$$

$$\begin{aligned}
&h_{11} + h_{21} \\
&= T + (1-\tau) \left\{ B \exp\left(\frac{i\sigma x}{\sqrt{(1-\tau)gH_1 - U_1}}\right) + A \exp\left(\frac{-i\sigma x}{\sqrt{(1-\tau)gH_1 + U_1}}\right) \right\} \quad (76)
\end{aligned}$$

ただし

$$A = \frac{1}{2} \left(h_{110} + \frac{H_1 u_{110}}{\sqrt{(1-\tau)gH_1}} \right)$$

$$B = \frac{1}{2} \left(h_{110} - \frac{H_1 u_{110}}{\sqrt{(1-\tau)gH_1}} \right)$$

$$T = \tau h_{110} + h_{210}$$

(27) の u_1, u_2, h_1, h_2 等の $n=1$ の成分をそれぞれ $(u_1)_1, (u_2)_1, (h_1)_1, (h_2)_1$ とすれば

$$\begin{cases} (h_1)_1 = h_{11} e^{i\sigma t} \\ (h_2)_1 = h_{21} e^{i\sigma t} \\ (u_1)_1 = u_{11} e^{i\sigma t} \\ (u_2)_1 = u_{21} e^{i\sigma t} \end{cases} \quad (77)$$

であるから (73)~(76) を用いて

$$(h_1)_1 = B \exp \left\{ i\sigma \left(t + \frac{x}{\sqrt{(1-r)gH_1 - U_1}} \right) \right\} + A \exp \left\{ i\sigma \left(t - \frac{x}{\sqrt{(1-r)gH_1 + U_1}} \right) \right\} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} (h_2)_1 = T \exp(i\sigma t) - r \left[B \exp \left\{ i\sigma \left(t + \frac{x}{\sqrt{(1-r)gH_1 - U_1}} \right) \right\} \right. \\ \left. + A \exp \left\{ i\sigma \left(t - \frac{x}{\sqrt{(1-r)gH_1 + U_1}} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (79)$$

$$\begin{aligned} (u_1)_1 = \frac{\sqrt{(1-r)gH_1}}{H_1} \left[-B \exp \left\{ i\sigma \left(t + \frac{x}{\sqrt{(1-r)gH_1 - U_1}} \right) \right\} \right. \\ \left. + A \exp \left\{ i\sigma \left(t - \frac{x}{\sqrt{(1-r)gH_1 + U_1}} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} (h_1)_1 + (h_2)_1 = T \exp(i\sigma t) + (1-r) \left[B \exp \left\{ i\sigma \left(t + \frac{x}{\sqrt{(1-r)gH_1 - U_1}} \right) \right\} \right. \\ \left. + A \exp \left\{ i\sigma \left(t - \frac{x}{\sqrt{(1-r)gH_1 + U_1}} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (81)$$

なる諸式を誘導することができる。(78)~(81) が河口内二重水層に発生する波動を表わすことになる。この論文では上流に向かって x 軸の正方向を取っているので $U_1 < 0$ である。故に係数 B のつく項は下流に向かって伝播する波動を、 A のつく項は上流に向かう波動を表わしている。もし潮汐の如く河口又は河口外から波動が発生して上流に及ぶ際には B のつく項は考える必要がない。故にそのような場合の波動、云いかえると淡水、塩水の厚さや流速あるいは水位等の周期的変動の状況は

$$(h_1)_1 = A \exp \left\{ i\sigma \left(t - \frac{x}{\sqrt{(1-r)gH_1 + U_1}} \right) \right\} \quad (82)$$

$$(h_2)_1 = T \exp(i\sigma t) - rA \left\{ i\sigma \left(t - \frac{x}{\sqrt{(1-r)gH_1 + U_1}} \right) \right\} \quad (83)$$

$$(u_1)_1 = \frac{\sqrt{(1-r)gH_1}}{H_1} A \exp \left\{ i\sigma \left(t - \frac{x}{\sqrt{(1-r)gH_1 + U_1}} \right) \right\} \quad (84)$$

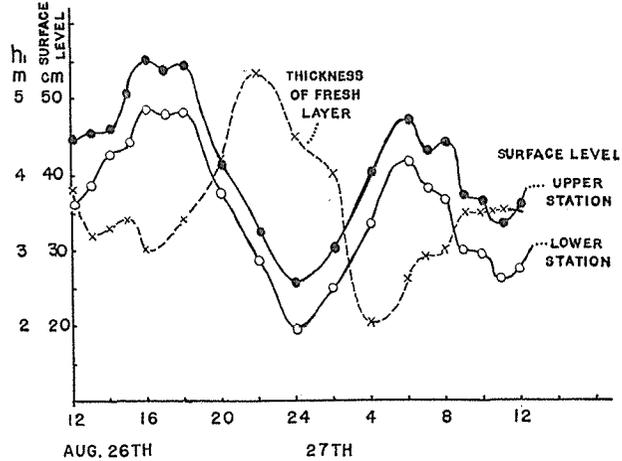
$$(h_1)_1 + (h_2)_1 = T \exp(i\sigma t) + (1-r) A \exp \left\{ i\sigma \left(t - \frac{x}{\sqrt{(1-r)gH_1 + U_1}} \right) \right\} \quad (85)$$

で表わすことができる。 $T \exp(i\sigma t)$ は川の上流でも下流でも位相差なく一様に振動することを

表わしているが、これは $H_1 \ll H_2 \rightarrow \infty$ とおいたためにこのような形になったものであって、本来は (62) で示したように $C_s = \sqrt{g(H_1 + H_2)}$ なる速度で伝播すべき波動である。しかしながら C_s は一般に内部波の伝播速度に較べれば非常に大きく、仮りに水深 $H_1 + H_2$ を 1 m にとれば $C_s = 3.1 \text{ m/sec} = 11.2 \text{ km/h}$ 、水深を 5 m にとれば $C_s = 7.0 \text{ m/sec} = 25.2 \text{ km/h}$ 、水深 10 m では $C_s = 9.9 \text{ m/sec} = 35.6 \text{ km/h}$ となる。筆者が観測を行なった天塩川や石狩川では水深は 6~18 m の範囲なので、潮汐のような長周期波に注目する際には河口から上流数 km の水深が上記のように深い区域を取り扱う場合は

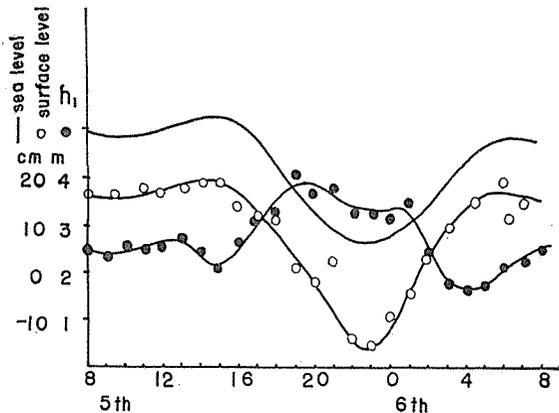
$C_s \rightarrow \infty$ 、即ち上流下流共同位相で変化すると考えてよからう。(85) の $(h_1)_1 + (h_2)_1$ は淡水層と塩水層の厚さの和であって、表面の水位変動を与えるものであるが、第 1 項が今述べた波動で、第 2 項は内部波に伴って現れる水面の変動を表わす。第 2 項の振幅は $(1-\gamma)$ がかかっている為に一般に小さく実際に観測される表面の水位変動はほとんど第 1 項のみと考えられる。

一例をあげよう。第 11 図



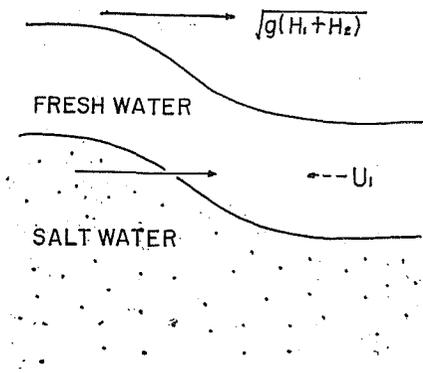
第 11 図 天塩川上下二地点の潮汐による水位変化
昭和 28 年 8 月 26~27 日、下流観測点は河口から 300 m 上流の地点、上流観測点はさらに 5 km 上流、淡水層の厚さは下流観点におけるもの。

は天塩川における実測結果であって、河口から上流 300 m の地点とそれからさらに 5 km 上流の地点とに於ける潮汐による水位変動の様子を示したものである。日本海に面した天塩川河口附近の海岸では一回潮になることが多くこの時も一回潮であって河口内の川の水位変動はそれに応じて一日一回の変化を示している。この図によると上流地点も下流地点もその変化の時間差はほとんど識別出来ない。実際には約 10 分程上流側の位相がおくれるはずであるが、1 時間おきの観測なのでそれを検出することは不可能である。以上によって、潮汐のような長周期の表面波としての伝播を取り扱うときには数 km 程

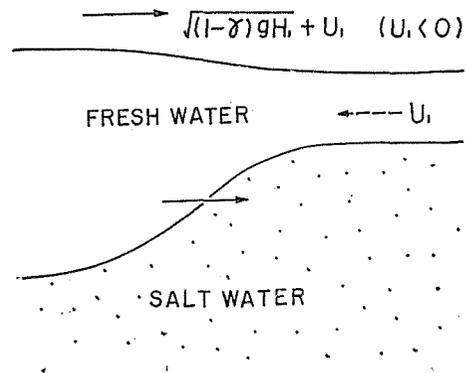


第 12 図 天塩川における実測の一例
場所……河口上流 300 m、年月日……昭 27. 8. 5~6、一番上の実線……小樽港推算潮位、○……当観測地点の水位、●……淡水層の厚さ。

度の範囲では $C_s \rightarrow \infty$ と見做して差支えない。つぎに水位変化の振幅に着目すると河口内の水位変動の振幅は潮汐の振幅とほぼ等しく、河口に入る長波は上流数 km の範囲では減衰が認められない。第 12 図はやはり天塩川の観測結果で、河口内の実測水位と潮位表による小樽港の推算潮位とを比較したものであって、これから見ても潮位変化をそのまま河口内の水位変化と見做しても大きな誤りがない事を知ることができる。ただし出水等による塩水層のない時は適用出来ぬことは勿論である。(82)と(83)を比較すれば明らかなように $T \exp(i\omega t)$ は $(h_2)_1$ に含まれているが $(h_1)_1$ には含まれていない。この事から先に論じた表面波の伝播の際には淡水層の厚さは変化しないことが判る(第 13 図)。又(85)の第 2 項は内部波によっても水位変化が起こることを示しているのは既に述べた通りであるが、この場合の水位変化の振幅は淡水層の変化の振幅の $1-\gamma$ 倍、即ち約 0.02 倍となって非常に微小である。このような内部波とそれに伴



第 13 図



第 14 図

う表面波の進行の状況は第 14 図のようになる。これは(82)、(83)、(85)から画くことが出来る。この場合伝播速度は $\sqrt{(1-\gamma)gH_1} + U_1 (U_1 < 0)$ であって、第 13 図の表面波の速度に較べると非常におそい。

つぎに各層の振幅と位相を調べてみる。淡水層の厚さを規準にとって考えると、海水層は振幅 γ 倍 ($=\rho_1/\rho_2 \approx 0.98$) で逆位相となり、淡水流速は振幅 $\sqrt{(1-\gamma)gH_1}/H_1$ 倍で同位相である。又水位は前記のように内部波による変化だけを見れば振幅 $1-\gamma$ 倍 (≈ 0.02) でやはり同位相となる。ここで淡水流速について注意することがある。上流方向を座標の正にとってあるから、淡水の厚さとその流速が同位相ということは淡水の厚さと流速絶対値は逆位相ということになる。淡水層の厚さが増加すればその流れはおそくなるわけである。

以上述べた結果、即ち振幅や位相の関係を第 7 表にまとめることにする。

第 13 図に示した表面波の振幅 T と第 7 表に示したような内部波による諸量の振幅との間には両者を結ぶ関係式はない。今までの議論にはない別の条件式が実際には必要であろう。河口の control action 等による条件が関与するものと思われるが現在はまだ明らかではない。しかし天塩川の実測によると

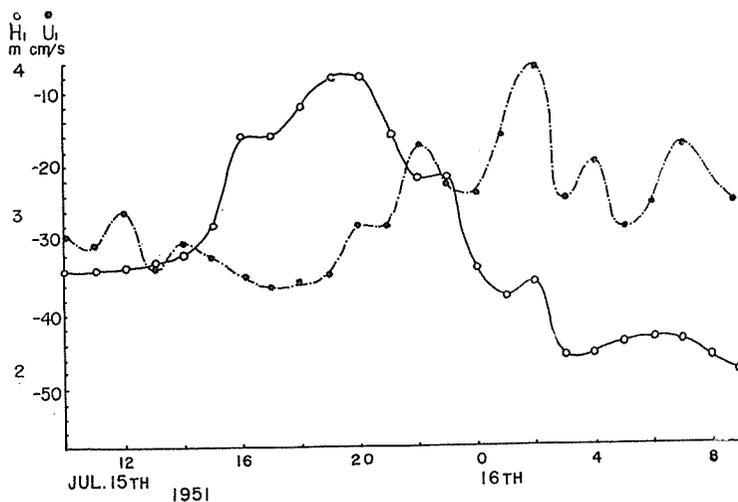
第7表 内部波による諸量の変化

	振 幅	位 相	備 考
淡水層の厚さ	1	0	
塩水層の厚さ	r	π	
水 位	$1-r$	0	内部波による水位の変動
淡 水 流 速	$\sqrt{(1-r)gH_1}/H_1$	0	流速の絶対値は逆位相 (π)

$$\frac{A}{T} \approx 7$$

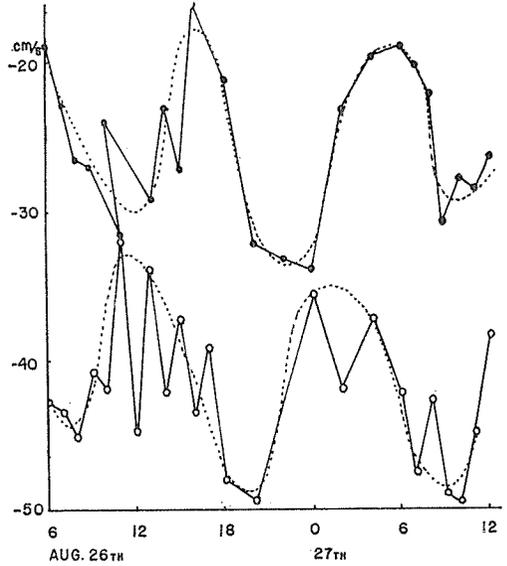
が多くの場合に成り立っている⁴⁷⁾。表面波と内部波の位相の関係は $rh_{110} + h_{210}$, $h_{110} + H_1u_{110}/\sqrt{(1-r)gH_1}$ を構成する複素数 h_{110} , h_{210} , u_{110} 等の境界値によって変化し得るし、又内部波と表面波の伝播速度が異なるから観測地点の河口からの距離によっても変ることは勿論である。天塩川の観測の場合には第11図や第12図からも知られるように河口から300m上流の地点に於ては淡水の厚さは水位よりも約6時間位相がおくれているのが普通であった。第7表に記した水位の変化はここに述べた表面波による水位変化とは異質のもので振幅は前述の如く淡水層厚さの変化の $1-r$ 倍であって小さい為に多くの場合観測にかからない。

つぎに淡水層の厚さと淡水流速の関係を調べてみる。第15図は同じく天塩川の観測結果で、淡水層の厚さと同じく淡水層の流速の関係を示してある。これによれば両者はむしろ逆位相に近く、第7表で同位相となっている結果と全く反する。定性的に考えれば落潮期には水面勾配が増して流速が増大し下層海水を河口の方へ押し、その為に淡水層は厚さを増すと考えられるので、観測結果は定性的な上の解釈と矛盾する点はない。むしろ第7表の結果の方が潮汐



第15図 天塩川淡水の厚さと淡水流速
昭和26年7月15~16日, 河口から300m上流の地点
○……淡水の厚さ ●……淡水流速

のような長周期波の伝播に対しては適用出来ないのではないかとと思われる。試みに淡水層の厚さと、流速の振幅について観測値と第7表を比較してみよう。第7表から流速は淡水厚さの $\sqrt{(1-\tau)gH_1}/H_1$ 倍であるから H_1 に観測値の平均値 275 cm を代入すると 0.27 倍 (この次元は時間の逆数、この場合 sec^{-1}) となる。従って淡水層の厚さの変化 1 m に対しては流速は 27 cm/sec の変化をする必要があり、実測値と比較すれば明らかに過大な見積りとなる。このようにくいちがいの主な原因は第7表の由来が二層間の摩擦とか、水面や境界面勾配を無視して立てられた式にある為であろう。潮汐のような長周期波でなくもっと短い周期の波に対しては第7表は成り立ってであろうが、長周期となるに従ってくいちがいが生じてくるものと思われる。次節では二層間の摩擦を考慮して考察し、実際に適合してくるか否かを調べてみる。



第16図 天塩川上下二観測地点の流速

(-)は河口に向かうことを表わす。破線は大体の傾向を示したもの。昭和28年8月26~27日。

この節の最後に、淡水層の厚さが内部波速度 $\sqrt{(1-\tau)gH_1} + U_1 (U_1 < 0)$ を以て進行すると同時に、淡水層の流速も又同じ速度で変動が進行するという(84)又は第7表の結果が実際に観測された例を示しておこう。第16図は天塩川の観測結果である。二地点間の距離は5 km であって、下流地点の淡水層の平均厚さ3.8 m, 平均淡水流速 43 cm/sec であるから $\sqrt{(1-\tau)gH_1} + U_1 = 0.43 \text{ m/sec}$ となり、5 km を伝播するのに約3時間を要することになる。この3時間という値は次節で二層間の抵抗を考慮した場合の修正を行なってもあまり差はない。図に示された上下二地点の淡水流速の位相差は2~4時間であり大体一致している。結局内部波が進行する場合には流速変動も同じ速度で伝播する事が実証されたわけである。

補遺 1

(57) から得られる $\tilde{u}_{11}, \tilde{u}_{21}, \tilde{h}_{11}, \tilde{h}_{21}$ の各解は分母に \tilde{J} を持つことは明らかなので、今 $\tilde{J} = 0$ とおいたときの s の4根を $-i\sigma/C_1, -i\sigma/C_2, -i\sigma/C_3, -i\sigma/C_4$ とすれば

$$\tilde{J} = gH_2 \left\{ (1-\tau)gH_1 - U_1^2 \right\} \left(s + \frac{i\sigma}{C_1} \right) \left(s + \frac{i\sigma}{C_2} \right) \left(s + \frac{i\sigma}{C_3} \right) \left(s + \frac{i\sigma}{C_4} \right)$$

となり $\tilde{u}_{11}, \tilde{u}_{21}, \tilde{h}_{11}, \tilde{h}_{21}$ の各解の形は

$$\frac{A_1}{s + \frac{i\sigma}{C_1}} + \frac{A_2}{s + \frac{i\sigma}{C_2}} + \frac{A_3}{s + \frac{i\sigma}{C_3}} + \frac{A_4}{s + \frac{i\sigma}{C_4}}$$

の如きものとなる。この式の逆変換は

$$A_1 e^{-\frac{i\sigma}{c_1}x} + A_2 e^{-\frac{i\sigma}{c_2}x} + A_3 e^{-\frac{i\sigma}{c_3}x} + A_4 e^{-\frac{i\sigma}{c_4}x}$$

となるから始めに取り除いた $e^{i\sigma t}$ を乗ずることにより u_1, u_2, h_1, h_2 の変動を表わす関数は

$$A_1 e^{i\sigma\left(t-\frac{x}{c_1}\right)} + A_2 e^{i\sigma\left(t-\frac{x}{c_2}\right)} + A_3 e^{i\sigma\left(t-\frac{x}{c_3}\right)} + A_4 e^{i\sigma\left(t-\frac{x}{c_4}\right)}$$

となって4種の波がそれぞれ伝播速度 C_1, C_2, C_3, C_4 で進行することを示すことができる。

補遺 2

逆に(59)を展開して近似的に(58)の右辺に等しくなればよい。(59)を展開すれば

$$\begin{aligned} & \left\{ gH_2 - \frac{U_1^2 H_1^2 H_2}{(H_1 + H_2)^3} \right\} \left\{ (1-\gamma)gH_1 - U_1^2 \right\} s^4 \\ & + 2U_1(i\sigma) \left\{ U_1^2 \frac{H_2 H_1 (2H_1 + H_2)}{(H_1 + H_2)^3} - gH_2 \frac{(2-\gamma)H_1^2 + 2H_1 H_2 + H_2^2}{(H_1 + H_2)^2} \right\} s^3 \\ & + (i\sigma)^2 \left\{ U_1^2 \frac{H_1^2 + 5H_1 H_2 + H_2^2}{(H_1 + H_2)^2} - g(H_1 + H_2) \frac{H_1^2 + (3-\gamma)H_1 H_2 + H_2^2}{(H_1 + H_2)^2} \right\} s^2 \\ & + 2U_1(i\sigma)^3 s + (i\sigma)^4 \end{aligned}$$

となる。しかるに

$$\frac{H_1^2 H_2}{(H_1 + H_2)^3} \text{ は } H_1 = 2H_2 \text{ のとき最大で約 } 0.15$$

$$\frac{H_2 H_1 (2H_1 + H_2)}{(H_1 + H_2)^3} \text{ は } 2H_1 = (1 + \sqrt{6})H_2 \text{ のとき最大で約 } 0.38$$

$$\frac{(2-\gamma)H_1^2 + 2H_1 H_2 + H_2^2}{(H_1 + H_2)^2} \doteq 1$$

$$\frac{H_1^2 + 5H_1 H_2 + H_2^2}{(H_1 + H_2)^2} \text{ は } H_1 = H_2 \text{ のとき最大で } 1.75$$

$$\frac{H_1^2 + (3-\gamma)H_1 H_2 + H_2^2}{(H_1 + H_2)^2} \doteq 1$$

等が成り立ち、 $gH_1 \gg U_1^2$ 、 $gH_2 \gg U_2^2$ が一般に成りたつから(58)は近似的に(59)に等しい。

6. 二層間の摩擦を考慮した場合の波動

前節に於いて淡水層の厚さとその流速の関係が層間摩擦を無視すると同位相になることを述べた。即ち淡水の厚さが最大又は最小のときには流速の絶対値がそれぞれ最小又は最大になる。実際に二層間に摩擦が存在するときにはその位相振幅あるいは伝播速度がどのように変化して行くかについて考察してみよう。基本方程式(12)~(15)及び(17)から

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + g \frac{\partial h_1}{\partial x} + g \frac{\partial h_2}{\partial x} + gI_b - \frac{ku_1^2}{\rho_1 h_1} = 0 \quad (86)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \tau g \frac{\partial h_1}{\partial x} + g \frac{\partial h_2}{\partial x} + g I_0 + \frac{k u_1^2}{\rho_2 h_2} = 0 \quad (87)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} + h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \quad (88)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} + h_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \quad (89)$$

を得る。第4節、第5節で行なったのと同様に、これらの式につぎの関係式

$$\begin{cases} u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} u_{1n} e^{i n \omega t} \\ u_2 = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} e^{i n \omega t} \\ h_1 = \sum_{n=0}^{\infty} h_{1n} e^{i n \omega t} \\ h_2 = \sum_{n=0}^{\infty} h_{2n} e^{i n \omega t} \end{cases}$$

を代入して、さらに $u_{10}=U_1$, $u_{20}=0$, $h_{10}=H_1$, $h_{20}=H_2$ として $e^{i n \omega t}$ を含む項だけを取り出せばつぎの式を誘導することができる。

$$\begin{cases} i \omega u_{11} + \frac{\partial(U_1 u_{11})}{\partial x} + g \frac{\partial h_{11}}{\partial x} + g \frac{\partial h_{21}}{\partial x} - \frac{k}{\rho_1} \left(2 \frac{U_1}{H_1} u_{11} - \frac{U_1^2}{H_1^2} h_{11} \right) = 0 \end{cases} \quad (90)$$

$$\begin{cases} i \omega u_{21} + \tau g \frac{\partial h_{11}}{\partial x} + g \frac{\partial h_{21}}{\partial x} + \frac{k}{\rho_2} \left(2 \frac{U_1}{H_2} u_{11} - \frac{U_1^2}{H_2^2} h_{21} \right) = 0 \end{cases} \quad (91)$$

$$\begin{cases} i \omega h_{11} + \frac{\partial}{\partial x} (H_1 u_{11} + U_1 h_{11}) = 0 \end{cases} \quad (92)$$

$$\begin{cases} i \omega h_{21} + \frac{\partial}{\partial x} (H_2 u_{21}) = 0 \end{cases} \quad (93)$$

これらの式に於て $k=0$ とすれば、前節で波動を論じた際の基本式(49)~(52)に一致する。

U_1 , H_1 , H_2 はそれぞれ定常状態の淡水流速及び厚さ、塩水層の厚さを表わし、本来は x の関数である。しかし前節と同じようにこれらを x の関数として取り扱う時はほとんど解き難い関係式になることと、一般に二重水層の存在する区間の大半の部分では U_1 , H_1 , H_2 の変化は微小であるという理由からここでも U_1 , H_1 , H_2 はすべて一定として取り扱うことにする。これによって方程式は線型化されて前節と同じく Laplace 変換を用いて容易に解を求めることが出来る。

前節と同様に u_{11} , u_{21} , h_{11} , h_{21} の Laplace 変換をそれぞれ \tilde{u}_{11} , \tilde{u}_{21} , \tilde{h}_{11} , \tilde{h}_{21} とし $x=0$ で $u_{11}=u_{110}$, $u_{21}=u_{210}$, $h_{11}=h_{110}$, $h_{21}=h_{210}$ とすれば(90)~(93)はつぎのように変換される。

$$i \omega \tilde{u}_{11} + U_1 (s \tilde{u}_{11} - u_{110}) + g (s \tilde{h}_{11} - h_{110} + s \tilde{h}_{21} - h_{210}) - \frac{k}{\rho_1} \left(2 \frac{U_1}{H_1} \tilde{u}_{11} - \frac{U_1^2}{H_1^2} \tilde{h}_{11} \right) = 0 \quad (94)$$

$$i\sigma\tilde{u}_{21} + g \left\{ \gamma (s\tilde{h}_{11} - h_{110}) + s\tilde{h}_{21} - h_{210} \right\} + \frac{k}{\rho_2} \left(2 \frac{U_1}{H_2} \tilde{u}_{11} - \frac{U_1^2}{H_2^2} \tilde{h}_{11} \right) = 0 \quad (95)$$

$$i\sigma\tilde{h}_{11} + H_1 (s\tilde{u}_{11} - u_{110}) + U_1 (s\tilde{h}_{11} - h_{110}) = 0 \quad (96)$$

$$i\sigma\tilde{h}_{21} + H_2 (s\tilde{u}_{21} - u_{210}) = 0 \quad (97)$$

これらの式を整頓し matrix の形式に直すと

$$\begin{pmatrix} i\sigma + U_1 s - 2 \frac{kU_1}{\rho_1 H_1} & 0 & gs + \frac{kU_1^2}{\rho_1 H_1^2} & gs \\ 2 \frac{kU_1}{\rho_2 H_2} & i\sigma & \gamma gs & gs - \frac{kU_1^2}{\rho_2 H_2^2} \\ H_1 s & 0 & i\sigma + U_1 s & 0 \\ 0 & H_2 s & 0 & i\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_{11} \\ \tilde{u}_{21} \\ \tilde{h}_{11} \\ \tilde{h}_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 u_{110} + gh_{110} + gh_{210} \\ \gamma gh_{110} + gh_{210} \\ H_1 u_{110} + U_1 h_{110} \\ H_2 u_{210} \end{pmatrix} \quad (98)$$

左辺の左の matrix 各要素によって作られる行列式 \tilde{A} は、前節でも述べたように二重水層に発生する波動の伝播速度を与える式となる。

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{vmatrix} i\sigma + U_1 s - 2 \frac{kU_1}{\rho_1 H_1} & 0 & gs + \frac{kU_1^2}{\rho_1 H_1^2} & gs \\ 2 \frac{kU_1}{\rho_2 H_2} & i\sigma & \gamma gs & gs - \frac{kU_1^2}{\rho_2 H_2^2} \\ H_1 s & 0 & i\sigma + U_1 s & 0 \\ 0 & H_2 s & 0 & i\sigma \end{vmatrix} \\ &= gH_2 \left\{ (1-\gamma)gH_1 - U_1^2 \right\} s^4 \\ &+ \left[kU_1^2 \left(3 \frac{gH_2}{\rho_1 H_1} + \frac{U_1^2 + 2gH_2 - gH_1}{\rho_2 H_2} \right) - 2U_1(i\sigma)gH_2 \right] s^3 \\ &+ \left[(i\sigma)^2 (U_1^2 - gH_1 - gH_2) + (i\sigma)2kU_1 \left(\frac{gH_2 + U_1^2}{\rho_2 H_2} + \frac{gH_2}{\rho_1 H_1} \right) - 3 \frac{(kU_1^2)^2}{\rho_1 \rho_2 H_1 H_2} \right] s^2 \\ &+ \left[(i\sigma)^3 (2U_1) + (i\sigma)^2 \left(\frac{kU_1^2}{\rho_2 H_2} - 3 \frac{kU_1^2}{\rho_1 H_1} \right) - (i\sigma)2 \frac{kU_1}{\rho_1 H_1} \frac{kU_1^2}{\rho_2 H_2} \right] s \\ &+ \left[(i\sigma)^4 - (i\sigma)^3 \left(2 \frac{kU_1}{\rho_1 H_1} \right) \right] \end{aligned} \quad (99)$$

もし $H_1 \ll H_2 \rightarrow \infty$ とすれば (99) は簡単になり

$$\tilde{A} = s^2 g H_2 \left[\left\{ (1-\gamma)gH_1 - U_1^2 \right\} s^2 + \left\{ 3 \frac{kU_1^2}{\rho_1 H_1} - 2U_1(i\sigma) \right\} s + \left\{ (i\sigma) \frac{2kU_1}{\rho_1 H_1} - (i\sigma)^2 \right\} \right] \quad (100)$$

(100) の右辺括弧の中を 0 にする s の根は

$$s = -i\sigma \frac{\mp \sqrt{(1-\gamma)gH_1} \sqrt{1 - (2+F_2)G} + \frac{3}{2} F_2 G^2 - U_1(1 - \frac{3}{2} G)}{(1-\gamma)gH_1 - U_1^2} \quad (101)$$

ここに

$$\begin{cases} F_i = \frac{U_1^2}{(1-\tau)gH_1} \\ G = \frac{kU_1}{i\sigma\rho_1H_1} \end{cases}$$

F_i は第3節に述べた interfacial Froude number であり、 G は層間の摩擦の存在により生じた虚数を含む無次元量で、内部波の周期によっても変化する量である。(101)から内部波の伝播速度 C_i は

$$C_i = \frac{(1-\tau)gH_1 - U_1^2}{\mp\sqrt{(1-\tau)gH_1}\sqrt{1-(2+F_i)G+\frac{3}{2}F_iG^2} - U_1(1-\frac{3}{2}G)} \quad (102)$$

で与えられる。-, + はそれぞれ下流向き, 上流向きに伝播する波であることに対応する。

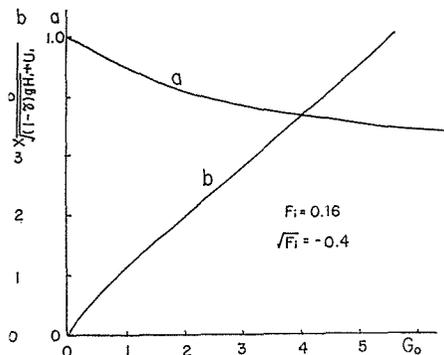
河口から上流に向かう内部波のみを問題にすると(102)は

$$\begin{cases} C_i = a(\sqrt{(1-\tau)gH_1} + U_1) \\ a = \frac{1-\sqrt{F_i}}{\sqrt{1-(2+F_i)G+\frac{3}{2}F_iG^2}-\sqrt{F_i}(1-\frac{3}{2}G)} \end{cases} \quad (103)$$

となり G が 0 の時は $a=1$ となって二層間摩擦を考慮しない場合の伝播速度と等しくなる。 $G=0$ という場合は $k=0$ の他に $\sigma \rightarrow \infty$ の場合にも成り立つから、周期の短い波ほど層間摩擦のない時の理想的伝播速度に近づくことになる。勿論あまり短周期の場合には粘性によるエネルギーの散逸が大きく影響して来て減衰してしまうからおのずから限度があろう。長周期波では a は 1 にならず一般に複素数になる。その実数部分は波速の低下の比率を表わし虚数部分は振幅の減衰率を与えることになる。さらにくわしくこの辺の事情を調べてみよう。(101)の式を今遡上波のみを問題として(+)だけを考慮することにしつぎのように変形してみる。

$$\begin{aligned} s &= -\frac{i\sigma}{\sqrt{(1-\tau)gH_1} + U_1} \left\{ \frac{\sqrt{1-(2+F_i)G+\frac{3}{2}F_iG^2}-\sqrt{F_i}(1-\frac{3}{2}G)}{1-\sqrt{F_i}} \right\} \\ &= \frac{-i\sigma}{a\{\sqrt{(1-\tau)gH_1} + U_1\}} - b \end{aligned} \quad (104)$$

a は波動伝播速度低下の係数となり、 b は振幅の距離に対する減衰率を表わすことになる。 a は(104)中で括弧の部分、即ち(103)の a の逆数から取り出した実数部分の逆数になっており、 b は同じく虚数部分に $-\sigma/\{\sqrt{(1-\tau)gH_1} + U_1\}$ を乗じたものに等しい。 $G=G_0i$ ($G_0 = \frac{-kU_1}{\sigma\rho_1H_1} > 0$) とし、天塩川に於ける昭和26年7月15~16日の観測値をもとにして、例えば $F_i=0.16$, $\sqrt{F_i} = U_1/\sqrt{(1-\tau)gH_1} = -0.4$ とすれば G_0 を変数にして a 及び b が如何に変化するかを図示すると第17図



第 17 図

に示すごときものとなる。これによって G_0 の増加に伴って内部波の伝播速度は低下し、一方振幅減衰率が増大して行くのが判る。従って二層間の摩擦応力係数 k が増加するか、あるいは内部波の周期や波長が長くなって σ が減少する場合には波動伝播速度はおそくなり、距離と共に振幅の減衰して行く割合が増加することを結論出来る。

つぎに淡水層の厚さ及び流速、塩水層の厚さ等の振幅や位相を調べてみよう。

(94)~(97) から \tilde{h}_{11} , \tilde{h}_{21} , \tilde{u}_{11} を求めるとつぎのようになる。

$$\tilde{h}_{11} = \frac{1}{\tilde{A}} \begin{vmatrix} i\sigma + U_1 s - 2 \frac{kU_1}{\rho_1 H_1} & 0 & U_1 u_{110} + gh_{110} + gh_{210} & gs \\ 2 \frac{kU_1}{\rho_2 H_2} & i\sigma & \tau gh_{110} + gh_{210} & gs - \frac{kU_1^2}{\rho_2 H_2^2} \\ H_1 s & 0 & H_1 u_{110} + U_1 h_{110} & 0 \\ 0 & H_2 s & H_2 u_{210} & i\sigma \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\tilde{A}} \left(gH_2 \left\{ (1-\tau)gH_1 - U_1^2 \right\} h_{110} s^3 + \left[gH_2 (i\sigma) \left\{ H_1 (u_{210} - u_{110}) - U_1 h_{110} \right\} \right. \right.$$

$$\left. \left. + kU_1 \frac{-H_1 U_1 (U_1 u_{110} + gh_{110} + gh_{210}) + 2gH_2 (H_1 u_{110} + U_1 h_{110}) - \frac{U_1^2}{H_2} (H_1 u_{110} + U_1 h_{110})}{\rho_2 H_2} \right] s^2 \right.$$

$$\left. + \left[(i\sigma)^2 \left\{ U_1^2 h_{110} - gH_1 (h_{110} + h_{210}) \right\} + \frac{kU_1^2}{\rho_2 H_2} \left(i\sigma - 2 \frac{kU_1}{\rho_1 H_1} \right) (H_1 u_{110} + U_1 h_{110}) \right] s \right.$$

$$\left. + \left\{ (i\sigma)^3 - 2(i\sigma)^2 \frac{kU_1}{\rho_1 H_1} \right\} (H_1 u_{110} + U_1 h_{110}) \right) \quad (105)$$

ただし \tilde{A} は (99) で与えられるものである。前節と同様に $H_1 \ll H_2 \rightarrow \infty$, $u_{110} \gg u_{210} \rightarrow 0$ の場合は

$$\tilde{h}_{11} = \frac{gH_2 s^2}{\tilde{A}} \left[\left\{ (1-\tau)gH_1 - U_1^2 \right\} h_{110} s + (i\sigma) \left\{ -H_1 u_{110} - U_1 h_{110} \right\} + 2 \frac{kU_1}{\rho_1 H_1} (H_1 u_{110} + U_1 h_{110}) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{+,-} \left\{ \frac{h_{110} \pm \frac{H_1 u_{110} (1-2G) - U_1 h_{110} \frac{\sigma}{2}}{\sqrt{(1-\tau)gH_1} \sqrt{1-(2+F_2)G + \frac{9}{4}F_2 G^2}}}{s + i\sigma \frac{\pm \sqrt{(1-\tau)gH_1} \sqrt{1-(2+F_2)G + \frac{9}{4}F_2 G^2} - U_1 (1-\frac{3}{2}G)}}{(1-\tau)gH_1 - U_1^2}} \right\} \quad (106)$$

この式の Σ は +, 及び - の各場合について両者を加えるという意味で + の場合は上流に向かう波, - の場合は下流に向かう波である。

同様にして

$$\tilde{h}_{21} = \frac{1}{\tilde{A}} \begin{vmatrix} i\sigma + U_1 s - 2 \frac{kU_1}{\rho_1 H_1} & 0 & gs + \frac{kU_1^2}{\rho_1 H_1^2} & U_1 u_{110} + gh_{110} + gh_{210} \\ 2 \frac{kU_1}{\rho_2 H_2} & i\sigma & \tau gs & \tau gh_{110} + gh_{210} \\ H_1 s & 0 & i\sigma + U_1 s & H_1 u_{110} + U_1 h_{110} \\ 0 & H_2 s & 0 & H_2 u_{210} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\tilde{\Delta}} \left(gH_2 \left\{ (1-\tau)gH_1 - U_1^2 \right\} h_{210} s^3 + gH_2 \left[(i\sigma) \left\{ \left(\frac{U_1^2 - gH_1}{g} \right) u_{210} + \tau H_1 u_{110} - \tau U_1 h_{110} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2U_1 h_{210} \right\} + kU_1 \left\{ \frac{\tau U_1 h_{110} - 2\tau H_1 u_{110} + 3U_1 h_{210}}{\rho_1 H_1} + \frac{2 \left(\frac{U_1^2 - gH_1}{g} \right) u_{110} + 2U_1 h_{210}}{\rho_2 H_2} \right\} \right] s^2 \\
&\quad + gH_2 \left[(i\sigma)^2 \left\{ \frac{2U_1}{g} u_{210} - (\tau h_{110} + h_{210}) \right\} + (i\sigma) kU_1 \left\{ \frac{-3 \frac{U_1}{g} u_{210} + 2(\tau h_{110} + h_{210})}{\rho_1 H_1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{2 \left(\frac{U_1}{g} u_{110} + h_{110} + h_{210} \right)}{\rho_2 H_2} \right\} - 2 \frac{U_1}{g} \left(\frac{kU_1}{\rho_2 H_2} \frac{kU_1}{\rho_1 H_1^2} \right) (H_1 u_{110} + U_1 h_{110}) \right] s \\
&\quad + \left\{ (i\sigma)^3 H_2 u_{210} - 2(i\sigma)^2 \frac{kU_1}{\rho_1 H_1} H_2 u_{210} \right\} \Big) \tag{107}
\end{aligned}$$

$H_1 \ll H_2 \rightarrow \infty$, $u_{110} \gg u_{210} \rightarrow 0$ の場合は

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_{21} &= \frac{gH_2 S}{\tilde{\Delta}} \left[\left\{ (1-\tau)gH_1 - U_1^2 \right\} h_{210} s^2 + \left\{ (1-2G)\tau H_1 u_{110} - (1-G)\tau U_1 h_{110} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (2-3G)U_1 h_{210} \right\} (i\sigma) s + (2G-1)(\tau h_{110} + h_{210})(i\sigma)^2 \right] \\
&= \frac{\tau h_{110} + h_{210}}{s} + \frac{\gamma}{2} \sum_{+,-} \left\{ \frac{- \left\{ h_{110} \pm \frac{H_1 u_{110} (1-2G) - U_1 h_{110} \frac{G}{2}}{\sqrt{(1-\tau)gH_1} \sqrt{1-(2+F_2)G + \frac{9}{4}F_2 G^2}} \right\}}{s + i\sigma \pm \sqrt{(1-\tau)gH_1} \sqrt{1-(2+F_2)G + \frac{9}{4}F_2 G^2} - U_1 (1-\frac{3}{2}G)} \right\} \tag{108}
\end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_{11} &= \frac{1}{\tilde{\Delta}} \begin{vmatrix} U_1 u_{110} + gh_{110} + gh_{210} & 0 & gs + \frac{kU_1^2}{\rho_1 H_1^2} & gs \\ \tau gh_{110} + gh_{210} & i\sigma & \tau gS & gs - \frac{kU_1^2}{\rho_2 H_1^2} \\ H_1 u_{110} + U_1 h_{110} & 0 & i\sigma + U_1 s & 0 \\ H_2 u_{210} & H_2 s & 0 & i\sigma \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\tilde{\Delta}} \left(gH_2 \left\{ (1-\tau)gH_1 - U_1^2 \right\} u_{110} s^3 + gH_2 \left[-(i\sigma) \left\{ (1-\tau)gh_{110} + U_1(u_{110} + u_{210}) \right\} \right. \right. \\
&\quad + \left\{ \frac{kU_1^2}{\rho_1 H_1^2} (H_1 u_{110} + U_1 h_{110}) + \frac{kU_1^2}{\rho_2 H_2^2} \left(\frac{U_1^2 - gH_1}{g} u_{110} + U_1 h_{210} \right) \right\} \Big] s^2 \\
&\quad + gH_2 \left[(i\sigma)^2 \left(\frac{U_1^2 - gH_1}{gH_2} u_{110} + \frac{U_1}{H_2} h_{210} - u_{210} \right) + (i\sigma) \frac{kU_1^2}{\rho_2 H_2^2} \left(\frac{U_1}{g} u_{110} + h_{110} + h_{210} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{H_1 u_{110} + U_1 h_{110}}{g} \frac{kU_1^2}{\rho_1 H_1^2} \frac{kU_1^2}{\rho_2 H_2^2} \right] s + \left\{ (i\sigma)^3 (U_1 u_{110} + gh_{110} + gh_{210}) \right. \\
&\quad \left. - (i\sigma)^2 \frac{kU_1^2}{\rho_1 H_1} (H_1 u_{110} + U_1 h_{110}) \right\} \Big) \tag{109}
\end{aligned}$$

$H_1 \ll H_2 \rightarrow \infty$, $u_{110} \gg u_{210} \rightarrow 0$ の場合は

$$\tilde{u}_{11} = \frac{gH_2 s^2}{\tilde{\Delta}} \left[\left\{ (1-\tau)gH_1 - U_1^2 \right\} u_{110} s - (i\sigma) \left\{ \frac{(1-\tau)gH_1 - GU_1^2}{H_1} h_{110} + (1-G)U_1 u_{110} \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(1-\tau)gH_1}}{H_1} \sum_{+,-} \left\{ \frac{\pm\sqrt{1-(2+F_2)G+\frac{9}{4}F_2G^2} + \frac{1}{2}\sqrt{F_2}G}{1-2G} \right. \\
&\quad \times \left. \frac{h_{110} \pm \frac{H_1 u_{110}(1-2G) - \frac{\alpha}{2} U_1 h_{110}}{\sqrt{(1-\tau)gH_1}\sqrt{1-(2+F_2)G+\frac{9}{4}F_2G^2}}}{s+i\sigma \frac{\pm\sqrt{(1-\tau)gH_1}\sqrt{1-(2+F_2)G+\frac{9}{4}F_2G^2} - U_1(1-\frac{3}{8}G)}{(1-\tau)gH_1 - U_1^2}} \right\} \quad (110)
\end{aligned}$$

河口外の潮汐や他の原因で発生する波動が河口から上流に向かう場合には(106), (108), (110)の各式の(+)部分を逆変換し $e^{i\sigma t}$ を乗じてそれぞれの波動の式を導くことができる。即ち

$$(h_1)_i = A \exp(-bx) \exp \left[i\sigma \left\{ t - \frac{x}{a(\sqrt{(1-\tau)gH_1+U_1})} \right\} \right] \quad (111)$$

$$(h_2)_i = T \exp(i\sigma t) - \tau A \exp(-bx) \exp \left[i\sigma \left\{ t - \frac{x}{a(\sqrt{(1-\tau)gH_1+U_1})} \right\} \right] \quad (112)$$

$$(u_1)_i = \frac{\sqrt{(1-\tau)gH_1}}{H_1} P A \exp(-bx) \exp \left[i\sigma \left\{ t - \frac{x}{a(\sqrt{(1-\tau)gH_1+U_1})} \right\} \right] \quad (113)$$

$$(h_1)_i + (h_2)_i = T \exp(i\sigma t) + (1-\tau) A \exp(-bx) \exp \left[i\sigma \left\{ t - \frac{x}{a(\sqrt{(1-\tau)gH_1+U_1})} \right\} \right] \quad (114)$$

ここに

$$A = \frac{1}{2} \left\{ h_{110} + \frac{H_1 u_{110}(1-2G) - U_1 h_{110} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{(1-\tau)gH_1}\sqrt{1-(2+F_2)G+\frac{9}{4}F_2G^2} - U_1(1-\frac{3}{8}G)} \right\} \quad (115)$$

$$T = \tau h_{110} + h_{210} \quad (116)$$

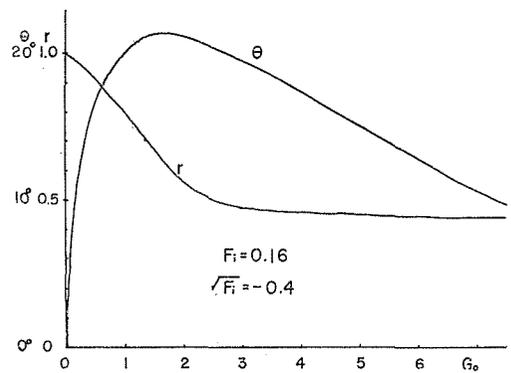
$$P = \frac{\sqrt{1-(2+F_2)G+\frac{9}{4}F_2G^2} + \frac{1}{2}\sqrt{F_2}G}{1-2G} \quad (117)$$

A は淡水層の厚さの振幅, T は潮汐による表面波の振幅, P は淡水流速が二層間摩擦によって低下する割合や, 摩擦のない場合の変動との位相差を与える複素数である。又 a, b は前にも述べたように(104)から誘導されたものである。

(114)は水面の変動を与える式で, 二層間に摩擦応力のない時と同じく表面波は下層が厚い時には他の内部波とは関係なく非常に早い速度で上流に向かうことを示している。(114)の第2項は上層と下層の密度差による内部波が存在するために起る水面の変動であるが, 前節と同様にこの振幅は $1-\tau$ がかかっており, その為に小さい値になるので実際の観測にはかからぬことが多い。淡水の厚さと流速及び塩水層の厚さ等は(104)の式で説明したように周期が長くなる程, 又は二層間の摩擦応力係数が大きくなる程伝播速度はおそくなり, 振幅は波動の進行と共に減少する。又内部波による淡水層と塩水層の厚さの変化は正確に逆位相になっている。これも二層間に摩擦応力のない場合と同じである。

最後に淡水層の厚さとその流速の間の関係について調べてみよう。(113)に見られるよう

に層間摩擦のない時と著るしく異なる点は P という係数が存在することである。これは一般には複素数であって遡上波にあっては G が 0 のとき、即ち摩擦応力係数 k が 0 か又は波動周波数が無限大のときに 1 となり、逆に G の絶対値が無限大のときに $-\sqrt{F_i}$ に等しくなるものである。ここに $\sqrt{F_i} = U_1/\sqrt{(1-r)gH_1}$ であって $U_1 < 0$ であるから $-\sqrt{F_i} > 0$ である。 G が 0 又は ∞ 以外の値のときは複素数となる。つぎに波動伝播速度を考慮した時と同様に $F_i = 0.16$, $\sqrt{F_i} = -0.4$, $G = G_0 i (G_0 > 0)$ として G_0 の変化に対して P がいかに変化するかを調べてみよう。 $P = r e^{i\theta}$ とおくと、 r は流速が変化する時の振幅にかかる係数となり θ は位相角を表わすことになる。 $\theta > 0$ の場合は淡水層の変化に対し位相が前進することになり、 $\theta < 0$ なら逆に後退することになる。 G_0 の値に対し r と θ の変化する状況を調べると第 18 図の如くなる。 $G_0 = 1 \sim 2$ で位相は最もずれており $\theta \approx 21^\circ$ だけ流速は淡水層の厚さに対し位相が進んでいることになる。もし波動周期を 24 時間にとればこれは約 1 時間半に相当する。位相はこれ以上進むことはなく G_0 がさらに増大すると再び減少して $G_0 = \infty$ で 0、即ち同位相となる。しかし $G_0 = \infty$ という場合は第 17 図や (104) から明らかなように、内部波自身の伝播速度が 0 になるからあまり意味はない。以上の議論から判るように周期



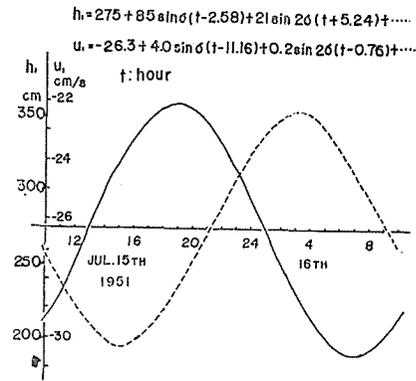
第 18 図

が非常に長い波動に対しては内部波は発生しない。この場合の長い周期とはどの程度のものかという $G_0 = k|U_1|/\sigma\rho_1 H_1$ の大小について考えればよい。表層の厚さ H_1 が非常に薄いときはかなり短い波長のものでも長周期波と同じことになる。天塩川の例をあげると、例えば昭和 26 年 7 月 15~16 日に行なった一昼夜観測の結果を使用すれば、 $H_1 = 275$ cm, $U_1 = 26.3$ cm/sec, 又 k の値は第 3 節で求めた石狩川に於ける値をかりに 0.00067 C.G.S. としてそのまま使用してみると、周期 24 時間 ($\sigma = 2\pi/24 \times 60^2 \text{ sec}^{-1}$) の波動は大體 $G_0 \approx 1$ に相当する。従って第 18 図と照合すれば此の場合には潮汐も前期の意味の長周期の波とは見做し得ない。

以上のこの節の議論は、水面勾配、二層境界面勾配が水平な定常二重水層で上層淡水だけが流速を有し、又塩水層は淡水層に較べて非常に厚く、さらに二層間に摩擦応力の働らいている場合の波動についてなされたものである。しかし第 3 節でも述べた通り、河川は勿論水面勾配を持ち二層境界面も勾配を有するから、この節の結果を実際に適用する為には塩水楔の全長に較べて波長が充分小さく、最小一波長の範囲では水面勾配や二層境界面勾配を無視出来るような内部波についてでなければならない。この点を無視して非常に長い波長のものについて適用する時には、内部波伝播速度のような問題には比較的適合するけれども、一方淡水層の厚さと流速の位相差の如き問題は説明つかぬことがおきてくる。例えば潮汐によって生じた同周期

の内部波を考えよう。前記の天塩川の例にとってみるとその内部波の波長は実に 40 km の長さとして計算される。これに対して塩水楔はこの場合 10 数 km にすぎない。従って淡水の厚さと流速の位相関係がこの節の理論結果と合わないのは当然予期されることである。

一例を示すことにしよう。第 19 図は前記天塩川の一昼夜観測結果から淡水層の厚さと同じく淡水流速の変動を調和解析しその基本波を図示したものである。前にも述べたが天塩近海では一回潮の場合が多く筆者等の天塩川河口近くに於ける多くの観測はほとんど一回潮におけるものであった。従って周期は 25 時間にとる方が近いが観測が 24 時間であったのと、又それ程結果に差がないと思われるので、周期を 24 時間として調和解析してある。この図から明らかのように流速は淡水層の厚さより約 9 時間位相がおくれている。従ってこの観測事実は前節やこの節で考察した理論結果、即ち淡水の厚さと流速は位相差がないか、あるいは二層間摩擦によって位



第 19 図 天塩川の観測結果を調和解析して得た淡水の厚さと流速の関係 (実線 h_1 , 点線 u_1 で基本波のみを示す)

相差が生じてもせいぜい 1 時間半程流速の方が進むという結果と著るしく異なっている。実測結果はむしろ位相が正反対に近い程である。両者の振幅の方を試みに調べてみよう。(113) から明らかのように、淡水層の厚さの振幅に $r\sqrt{(1-r)gH_1}/H_1$ を乗ずれば流速の振幅が計算されることになる。ただし r は $P=re^{i\theta}$ で表わされる P の絶対値に相当し G_0 による変化の様子は第 18 図に示したとうりである。 $G_0 \approx 1$ とすれば $r \approx 0.8$ であり、 $H_1 = 275$ cm とすれば $r\sqrt{(1-r)gH_1}/H_1 \approx 0.21$ となる。淡水層の厚さの振幅は $A = 85$ cm であるから、流速の振幅は $85 \text{ cm} \times 0.21 \text{ sec}^{-1} \approx 18 \text{ cm/sec}$ となる。これは第 19 図の実際の流速振幅 4.0 cm/sec に較べると層間摩擦を無視した前節の計算値よりは近くなったが、まだかなり大きい値である。このようなくちがいも前述のような内部波の波長が非常に長くて基本式の理想化と反した条件になっている事から現れてくるのである。このように内部波の波長が塩水楔よりも充分長い場合はどのように問題を取り扱ったらよいであろうか。それは勿論 (90)~(93) の各式に於いて U_1 , H_1 , H_2 等を一定とせず定常二重水層の説明で示したように x の関数で表わして解を求めればよいのである。しかしそのようにすると式は非線型の非常に複雑な形となって現在の段階では解を得ることが難しい。従って筆者は多少定性的に傾ききらいはあるが問題をつぎのように考える。第 4 節の定常的二重水層の結果にこの節の結果を加味して考察する。第 4 節の (42), (43) はいずれも定常的二重水層における二層境界面の匂配 I_s と水面匂配 I_s とを与える関係式であるが、内部波の波長が塩水楔全長に対して充分長い場合には、内部波による二重水層の変動は波動的な性質よりも定常状態がつぎつぎに変化して行く準静的変化をすると考え方が実

際に近いであろう。天塩川の例の場合、内部波の波長は塩水楔全長よりは長いけれども十分に長いとまでは云えないが、そのような場合には準静的変化に波動的な変動が加わったような現象を呈することになるであろう。

(43)に戻ってみよう。天塩川河口附近では $U_{10}^2 \ll gH_{20}$ が多くの場合成り立つから、 H_{20} を仮りに無限大として取り扱ってみると (43) は

$$I_s = \frac{k \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) U_{10}^2}{(1-\tau)gH_{10} - U_{10}^2} = k \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \frac{F_i}{1-F_i} \quad (118)$$

ただし

$$\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} > 0$$

となる。又 (42) から

$$I_i = - \frac{kU_{10}^2}{\rho_2 \{(1-\tau)gH_{10} - U_{10}^2\}} = - \frac{k}{\rho_2} \frac{F_i}{1-F_i} \quad (119)$$

となるから両式から F_i を消去すると

$$I_s = -(1-\tau) I_i \quad (120)$$

なる関係式を得る。この関係を見れば、落潮期になって水面勾配が急になると境界面の勾配も大きくなり、又 (120) から明らかなように水面勾配に較べて境界面勾配は非常に大きく変化することが判るからある地点の淡水層の厚さ H_{10} は増大する。(118) を時間で微分すると

$$\frac{dI_s}{dt} = k \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \frac{\frac{dF_i}{dt}}{(1-F_i)^2} \quad (121)$$

を得るから、落潮期には $dI_s/dt > 0$ であるから、 F_i は増加する。又 $F_i = U_{10}^2 / \{(1-\tau)gH_{10} - U_{10}^2\}$ であるので F_i と H_{10} の増加により必然的に U_{10} の絶対値が増加せねばならない。従ってこのような準静的変化を考えると、 U_{10} が負の値を持つことを考慮すれば淡水層の厚さと流速は逆位相になることが理解され、結局一回潮の振動に対しては 12 時間の位相差が現れることになる。天塩川のように準静的な変化ばかりでなく波動性が増加するときは層間摩擦によって流速の位相が進む為に流速は厚さより 12 時間以上進み、逆に見方を変えれば淡水の厚さは淡水流速より 12 時間以下の位相の進みが観測されることになる。天塩川の実測結果に現れた淡水の厚さが淡水流速より約 9 時間位相が進んでいる事実は、このように二重水層の準静的変化と波動性を考慮することによって定性的に理解出来るのである。日本の多くの大河川では塩水楔の長さは潮汐による内部波の波長に対し短かい場合が多いと考えられるから潮位変化に対して淡水の厚さはほぼ逆位相の変化をし、流速の絶対値について観測すれば淡水の厚さの変化よりいくらか進んだ変化をするであろう事が予想される。水面勾配や境界面勾配を無視し二層間摩擦も省略した場

合の第5節の如き結果から、以上のような観測事実と反する説明をしている報告があるが⁴⁸⁾、そのような場合は淡水層の厚さや流速が非常に小さくてその為に内部波進行速度が相当におそく塩水楔の長さにと比べて内部波の波長がはるかに小さいような場合に相当するものと考えられる。しかし石狩川や天塩川のように濁水期でもかなりの淡水流量を有し、その厚さもかなり厚い河川ではこのような場合はほとんど考えられない。

この節では層間の摩擦を考慮した場合の振動を論じたが、摩擦のない場合に較べて、表面波は変わらず、内部波は摩擦応力係数や内部波自身の周期が大きくなれば伝播速度と振幅が減衰するが、淡水の厚さや塩水の厚さあるいは水位変化の位相等の相互関係は変わらないこと、しかし淡水の厚さと流速の関係は大分事情が異なり、流速変化の位相が厚さの変化より進むことを示した。さらに実際の観測では淡水の厚さと流速の関係はこの結果と異なることを述べ、この原因は潮汐による内部波波長が塩水楔よりも長いことにあると考え、準静的な二重水層の変化を考慮する方が実際に近いことを論じ、これに此の節の結果を加味して現象を定性的に説明したのである。最後の問題は方程式の複雑さから定性的な解釈をするに止まったが、これを定量的に解決して行く事は二重水層の一つの大きな研究方向になるものと考えられる。

7. 二層間の塩分拡散の一考察

二重水層の淡水層は下層塩水から塩分が供給され、下流に行くに従って塩分濃度が増大する^{49),50)}。二層間に内部波が発達するとその波高の増大に伴って波頂がくずれ、その部分の塩水は淡水中に放出されて淡水中の塩分濃度を高める。これは波長の短い内部波程起こり易いと想像される。淡水中に混じた塩分は淡水中の渦動拡散現象によって拡がり、下流に行く程水面でも塩分が認められるようになって又それが増大する。下層から上層へ塩分が移動する際にその移動速度にはつぎの実験公式

$$w_m = C(u - 1.15 u') \quad (122)$$

が提唱されている⁵¹⁾。 w_m は上層への移動速度で、 u は上層の流速、 u' は拡散が始まる限界流速である。模型実験では $C \approx 3.5 \times 10^{-4}$ とされている。一般に $u \gg u'$ であって $w_m \approx Cu$ とおくことによって上層塩分の増加は上流から河口に向かって指数関数的に増加するという結果を得た研究もある^{52),53)}。この場合には上層淡水中に混入した塩分がすぐ鉛直方向に拡がって水面でも境界面近くでも同一濃度になるような模型を考えている。淡水層中の塩分濃度の鉛直分布は別に考慮されていない。 C の値は実験室での値と実地観測の結果から逆算した値とでは非常に大きな差があり、実際の場合の方がはるかに小さい。これはおそらく両者の内部波の条件が異なる為ではないかと思われる。

淡水層中の塩分の鉛直分布実測結果から石狩川における淡水中の渦動拡散係数を算出した研究があるが⁵⁴⁾これによると二層境界面ではその値が非常に小さい。この事は二層間の質量交換が極めて小さいことを意味している。筆者は石狩川で行なった実測結果をもとにして淡水層

中の塩分分布に関し全く別の見地から現象の側面を展望して二層間の質量交換の小さい事を示してみたいと思う。

下層から上層への塩分拡散は塩水楔の先端から始まるであろう。第20図にこのような場合の理想化された模型を図示する。

上層の鉛直拡散係数を便宜上一定として A_y 、淡水流速も一定としてこれを U 、塩分濃度を C 、塩水層の塩分濃度を C_0 とすれば、定常状態の淡水中の塩分濃度には下記の方程式が成り立つであろう。

$$U \frac{\partial C}{\partial x} = A_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (123)$$

境界条件は

$$\begin{cases} x \geq 0, y = 0 & \text{で } C = C_0 \\ x = 0, y > 0 & \text{で } C = 0 \end{cases}$$

と考えてよい。

C は x と y との関数であるが、これを x について Laplace 変換したものを \tilde{C} とすれば (123) は

$$\begin{aligned} U(s\tilde{C} - 0) &= A_y \frac{d^2 \tilde{C}}{dy^2} \\ \therefore \frac{d^2 \tilde{C}}{dy^2} &= \frac{Us}{A_y} \tilde{C} \end{aligned}$$

となる。解は

$$\tilde{C} = A e^{\sqrt{\frac{Us}{A_y}} y} + B e^{-\sqrt{\frac{Us}{A_y}} y}$$

である。 $y \rightarrow \infty$ で C は有限の値を持たねばならぬから C の L-変換 \tilde{C} も $y \rightarrow \infty$ で有限である必要がある。従って $A=0$ でなければならない。

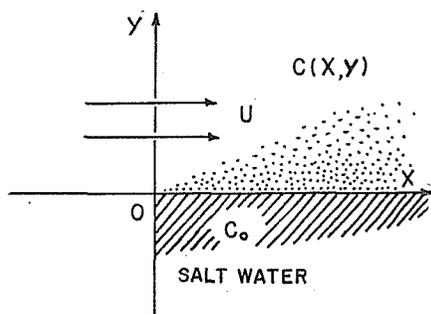
$$\therefore \tilde{C} = B e^{-\sqrt{\frac{Us}{A_y}} y} \quad (124)$$

となる。 $y=0$ で $C=C_0$ であるから、 $y=0$ で $\tilde{C}=C_0/s$ である。

$$\therefore \tilde{C} = \frac{C_0}{s} e^{-\sqrt{\frac{Us}{A_y}} y} = \frac{C_0}{s} e^{-\sqrt{\frac{Uy^2}{A_y}} \sqrt{s}} \quad (125)$$

しかるに一般に

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s} e^{-k\sqrt{s}} \right) = \operatorname{erfc} \left(\frac{k}{2\sqrt{x}} \right)$$



第20図 塩分拡散の理想化された模型

である⁵⁵⁾。 \mathfrak{G}^{-1} は逆変換を表わす。故に (125) を逆変換すれば

$$\begin{aligned} C &= C_0 \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{Uy^2}{A_y}} / 2\sqrt{x} \right) \\ &= C_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\frac{Uy^2}{4A_y x}}} e^{-\theta^2} d\theta \right) \end{aligned} \quad (126)$$

を得る。(126) が求める解であるがつぎのように書き代える。 $\theta = t/\sqrt{2}$ とおいて

$$1 - \frac{C}{2C_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{Uy^2}{2A_y x}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (127)$$

を得る。

さてここで横軸に等分目盛り、縦軸に確率目盛りを刻んで作られている正規確率紙の横軸に y を、縦軸に $1 - \frac{C}{2C_0}$ をとれば U, A_y が一定ならば (127) は直線にならなければならない。

淡水中の塩分濃度 C とその電気比抵抗 ρ との間には

$$\log \rho = \Gamma - \log C$$

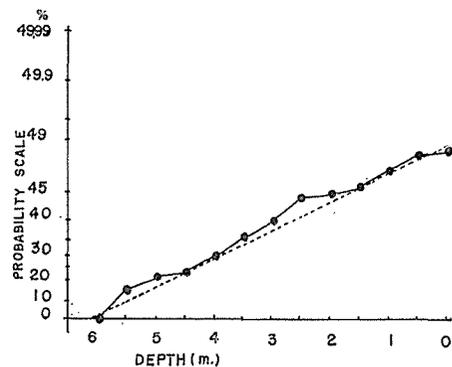
が近似的に成り立つ⁵⁶⁾。 Γ は温度によって変化する常数である。さらに ρ と、一つの電極を使用して測定した抵抗値 R との間には $\rho \propto R$ が成り立つから $C = C_0$ のとき $\rho = \rho_0, R = R_0$ とすれば

$$\frac{C}{C_0} = \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{R_0}{R}$$

を得る。従ってこの関係を (127) に代入し、さらに式を整頓すれば

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{R_0}{R} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{\frac{Uy^2}{2A_y x}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (128)$$

を得る。従って R_0, R, y を実測し、確率紙の上部半分を使用して $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{R_0}{R} \right)$ を縦軸に、 y を横軸にとってその直線性を調べることにより、 U/A_y の一様性を検定することができる。一例を示そう。第 21 図は昭和 33 年 8 月 4 日午前 11 時に石狩川河口から 1 km 上流の地点で測定した結果を上記のように確率紙上に画いたもので比較的直線的な結果を得ている。流速 U は一般に鉛直分布を有し、表面又はその近くで最大で鉛直下方に向かって減少するのであるから、この時の結果は拡散係数が比較的流速分布に比例して水面近くで大きく下方に向かって次第に減少するような分



第 21 図 石狩川における塩分実測結果
昭和 33 年 8 月 4 日 11 時、河口から 1 km 上流、 $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{R_0}{R} \right)$ を確率目盛上に、深度を等分目盛上にとつたもの。

布をしていたと考えることができる。しかし第21図のように直線的になることは実はごくまれな現象に属し、実際はそうならないのが普通である。第22図に数例を示すことにしよう。これによると二層境界面附近（縦軸0%に相当する部分）ではその勾配が急峻でそれから上の層（図では右方）に行くに従って著しく勾配がゆるやかになるのが普通である。流速は境界面附近では一般に小さくなるが、この図で境界面附近の勾配が急峻なことは U/A_z が大きい事を表わしているので A_z は流速が小さくなる割合以上に、上から境界面に近づくに従って急速に小さくなることを示していることになる。即ち境界面では拡散係数が極めて小さいことを示すものである。これは既往の幾つかの研究結果と一致している⁵⁷⁾。

この節の本筋からはややはずれるが第22図をさらに注意して観察すると興味ある現象が見られる。境界面から上層の勾配のゆるやかな部分は勾配がそれぞれ異なるいくつかの直線から成り立っている。従って上層の淡水中には塩分傾度を異にする流れが層状に重なっていることが推察される。一般に二層間の質量交換が発達してくると中間層と称して塩分傾度のゆるやかな部分が二層の間に生じてくる。この図は中間層のような部分が層状になって存在していることを示している。

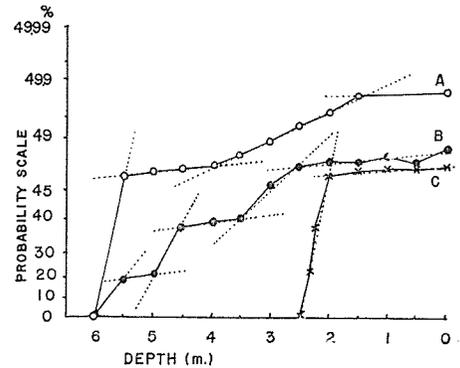
この節の始めに誘導した方程式は U , A_y を一定（又はその比が一定）として解かれたが、実際には U も、 A_y も一定ではなくて鉛直分布を持ち、特に実測値を確率紙上で調べた結果では二層境界面附近で渦動拡散係数 A_y が非常に小さいことが導かれ、二層の間の塩分あるいは質量の交換がこれ又非常に少ないものであることが結論出来る。しかしこの方式から塩分拡散を定量的に取り扱うことは難しいので以上の定性的な解析だけにとどめる。

8. 結 語

論文の冒頭に述べた如く、世界各国の河口二層流の研究は現在かなり活潑になっているが現象自体の構造が複雑な為に未解決の問題は非常に多い。とくに非定常状態の研究は少なく現象の実体がよく判っていない。この論文の大きな目的は潮汐や他の原因による二層流の周期変動を実測と理論的考察から理解することであって非定常の問題に一つの足がかりをつけるものである。

最後に論文の要旨を節を追って簡単にとりまとめよう。

第1節では河口の特殊性について述べ、二重水層の一般的な形態や性質を記述した。第2



第22図 確率紙上に示した塩分分布

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{R_0}{R} \right) \text{ と深度}$$

A: 石狩川河口上流 1 km, 昭和 33 年 8 月 4 日 10 時。B: 石狩川河口上流 1 km, 昭和 33 年 8 月 5 日 8 時。C: 天塩川河口上流 300 m 昭和 31 年 7 月 14 日 19 時。

節では二重水層の流体力学的な研究に必要な基本運動方程式を誘導した。第3節では河口の淡水流出に当っては interfacial Froude number が1となる条件によって淡水流が制御され、さらに潮汐によってその値が1を中心として周期的変動をすることを誘導し実測から裏付けた。第4節では定常状態の二重水層の、特に水面勾配や二層境界面勾配について理論結果と実測とからその性質を考察した。第5節では基本運動方程式から二重水層には上流又は下流に向かって伝播する表面波と内部波が存在することを導き、表面波は二層の密度差がない場合の重力波と同じ性質で、内部波は二層に密度差があるために存在しその速度は淡水流速や淡水の厚さから主として決まり、表面波に較べておそいことを述べそれぞれ実測と照合した。第6節では二層間に摩擦力がある場合に第5節の波動がどのように変るかについて考察し、内部波の減衰や位相のずれは二層間の摩擦応力係数や内部波自身の周期が関係することを述べ、さらに潮汐による二層の振動は、潮汐による内部波の波長が塩水楔の長さに較べて長くなる時にはこの節の波動に対する理論結果よりも定常状態の準静的な変化として考える方が適當であることを述べ実測結果をもとにして議論を行なった。第7節では下層から上層へ混入した塩分の鉛直濃度分布について理想化した二重水層の模型を設定して理論的分布を誘導し、淡水流速と拡散係数の比の一様性を正規確率紙上で検定する方法を述べ、さらに塩分濃度によって変る水の電気抵抗の実測値にこの方法を適用して二層境界面附近の拡散係数が著しく小さいことを示した。

論文を終るに当ってこの研究を始めた昭和26年以来現在まで終始御懇篤な御指導と御激励をいただいた北海道大学工学部福島久雄教授に深く感謝の意を表するものである。

文 献

- 1) 福島久雄：石狩川河口の観測，日本海洋学会誌，第1巻，第1号，昭和17年5月。
- 2) 福島久雄：河口二重水層に於ける渦動拡散について，北大工学部研究報告，第12号，昭和30年6月。
- 3) 柏村正和：河口に於ける二重水層 (1)，北大工学部研究報告，第15号，昭和31年12月。
- 4) 柏村正和：天塩川河口の二重水層，昭和26~31年天塩港調査報告，昭和34年6月。
- 5) 福島久雄，柏村正和，八鍬功，高橋将：石狩川塩水楔の遡上，北大地球物理学研究報告，第7号，昭和35年3月。
- 6) Stommel, H.: The Role of Density Currents in Estuaries, Proc. Minnesota Int. Hyd. Conv., Sept. 1953
- 7) Maximon, L. C. & Morgan, G. W.: A Theory of Tidal Mixing in a Vertically Homogeneous Estuary, J. Mar. Res. Vol. 14, No. 2.
- 8) Schijf, J. B. & Schönfeld, J. C.: Theoretical Consideration on the Motion of Salt and Fresh Water, Proc. Minnesota Int. Hyd. Conv. Sept., 1953.
- 9) Farmer, H. G. & Morgan, G. W.: The Salt Wedge, Proc. 3rd Conf. Coast. Eng., 1952.
- 10) Farmer of Morgan: 9)と同じ。
- 11) 浜田徳一，堀口孝男：塩水楔の性質について，第7回海岸工学講演集，1960。
- 12) 福島：2)と同じ。
- 13) Otsubo, K. & Fukushima, H.: Density Current in a River Mouth with a Small Tidal Range, Proc. I.A.H.R. 18th Congress, Aug., 1959.
- 14) 堂腰 純：かんがい排水障害調査，北海道，昭和32年。

- 15) Stommel: 6)と同じ.
- 16) 市栄 登: Estuary の水理について, 第2回海岸工学講演集, 1955.
- 17) 堂腰 純: 14)と同じ.
- 18) 堂腰 純: 石狩川河口の密度流 (その3) 水理研究会予稿, 昭和34年6月.
- 19) 福島, 他: 5)と同じ.
- 20) Farmer & Morgan: 9)と同じ.
- 21) 野満隆治: 河川学, p. 102.
- 22) Jeffreys, H.: On the Formation of Water Waves by Wind, Proc. Roy. Soc. Ser. A, Vol. 17, No. A 742, 1925.
- 23) Stommel: 6)と同じ.
- 24) Stommel, H. & Farmer, H. G.: Abrupt Change in Width in Two-Layer Open Channel Flow, J. Mar. Res., Vol. XI, No. 2, 1952.
- 25) Otsubo & Fukushima: 13)と同じ.
- 26) 福島, 他: 5)と同じ.
- 27) 柏村: 4)と同じ.
- 28) Farmer & Morgan: 9)と同じ.
- 29) 浜田, 他: 11)と同じ.
- 30) von Kármán, T.: The Engineer grapples with Non-Linear Problems, Bull. Am. Math. Soc., 46, 1940.
- 31) Ketchum, B. H.: Circulation in Estuaries, Proc. 3rd Conf. Coast. Eng., Oct., 1952.
- 32) Stewart, R. W.: A Note on the Dynamic Balance in Estuarine Circulation, J. Mar. Res., Vol. 16. No. 1, 1957.
- 33) 柏村: 4)と同じ.
- 34) Pritchard, D. W.: Salinity Distribution and Circulation in the Chesapeake Bay Estuary System, J. Mar. Res., Vol. XI, No. 2, 1952.
- 35) 柏村: 3)と同じ.
- 36) 福島: 2)と同じ.
- 37) 浜田, 他: 11)と同じ.
- 38) Otsubo & Fukushima: 13)と同じ.
- 39) 柏村: 4)と同じ.
- 40) Lamb, H.: Hydrodynamics 6th ed. p. 370.
- 41) Sverdrup, H. U., Johnson, M. W. & Fleming, R. H.: The Oceans, p. 586.
- 42) Prandtl, L.: The Essentials of Fluid Dynamics, p. 369.
- 43) Sverdrup & Others: 41)と同じ, p. 592.
- 44) 柏村: 4)と同じ.
- 45) 野満: 21)と同じ, p. 101.
- 46) Schijf & Schönfeld: 8)と同じ.
- 47) 柏村: 4)と同じ.
- 48) 市栄: 16)と同じ.
- 49) 福島: 2)と同じ.
- 50) Otsubo & Fukushima: 13)と同じ.
- 51) Keulegan, G. H.: Interfacial Instability and Mixing in Stratified Flows, J. Res. Nat. Bur. Stand., Vol. 43, Nov. 1949.
- 52) 市栄: 16)と同じ, 又は Otsubo & Fukushima: 13)と同じ.
- 53) Otsubo & Fukushima: 13)と同じ.
- 54) 福島: 2)と同じ.
- 55) Churchill, R. V.: Operational Mathematics, 2nd ed., p. 328.
- 56) 八鍬 功: 天塩川河口附近の濁度について, 天塩港調査報告, 昭和34年6月.
- 57) 福島: 2)と同じ.