



# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	静電界集束電子ビームにおけるヘリトロン波 : 分散特性とパワーについて
Author(s)	桜庭, 一郎; Sakuraba, Ichiro
Citation	北海道大學工學部研究報告, 29, 17-23
Issue Date	1962-03-31
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/40695">https://hdl.handle.net/2115/40695</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	29_17-24.pdf



# 静電界集束電子ビームにおけるヘリトロン波

— 分散特性とパワーについて —

桜庭 一郎\*

(昭和36年10月31日受理)

## The Helitron Waves on a Filamentary Electrostatic Electron Beam, especially on Dispersion Curves and Kinetic Power Flow

Ichiro SAKURABA

### Abstract

In this paper, a normal mode analysis of an E-type filamentary electron beam is presented. This beam was focused by introducing a potential difference between two concentric cylinders with an electron tracing the path of a helix between cylinders.

The normal mode analysis developed in this paper yielded the following interesting results :

- 1) The space charge wave on this beam was named "helitron wave"
- 2) Two helitron mode amplitudes were defined as follows ;

$$a_{\pm} = (U \pm Z_0 K) / 4\sqrt{Z_0}$$

where  $a_+$  = mode amplitude of the fast helitron wave

$a_-$  = mode amplitude of the slow helitron wave

$U$  = Chu's kinetic voltage,  $-(m/e)vu_0$

$v$  = transverse velocity of the electrons in the beam

$u_0$  = drift velocity

$K$  = effective transverse current caused by the displacement of the electron beam from  $dc$  value

$Z_0$  = characteristic beam impedance for the small-signal quantities of the helitron wave.

- 3) It was shown that the  $a_+$  mode, the fast helitron wave, travels with a phase velocity slightly greater than the drift velocity, whereas the  $a_-$  mode the slow helitron wave, travels with a phase velocity slightly less than the drift velocity.
- 4) It was shown that the helitron wave carries positive kinetic power, whereas the slow helitron wave carries negative kinetic power.

---

\* 電子工学科

## 1. 緒 言

最近電子ビームを用いたパラメトリック増幅器の研究が盛である。すなわち O 形電子ビームをポンプ波で励振しその非直線性を用いたり、また M 形電子ビームに含まれるサイクロトロン波を用い横方向高周波界との相互作用より生ずる非直線を利用するのなどが開発されつつある。これらの利点はいずれも電子ビームの速度雑音および電流雑音に影響されない低雑音特性にあり、宇宙通信用として期待されている。とくにこれらのパラメトリック増幅では増幅に必要なエネルギーがポンプ周波より加えられるから、正のエネルギーを持つ電子ビームの早い空間電荷波の増幅が可能となり、負のエネルギーを持つ遅い空間電荷波を用いた通常の進行波増幅作用と大いに異なる点である<sup>1)</sup>。

しかるに O 形および M 形はともに集束用磁界装置を必要とする。したがってこれに要する設備が大きなものとなり小形軽量を必要とする宇宙通信や航空機用としてかなりの難点となる。磁界を必要としない集束形式にはいくつか考えられるが、周期静電界装置を用いたり<sup>2)</sup>、ハリス集束法<sup>3)</sup>を利用する電子管は、ともに縦方向高周波界を用いる点 O 形電子管である。また横方向高周波界を用いる E 形電子管<sup>4)-7)</sup>は M 形に対応するものであり、サイクロトロン波と類似な空間電荷波が存在することが予想せられる。

最近 E 形の電子ビームにおいて二つの位相速度を持つ波が存在することが指摘<sup>8)</sup>されたが分散特性や各波のパワーが明らかにされていない。故に本論文ではこれらの空間電荷波を早いヘリトロン波と遅いヘリトロン波と呼ぶことを提案する<sup>9),10)</sup>とともに各波の分散特性とカインテック・パワーを与え E 形電子管の雑音特性を検討するのに必要な基本的性質を明らかにしたものである。

## 2. 空間電荷波方程式

E 形電子管のような静電界集束をうけている走行空間について考察する。Fig. 1 の如く一定電位差が与えられている同心円筒状電極で形成せられた走行空間で電子ビームが  $z$  方向に一様なドリフト速度  $u_0$  で進むとき、電子ビームを構成する電子は時計方向にある角周波数  $\omega_h$  で回転しピッチ角  $\phi$  のらせり運動をする<sup>7),8)</sup>。この際 1 個 1 個の電子に対する運動方程式は

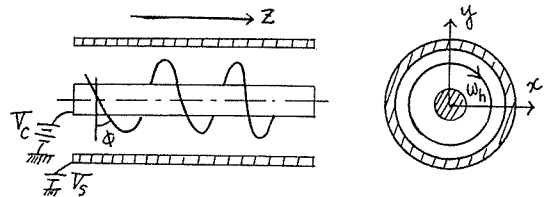


Fig. 1. Configuration for an electrostatic drift space.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \eta V_0 \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \eta V_0 \frac{y}{x^2+y^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \frac{dz}{dt} = \sqrt{\eta V_0} \tan \phi \right\}$$

ここで

$$\eta = 1.759 \times 10^{11} \text{ c/kg}$$

$$V_0 = (V_c - V_s) / \ln(s/c), \quad V_c > V_s$$

$V_s$  = 外部導体と大地間の電位差

$V_c$  = 内部導体と大地間の電位差

$s, c$  = それぞれ外部導体, 内部導体の半径

いま小信号理論により  $x, y$  および  $z$  を

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + x_1 \\ y &= y_0 + y_1 \\ z &= z_0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

とおく。ここで添字 0 は直流値を, 添字 1 は交流値を示す。したがって電子の平衡半径は  $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$  で与えられる。式(2)を式(1)に代入し交流分について運動方程式を求めると

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + 2\omega_h^2 x_1 &= 0 \\ \frac{d^2 y_1}{dt^2} + 2\omega_h^2 y_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

となる。ここで  $\omega_h = \sqrt{\eta V_0 / (x_0^2 + y_0^2)}$  で与えられ, ヘリトロン角周波数と呼ぶことにしよう。これが E 形電子管における空間電荷波の性質を決定する基本方程式である。いま式(3)を書き換えて

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_{1x}}{dt} + 2\omega_h^2 x_1 &= 0 \\ \frac{dv_{1y}}{dt} + 2\omega_h^2 y_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= v_{1x} \\ \frac{dy_1}{dt} &= v_{1y} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

つぎにカイネティック電圧  $U_x, U_y$  および電子ビームの横方向の変位に基づく見掛けの変位電流<sup>11)</sup>  $K_x, K_y$ ,

$$\left. \begin{aligned} U_x &= -eu_0 v_{1x} / m \\ U_y &= -eu_0 v_{1y} / m \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} K_x &= j\omega\sigma_0 x_1 \\ K_y &= j\omega\sigma_0 y_1 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

を考える。ここに  $\sigma_0$  は横方向の電子ビームの単位面積あたりの電荷である。故に全電子ビー

ム電流 (直流値)  $I_0$  との間には

$$|I_0| = -\sigma_0 u_0 \quad (8)$$

の関係がある。 $(\sigma_0$  は負値に留意) さらにカイネティック電圧と変位電流について

$$\left. \begin{aligned} 2U &= U_x + jU_y \\ 2K &= K_x + jK_y \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

の量を考える。式(6), (7), (8)および(9)を用いて方程式(4)と(5)を書き改めると

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{d}{dz} + j\beta_e \right) U &= -j \frac{2\omega_h^2 m}{\omega e \sigma_0} K \\ \left( \frac{d}{dz} + j\beta_e \right) K &= -j \frac{\omega \sigma_0 e}{m u_0^2} U \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

を得る。ここで  $\beta_e = \omega/u_0$ 。つぎにモード振幅に上式を變形しよう。いまモード振幅を

$$a_{\pm} = \frac{1}{4\sqrt{Z_0}} (U \pm Z_0 K) \quad (11)$$

のようにおく。ここで  $Z_0$  は E 形電子ビームの特性インピーダンスで

$$Z_0 = \frac{2V_0}{|I_0|} \frac{\sqrt{2} \beta_h}{\beta_e} \quad (12)$$

で与えられる。ここで  $\beta_h = \omega_h/u_0$ 。式(10), (11)と(12)から正規化されたモード振幅で示された空間電荷波の方程式は

$$\left\{ \frac{d}{dz} + j(\beta_e \mp \sqrt{2} \beta_h) \right\} a_{\pm} = 0 \quad (13)$$

となる。したがってこの解は

$$\left. \begin{aligned} a_{\pm(z)} &= a_{\pm(0)} \exp(-j\beta_{\pm} z) \\ &= a_{\pm(0)} \exp\{-j(\beta_e \mp \sqrt{2} \beta_h) z\} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

で与えられる。故に  $U$ ,  $K$  については, 式(11)を利用して

$$\left. \begin{aligned} U &= 2\text{Re} \left\{ \sqrt{Z_0} (a_{+(z)} + a_{-(z)}) e^{j\omega t} \right\} \\ K &= 2\text{Re} \left\{ \frac{1}{\sqrt{Z_0}} (a_{+(z)} - a_{-(z)}) e^{j\omega t} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

を得る。

### 3. 分散特性

前述の式(13)あるいは(14)からそれぞれのモード振幅の位相速度は

$$v_{\pm} = \frac{\omega}{\beta_e \mp \sqrt{2} \beta_h} = \frac{u_0}{1 \mp (\sqrt{2} \omega_h/\omega)} \quad (16)$$

で与えられる。この結果  $a_+$  モードはドリフト速度  $u_0$  よりわずかに早い位相速度を持ち,  $a_-$

モードはドリフト速度  $u_0$  よりわずかに遅い位相速度を持つことを知る。したがって  $a_+$  モードを早いヘリトロン波,  $a_-$  モードを遅いヘリトロン波と呼ぶことにしよう。またこれらの群速度は

$$v_{g\pm} = \left( \frac{\partial \beta_{\pm}}{\partial \omega} \right)^{-1} = u_0 \left( 1 \mp \frac{\partial \sqrt{2} \omega_k}{\partial \omega} \right)^{-1} = u_0 \quad (17)$$

したがってこれらのモードの分散特性は Fig. 2 となる。この図において, 早いヘリトロン波は  $\omega > \sqrt{2} \omega_k$  で  $v_{p+} > u_0$  で前進波であり,  $0 < \omega < \sqrt{2} \omega_k$  のときは  $v_{p+} < 0$  で後進波となる。  $\omega = 0$  なら  $v_{p+} = 0$  となり,  $\sqrt{2} \omega_k$  に近づくと負の無限大となる。一方  $\omega$  を反射側より近づけると  $v_{p+}$  は正の無限大になる。

遅いヘリトロン波は  $u_0$  より小さく前進波である。

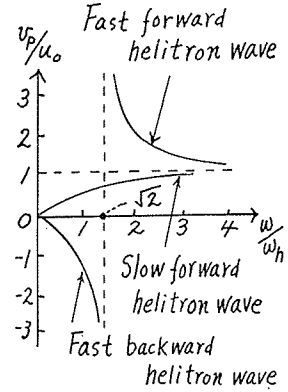


Fig. 2. The helitron mode dispersion curves.

#### 4. ヘリトロン波のカイネテック・パワー

ヘリトロン波によって  $+z$  方向に運ばれるカイネテック・パワーは

$$P_k = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [UK^*] \quad (18)$$

で計算されるが, 上式に式(15)を代入すれば

$$P_k = 2(|a_+|^2 - |a_-|^2) \quad (19)$$

となる。これから早いヘリトロン波  $a_+$  は正のパワーを運び, 遅いヘリトロン波  $a_-$  は負のパワーを運ぶことを知る。これらの結果は, 通常の O 形電子ビームの早い空間電荷波や M 形の早いサイクロトロン波が正のパワーを運び, O 形の遅い空間電荷波と M 形の遅いサイクロトロン波が負のパワーを運ぶことに対応することを知る。

つぎにこのカイネテック・パワー  $P_k$  が  $z$  に無関係なことは式(19)を  $z$  に関して微分し, 式(13)およびその共役値を代入すれば

$$\frac{dP_k}{dz} = 0 \quad (20)$$

となり  $P_k$  すなわち E 形電子ビームによって運ばれる全パワー<sup>11)</sup> が一定であることを知る。

故に早いヘリトロン波のみ励振するには, カイネテック・パワーを電子ビームに与えねばならず, 遅いヘリトロン波のみ励振するためには電子ビームからカイネテック・パワーを取り出さねばならないことを知る。

#### 5. サイクロトロン波とヘリトロン波

これまでの解析により E 形電子管のような静電集束下における電子ビームにおいて, 早

いへリトロン波と遅いへリトロン波が存在し、それらの分散特性とパワーが明らかにされたが現在低雑音特性を得る目的から注目されている早いサイクロトロン波および遅いサイクロトロン波と比較すれば Table 1 となり多くの類似点があるのを知る。

Table 1. Comparison of cyclotron waves and helitron waves.

	Cyclotron Waves		Helitron Waves	
Equations of Motion	$\begin{aligned} d^2x/dt^2 &= \omega_c(dy/dt) \\ d^2y/dt^2 &= -\omega_c(dx/dt) \\ dz/dt &= \sqrt{2\eta}V_0 \end{aligned}$		$\begin{aligned} d^2x/dt^2 &= \omega_h^2x \\ d^2y/dt^2 &= \omega_h^2y \\ dz/dt &= \sqrt{\eta}V_0 \tan \phi \end{aligned}$	
Small-Signal Assumption	$x = x_0 + x_1, \quad y = y_0 + y_1, \quad z = z_0$			
Space Charge Wave Equations	$\begin{aligned} d^2x_1/dt^2 - \omega_c(dy_1/dt) &= 0 \\ d^2y_1/dt^2 + \omega_c(dx_1/dt) &= 0 \end{aligned}$		$\begin{aligned} d^2x_1/dt^2 + 2\omega_h^2x_1 &= 0 \\ d^2y_1/dt^2 + 2\omega_h^2y_1 &= 0 \end{aligned}$	
Mode Amplitudes	$a_{\pm} = (U_{\pm} \pm jU_{\gamma})$ $Z_0 = (2V_0/ I_0 )(\beta_c/\beta_e)$		$a_{\pm} = (U \pm Z_0K)/4\sqrt{Z_0}$ $U = U_x + jU_y$ $K = K_x + jK_y$ $Z_0 = (2V_0/ I_0 )(\sqrt{2}\beta_h/\beta_e)$	
Normal Mode Form of Wave Equations	$\{d/dz + j(\beta_e \mp \beta_c)\} a_{\pm} = 0$		$\{d/dz + j(\beta_e \mp \sqrt{2}\beta_h)\} a_{\pm} = 0$	
Space Charge Waves	Fast Cyclotron Wave	Slow Cyclotron Wave	Fast Helitron Wave	Slow Helitron Wave
Phase Constants	$\beta_+ = \beta_c - \beta_e$	$\beta_- = \beta_c + \beta_e$	$\beta_+ = \beta_c - \sqrt{2}\beta_h$	$\beta_- = \beta_c + \sqrt{2}\beta_h$
Phase Velocities	$V_{p+} = u_0/1 - (\omega_c/\omega)$	$V_{p-} = u_0/1 + (\omega_c/\omega)$	$V_{p+} = u_0/1 - (\sqrt{2}\omega_h/\omega)$	$V_{p-} = u_0/1 - (\sqrt{2}\omega_h/\omega)$
Group Velocities	$V_{g+} = u_0$	$V_{g-} = u_0$	$V_{g+} = u_0$	$V_{g-} = u_0$
Sign of Kinetic Power	+	-	+	-
Remarks	$\omega_c = \text{cyclotron angular frequency, } \eta B$ $\beta_e = \omega/u_0, \quad \beta_c = \omega_c/u_0, \quad \omega = \text{signal frequency}$		$\omega_h = \text{helitron angular frequency, } \sqrt{\eta}V_0/(x_0^2 + y_0^2)$ $\beta_h = \omega_h/u_0, \quad u_0 = \text{drift velocity}$	

しかし M 形電子ビームは周知のように磁界を必要とするが、E 形では磁界が不要であり、しかもこのような空間電荷波が得られることは、小形軽量を必要とする宇宙通信用や航空機用として秀れたものと考えられる。

## 6. 結 言

以上の解析の結果、E 形電子ビームにおける次の諸性質が与えられた。すなわち

1. 位相速度がドリフト速度よりわずかに大きい空間電荷波と、わずかに小さい空間電荷波が存在し、これらをそれぞれ早いへリトロン波、遅いへリトロン波と呼ぶことを提案した。

2. 各ヘリترون波の分散特性を明らかにした。
3. 各ヘリترون波のカイネテック・パワーを求めた。
4. サイクロトロン波とヘリترون波の特性を比較した。

おわりに御指導戴く浅見教授，応用電気研究所研究会で御討論下さった方々に深く感謝する。

#### 参 考 文 献

- 1) 斎藤成文：通信学会誌，**44**-606 (昭36-4).
- 2) 桜庭一郎・大類隆三：33年連大，954 (昭33-5).
- 3) Chernov, Z. S.: International Conv. of Microwave Valves (1958-5).
- 4) Heffner, H., Watkins, D. A.: P.I.R.E., **43**-1007 (1955-8).
- 5) Watkins, D. A., Wada, G.: P.I.R.E., **46**-1700 (1958-10).
- 6) Wada, G., Pantell, R. H.: I.R.E. WESCON, Pt. 3 (1959).
- 7) Pantell, R. H.: I.R.E. Trans. ED-7 (1960-1).
- 8) Pantell, R. H.: I.R.E. Trans. ED-8 (1961-1).
- 9) 桜庭一郎：36年支部連大，B. 3 (1961-10).
- 10) 桜庭一郎・青山邦昭：36年支部連大，B. 4 (1961-10).
- 11) Saito, S.: P.I.R.E. **48**-969 (1961-5).