



# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	中空翼型断面を持つ棒の振り (第1報)
Author(s)	岸田, 路也; Kishida, Michiya
Citation	北海道大學工學部研究報告, 32, 153-164
Issue Date	1963-10-31
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/40711">https://hdl.handle.net/2115/40711</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	32_153-164.pdf



# 中空翼型断面を持つ棒の振り (第1報)

岸 田 路 也

## Torsion of Tubes Having Aerofoil Sections

Michiya KISHIDA

### Abstract

The torsion problems of bars with aerofoil sections have been solved by several investigators. However, the methods set forth are too complicated and involved on account of intricate configurations.

The present method avoids such complicated calculations by means of an application of the conformal transformation (or conformal mapping). That is, the function  $z=w(\zeta)$  that relates one circle in the  $\zeta$ -plane to one desirable contour in the  $z$ -plane is given. Thus the problem becomes an analysis concerning the circle in the  $\zeta$ -plane.

The basic equations of the torsion problem in the  $z$ -plane were developed into those in the  $\zeta$ -plane by N. I. Muskhelishvili<sup>1)</sup>, and in this report his method is used.

The function for conformal mapping is

$$z = w(\zeta) = K \left( \zeta + ce^{i\beta} + \frac{r_0^2}{\zeta + ce^{i\beta}} \right),$$

$$z = x + iy, \quad \zeta = \rho e^{i\theta},$$

where the real values  $K$ ,  $c$  and  $r_0$  may be fixed arbitrarily.

The circle  $|\zeta| = \rho = \sqrt{r_0^2 + c^2 + 2r_0c \cos \beta}$  corresponds in the  $z$ -plane to "Joukowski's curve", but in this paper  $\rho$  should be  $\rho > \sqrt{r_0^2 + c^2 + 2r_0c \cos \beta}$  so that maps with no angular points may be obtained.

The calculation of the stress components and torsion moment is carried out not in special, but in general cases.

### 緒 言

翼型断面を持つ棒の振り問題は、中実断面を持つ場合については、タービン翼などに関連して、その解法がいくつか発表されているが、断面形状を表わす境界条件がかなり複雑となるため、それにとまなう解析も煩雑となり、いずれの場合も近似解法をとっているようである。また、境界条件を簡単な関数で与えてエネルギー法で解を得ているものもある。

中空断面を持つ翼型の場合には、円孔の場合に解かれているが<sup>2)</sup>、これも計算はかなりめんどうである。

ここでは、内周も翼型を有する中空翼型断面を持つ棒を対象にし、そのような計算の複雑さを避けるために、断面境界を決定するのに等角写像関数を用いている。すなわち、等角写像関数  $z=\omega(\zeta)$  において、 $\zeta$ -平面内の円が  $z$ -平面内に所要の形状に写像されるように関数を決定し、問題を  $\zeta$ -平面内の円図形での解析としているから、解法も容易であり、写像関数で表わすことのできる中空断面を持つ棒の振り問題の解が特定の形状のみに限定されずに一般的に求められている。

振り問題において満足されるべき基礎式は、一般に直交直線座標で与えられているが、N. I. Muskhelishvili の研究<sup>1)</sup>によって、複素振り関数を用いる場合に拡張されている。したがって、解析にはその方法を用いている。

## 1. 基 礎 式

### i) 複素振り関数

$\zeta$ -平面 ( $\zeta=\rho e^{i\theta}$ ) で、 $\rho=\text{const.}$  なる円が  $z$ -平面で所要の曲線を描く写像関数  $\omega(\zeta)$  を考え、解析を  $\zeta$ -平面で行なって結果を得るものであり、 $\omega(\zeta)$  は  $\rho_1 \leq |\zeta| \leq \rho_2$  なる領域で正則でなければならない。

いま、 $\phi$  も  $\psi$  も調和関数である複素振り関数  $f(\zeta)$  を考える。すなわち、 $\phi$  とともに  $\psi$  は Cauchy-Riemann の方程式を満足し、おのおのが Laplace の微分方程式を満足する関数である。

$$(1.1) \quad \phi + i\psi = F(z) = f(\zeta) \left( = i \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k \zeta^k \right).$$

振りの理論から  $\psi$  は形状境界で

$$(1.2) \quad \psi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \text{const.},$$

なる境界条件を満足しなければならない。すなわち、複連結領域の場合、 $\zeta$ -平面での内外境界をそれぞれ  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  なる円とすると、(1.2) 式は

$$(1.2)' \quad \mathbf{R} \frac{1}{i} f(\zeta) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{i} f(\zeta) + \overline{\frac{1}{i} f(\zeta)} \right) \\ = \frac{1}{2} \omega(\zeta) \cdot \overline{\omega(\zeta)} + c_j, \quad \rho = \rho_j \quad (j = 1, 2)$$

と書き直されるが、常数  $c_1$ ,  $c_2$  のうち一つは後述の  $\psi$  の  $a_0$  を考えるとき任意に決定し得るから、外境界での値を零とする、 $c_2=0$ 。(1.2)' 式は  $\theta$  のみの実関数であるから、 $\theta$  に関して複素 Fourier 級数に展開してつぎの形

$$(1.2)'' \quad \frac{1}{i} f(\zeta) + \overline{\frac{1}{i} f(\zeta)} = 2 \left\{ \frac{1}{2} \omega(\zeta) \cdot \overline{\omega(\zeta)} + c_j \right\} \\ = 2g_j(\theta), \quad \rho = \rho_j \quad (j = 1, 2)$$

$$(1.3) \quad \begin{cases} g_1(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A'_k e^{ik\theta}, & A'_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_1(\theta) e^{-ik\theta} d\theta, \\ g_2(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A''_k e^{ik\theta}, & A''_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_2(\theta) e^{-ik\theta} d\theta, \end{cases}$$

に置けば, (1.1) 式とから

$$(1.4) \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k \rho^k e^{ik\theta} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{a}_k \rho^k e^{-ik\theta} = \begin{cases} 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} A'_k e^{ik\theta}, & \rho = \rho_1 \\ 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} A''_k e^{ik\theta}, & \rho = \rho_2 \end{cases}$$

なる関係を得る。

$$(1.5) \quad a_0 + \bar{a}_0 = 2A'_0, \quad a_0 + \bar{a}_0 = 2A''_0,$$

$$(1.6) \quad a_k \rho_1^k + \bar{a}_{-k} \rho_1^{-k} = 2A'_k, \quad a_k \rho_2^k + \bar{a}_{-k} \rho_2^{-k} = 2A''_k, \quad (k \neq 0)$$

から  $a_k, \bar{a}_{-k}$  が求まり,  $f(\zeta)$  が決まる。ここで (1.2)' 式の実常数  $c_1$  は (1.5) 式から求まり, また,  $a_0$  の虚部は求まらないが任意に決定し得るから  $\mathbf{I}a_0=0$  とおく。

(1.1) 式から  $\phi$  と  $\psi$  を求める。

$$f(\zeta) = i \left\{ a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \zeta^k + \bar{a}_{-k} \zeta^{-k}) \right\}$$

であり,

$$2\phi = (f(\zeta) + \overline{f(\zeta)}), \quad 2\psi = \frac{1}{i} \{ f(\zeta) - \overline{f(\zeta)} \}$$

であるから, それぞれつぎのように求められる。

$$(1.7) \quad \phi = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \left\{ \rho^{-k} \cdot \frac{a_{-k} + \bar{a}_{-k}}{2} - \rho^k \cdot \frac{a_k + \bar{a}_k}{2} \right\} \sin k\theta \right. \\ \left. + i \left\{ \rho^{-k} \cdot \frac{a_{-k} - \bar{a}_{-k}}{2} + \rho^k \cdot \frac{a_k - \bar{a}_k}{2} \right\} \cos k\theta \right]$$

$$(1.8) \quad \psi = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \left\{ \rho^k \cdot \frac{a_k + \bar{a}_k}{2} + \rho^{-k} \cdot \frac{a_{-k} + \bar{a}_{-k}}{2} \right\} \cos k\theta \right. \\ \left. + i \left\{ \rho^k \cdot \frac{a_k - \bar{a}_k}{2} - \rho^{-k} \cdot \frac{a_{-k} - \bar{a}_{-k}}{2} \right\} \sin k\theta \right],$$

さらに,

$$(1.9) \quad \mathbf{R}f'(\zeta) = - \sum_{k=1}^{\infty} k \left[ \rho^{k-1} \left\{ \frac{a_k + \bar{a}_k}{2} \sin(k-1)\theta - i \frac{a_k - \bar{a}_k}{2} \cos(k-1)\theta \right\} \right. \\ \left. + \rho^{-(k+1)} \left\{ \frac{a_{-k} + \bar{a}_{-k}}{2} \sin(k+1)\theta + i \frac{a_{-k} - \bar{a}_{-k}}{2} \cos(k+1)\theta \right\} \right]$$

$$(1.10) \quad \mathbf{I}f'(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} k \left[ \rho^{k-1} \left\{ \frac{a_k + \bar{a}_k}{2} \cos(k-1)\theta + i \frac{a_k - \bar{a}_k}{2} \sin(k-1)\theta \right\} \right. \\ \left. - \rho^{-(k+1)} \left\{ \frac{a_{-k} + \bar{a}_{-k}}{2} \cos(k+1)\theta - i \frac{a_{-k} - \bar{a}_{-k}}{2} \sin(k+1)\theta \right\} \right]$$

である。

### ii) 応力成分

つぎに応力成分を求める。捩りの理論によれば、 $G$  を柱体を構成する材料の剛性率、 $r$  を捩り率として、各応力成分はつぎのように表わされる。

$$(1.11) \quad \begin{cases} \tau_{zx} = Gr \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} - y \right) = Gr \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \right), \\ \tau_{zy} = Gr \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} + x \right) = Gr \left( x - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \end{cases}$$

ここで、 $\tau$  の添字は一般に用いられているものと同意味である。(1.11)式から

$$(1.11)' \quad \begin{aligned} \tau_{zx} - i\tau_{zy} &= Gr \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} - i(x - iy) \right\} \\ &= Gr \left\{ \frac{dF(z)}{dz} - i\bar{z} \right\}, \end{aligned}$$

$\frac{dF}{dz} = \frac{df}{d\zeta} \cdot \frac{1}{w'(\zeta)}$  を考慮して、結局次式を得る。

$$\tau_{zx} - i\tau_{zy} = Gr \left\{ f'(\zeta) \cdot \frac{1}{w'(\zeta)} - i\bar{z} \right\}.$$

つぎに図-1を参照して、 $z$ -平面での成分  $A_x, A_y$  と  $\zeta$ -平面での成分  $A_\rho, A_\theta$  について座標変換を行なう。

$\alpha$  を  $\rho$ -方向と  $x$  軸とのなす角とすれば、

$$(a) \quad A_\rho + iA_\theta = e^{-i\alpha} (A_x + iA_y),$$

また  $dz = e^{i\alpha} |d\zeta|$ ,  $d\bar{z} = e^{i\theta} |d\zeta|$  であるから  $e^{i\alpha} = \frac{\zeta}{\rho} \cdot \frac{w'(\zeta)}{|w'(\zeta)|}$  を得、 $e^{-i\alpha} = \frac{\bar{\zeta}}{\rho} \cdot \frac{\overline{w'(\zeta)}}{|w'(\zeta)|}$  となるから、(a)式は

$$(b) \quad A_\rho + iA_\theta = \frac{\bar{\zeta}}{\rho} \cdot \frac{\overline{w'(\zeta)}}{|w'(\zeta)|} (A_x + iA_y).$$

さらに、(b)式は

$$(b)' \quad A_\rho - iA_\theta = \frac{\zeta}{\rho} \cdot \frac{w'(\zeta)}{|w'(\zeta)|} (A_x - iA_y)$$

とも書き直されるから、結局(1.11)'式はつぎのように纏められる。

$$(1.12) \quad \tau_\rho - i\tau_\theta = Gr \cdot \frac{\zeta}{\rho} \cdot \frac{1}{|w'(\zeta)|} \{ f'(\zeta) - i\overline{w'(\zeta)} \cdot w'(\zeta) \}.$$

### iii) 捩りモーメント

捩りモーメントは、(1.8)式で求まる  $\psi$  を用いて

$$(1.13) \quad M_t = 2Gr \left[ S_1 c_1 + \iint_S \left\{ \psi - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right\} dS \right]$$

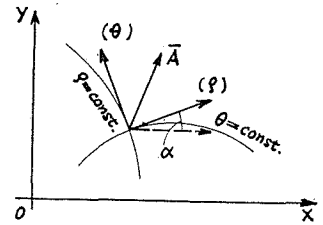


図-1. 座標変換

である。ここで、 $c_1$ は内周における常数、 $S_1$ は内周を囲む面積である。さらに書き変えると、 $\zeta$ -平面の  $z$ -平面に対する写像拡大率は、 $\left| \frac{d\omega(\zeta)}{d\zeta} \right|$  であるから、(1.13)式はつぎのようになる。

$$(1.13)' \quad M_t = 2G\gamma \left[ c_1 \int_0^{\rho_1} \int_0^{2\pi} \omega'(\zeta) \cdot \overline{\omega'(\zeta)} \rho \, d\rho \, d\theta \right. \\ \left. + \int_{\rho_1}^{\rho_2} \int_0^{2\pi} \left\{ \psi(\zeta) - \frac{1}{2} \overline{\omega(\zeta)} \cdot \omega(\zeta) \right\} \omega'(\zeta) \cdot \overline{\omega'(\zeta)} \cdot \rho \, d\rho \, d\theta \right].$$

### 2. 写 像 関 数

写像関数として次式を考える。

$$(2.1) \quad z = \omega(\zeta) = K \left( \zeta + c e^{i\beta} + \frac{r_0^2}{\zeta + c e^{i\beta}} \right),$$

ここで、 $\zeta = \rho e^{i\theta}$  であり、 $K, c, r_0$  は正の実数であり、一般に  $\rho - c > r_0 > 0$  とする。もし、 $\rho$  が  $\rho = \sqrt{r_0^2 + c^2 + 2r_0c \cos \beta}$  なる関係を満足する場合には、 $z$ -平面に写像される図形は、Joukowski の翼型を与えるが、ここでは、 $\rho > \sqrt{r_0^2 + c^2 + 2r_0c \cos \beta}$  なる場合を考えるので、尖点の無い閉じた図形を得ることになる。そして、 $\rho$  は一般に  $\rho \geq 1$  とすべきである。

#### z-平面での作図法

図-2は、(2.1)式を作図する方法であるが、以下これを簡単に述べる。

すなわち、(2.1)式の各項を描き、これをベクトル的に加えるのであるが、第一項は  $\rho = \rho_0$  に対して、

$$(c) \quad \begin{cases} x = \rho_0 \cos \theta + c \cos \beta \\ y = \rho_0 \sin \theta + c \sin \beta \end{cases}$$

であり、

$$(d) \quad (x - c \cos \beta)^2 + (y - c \sin \beta)^2 = \rho_0^2$$

なる円、第二項は

$$(e) \quad \begin{cases} x = r_0^2 \left\{ \frac{\rho_0 \cos \theta + c \cos \beta}{(\rho_0 \cos \theta + c \cos \beta)^2 + (\rho_0 \sin \theta + c \sin \beta)^2} \right\} \\ y = -r_0^2 \left\{ \frac{\rho_0 \sin \theta + c \sin \beta}{(\rho_0 \cos \theta + c \cos \beta)^2 + (\rho_0 \sin \theta + c \sin \beta)^2} \right\} \end{cases}$$

であり、変形して  $\theta$  を消去すればやはり

$$(f) \quad \left( x + \frac{cr_0^2}{\rho_0^2 - c^2} \cos \beta \right)^2 + \left( y - \frac{cr_0^2}{\rho_0^2 - c^2} \sin \beta \right)^2 = \left( \frac{\rho_0 r_0^2}{\rho_0^2 - c^2} \right)^2 \quad (\rho \neq c)$$

なる円となる。(d)、(f)の中心をおのおの  $O', O''$  とし、(c)と(e)を比べてみると、 $x$ 座標は同

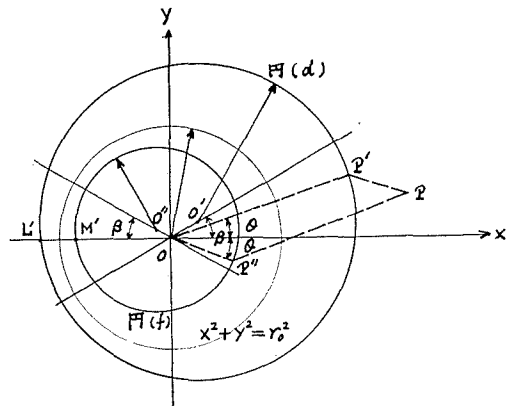


図-2. 作 図 法

符号,  $y$  座標は異符号であるから, 原点  $O$  から任意の角  $(+\theta)$ ,  $(-\theta)$  方向に放射線を引き,  $(+\theta)$  と (d) との交点を  $P'$ ,  $(-\theta)$  と (f) との交点を  $P''$  とすれば, 求める点  $P$  は  $P(P'_x+P''_x, P'_y-P''_y)$  である。かような点  $P$  を連ねると,  $|OL'| > |OM'|$  ならば, 尖点の無い翼型を,  $|OL'| = |OM'|$  ならば Joukowski の翼型を得る。ここで  $\beta$  が大になればなるほど翼型の“ひねり”は増し,  $\beta=0$  で  $x$  軸に対称な図形となり,  $\overline{OC}$  が  $y$  軸に重さなる方向であれば翼型は薄いものとなる。

### 3. 計 算

i) (1.3) 式の係数  $A_k$ ,  $A'_k$  の計算

$$(3.1) \quad g_j(\sigma) = \frac{K^2}{2} \left\{ \rho_j e^{i\theta} + c e^{i\beta} + \frac{r_0^2}{\rho_j e^{i\theta} + c e^{i\beta}} \right\} \\ \times \left\{ \rho_j e^{-i\theta} + c e^{-i\beta} + \frac{r_0^2}{\rho_j e^{-i\theta} + c e^{-i\beta}} \right\} + c_j \quad (j = 1, 2),$$

$$(3.2) \quad A_k^j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_j(\sigma) e^{-ik\theta} d\theta,$$

ここで,  $A_k^j$  は  $j=1$  では  $A_k$  を,  $j=2$  では  $A'_k$  を意味するものである。(3.1), (3.2) 式において  $e^{i\theta} = \sigma$  と置き整理すると,

$$(3.3) \quad g_j(\sigma) = \frac{K^2}{2} \cdot \frac{\{(\rho_j \sigma + c e^{i\beta})^2 + r_0^2\} \{(\rho_j + c e^{-i\beta} \sigma)^2 + r_0^2 \sigma^2\}}{\sigma (\rho_j \sigma + c e^{i\beta}) (\rho_j + c e^{-i\beta} \sigma)} + c_j$$

$$(3.4) \quad A_k^j = \frac{1}{2\pi i} \oint g_j(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma^{k+1}}, \quad (d\sigma = i\sigma d\theta) \\ = \frac{1}{2\pi i} \oint \left[ \frac{K^2}{2} \cdot \frac{\{(\rho_j \sigma + c e^{i\beta})^2 + r_0^2\} \{(\rho_j + c e^{-i\beta} \sigma)^2 + r_0^2 \sigma^2\}}{\sigma^{k+2} (\rho_j \sigma + c e^{i\beta}) (\rho_j + c e^{-i\beta} \sigma)} + \frac{c_j}{\sigma^{k+1}} \right] d\sigma$$

この積分は, 被積分関数に第一項では  $\sigma=0$  に  $(k+2)$  位の,  $\sigma = -\frac{c e^{i\beta}}{\rho_j}$  に 1 位の, 第二項では  $\sigma=0$  に  $(k+1)$  位の極を持つから, 留数計算で求められる。すなわち

$$A_k^j = \frac{K^2}{2} \left[ \frac{1}{(k+1)!} \frac{d^{k+1}}{d\sigma^{k+1}} \frac{\{(\rho_j \sigma + c e^{i\beta})^2 + r_0^2\} \{(\rho_j + c e^{-i\beta} \sigma)^2 + r_0^2 \sigma^2\}}{(\rho_j \sigma + c e^{i\beta}) (\rho_j + c e^{-i\beta} \sigma)} \right]_{\sigma=0} \\ + \frac{\{(\rho_j + c e^{i\beta})^2 + r_0^2\} \{(\rho_j + c e^{-i\beta} \sigma)^2 + r_0^2 \sigma^2\}}{\rho_j \sigma^{k+2} (\rho_j + c e^{-i\beta} \sigma)} \Big|_{\sigma = -\frac{c e^{i\beta}}{\rho_j}} + c_j \quad (k=0 \text{ のみ})$$

上式の微分計算は, 被微分関数を部分分数などに変形して微分操作を行えば容易になり, 結局つぎの値を得る。

$$(3.5) \quad A_0^j = \frac{K^2}{2} \left( \rho_j^2 + c^2 + \frac{r_0^4}{\rho_j^2 - c^2} \right) + c_j, \quad \begin{cases} j=1, & c_j = c_1 \\ j=2, & c_j = 0, \end{cases}$$

$$(3.6) \quad A_k^j = \frac{K^2}{2} \left[ (-1)^k \frac{r_0^2 c^{2k-4}}{\rho_j^k} \cdot \frac{1}{(c e^{i\beta})^k} \left\{ (\rho_j^2 - c^2) (c e^{i\beta})^2 + \frac{r_0^2 c^4}{\rho_j^2 - c^2} \right\} \right. \\ \left. + \frac{r_0^2 \rho_j}{c^2} \cdot \frac{1}{(c e^{i\beta})} \left\{ (c e^{i\beta})^2 + \frac{c^4}{r_0^2} \right\} \right] \quad (k=1 \text{ のみ}) \Big|.$$

(3.5) 式から求まる  $A_0$ ,  $A'_0$  から, (1.5) 式によって  $c_1$  を求めると,

$$(3.7) \quad c_1 = \frac{K^2}{2} (\rho_2^2 - \rho_1^2) \left\{ 1 - \frac{r_0^4}{(\rho_2^2 - c^2)(\rho_1^2 - c^2)} \right\}$$

となる。

ii) (1.1) 式の係数  $a_k$  などの計算

(1.5) 式から, 実数係数  $a_0$  は,

$$(3.8) \quad a_0 = \frac{K^2}{2} \left( \rho_2^2 + c^2 + \frac{r_0^2}{\rho_2^2 - c^2} \right),$$

(1.6) 式から, 係数  $a_k, \overline{a_{-k}}$  ( $k \neq 0$ ) は

$$(3.9) \quad \begin{cases} a_k = \frac{2}{\rho_2^{2k} - \rho_1^{2k}} (\rho_2^k A'_k - \rho_1^k A_k) \\ \overline{a_{-k}} = \frac{2\rho_1^k \rho_2^k}{\rho_2^{2k} - \rho_1^{2k}} (\rho_2^k A'_k - \rho_1^k A_k) \end{cases}$$

となる。したがって, (3.6) 式を (3.9) 式に代入し,  $\zeta$ -平面における外周および内周半径の比を

$$(3.10) \quad \rho_2/\rho_1 = m$$

として整理すると,

$$(3.11) \quad \begin{cases} a_k = K^2 (-1)^k \frac{r_0^2 c^{2k-4}}{\rho_1^{2k-2}} \cdot \frac{m^2-1}{m^{2k}-1} \left\{ (ce^{i\beta})^{2-k} - \frac{r_0^2 c^4 (ce^{i\beta})^{-k}}{(\rho_1^2 - c^2)(m^2 \rho_1^2 - c^2)} \right\} \\ \quad + K^2 \frac{r_0^2}{c^2} \cdot \frac{1}{ce^{i\beta}} \left\{ (ce^{i\beta})^2 + \frac{c^4}{r_0^2} \right\} \quad (k=1 \text{ のみ}) \\ \overline{a_{-k}} = K^2 (-1)^k \frac{r_0^2 c^{2k-4}}{m^{2k}-1} \left[ (ce^{i\beta})^{2-k} \left\{ m^{2k} (\rho_1^2 - c^2) - (m^2 \rho_1^2 - c^2) \right\} \right. \\ \quad \left. + \frac{m^{2k} (m^2 \rho_1^2 - c^2) - (\rho_1^2 - c^2)}{(\rho_1^2 - c^2)(m^2 \rho_1^2 - c^2)} r_0^2 c^4 (ce^{i\beta})^{-k} \right] \end{cases}$$

となる。 $\overline{a_k}, a_{-k}$  は  $a_k, \overline{a_{-k}}$  の  $(ce^{i\beta})$  項を  $(ce^{-i\beta})$  と置き換えることによって得られる。これで,

(1.7) 式~(1.10) 式が決定された。

iii) 剪断応力  $\tau_\rho, \tau_\theta$  の計算

(1.12) 式の計算に要する  $|\omega'(\zeta)|, \overline{\omega(\zeta)} \cdot \omega'(\zeta), f'(\zeta)$  などを計算する。(2.1) 式から,

$$\omega(\zeta) = K \left( \zeta + ce^{i\beta} + \frac{r_0^2}{\zeta + ce^{i\beta}} \right), \quad \omega'(\zeta) = K \left( 1 - \frac{r_0^2}{(\zeta + ce^{i\beta})^2} \right),$$

$$|\omega'(\zeta)| = \sqrt{\omega'(\zeta) \cdot \overline{\omega'(\zeta)}}$$

ここで,

$$(3.12) \quad \rho \cos \theta + c \cos \beta = X, \quad \rho \sin \theta + c \sin \beta = Y$$

と置くと,

$$|\omega'(\zeta)| = K \sqrt{1 - \frac{2r_0^2(X^2 - Y^2) - r_0^4}{(X^2 + Y^2)^2}},$$

$$\begin{aligned}
& i \frac{\zeta \overline{\omega(\zeta)} \cdot \omega'(\zeta)}{K^2} \\
&= -\rho \left[ c \sin(\theta - \beta) + \frac{r_0^2}{(X^2 + Y^2)^2} \left\{ 4XY(\rho + c \cos(\theta - \beta)) - r_0^2 c \sin(\theta - \beta) \right\} \right] \\
&+ i\rho \left[ \rho + c \cos(\theta - \beta) - \frac{r_0^2}{(X^2 + Y^2)^2} \left\{ 4XY c \sin(\theta - \beta) + r_0^2(\rho + c \cos(\theta - \beta)) \right\} \right] \\
f'(\zeta) \cdot \zeta &= i \sum_{k=1}^{\infty} k (a_k \zeta^k - a_{-k} \zeta^{-k}) \\
&= -\sum_{k=1}^{\infty} k \left\{ \left( \rho^k \cdot \frac{a_k + \overline{a_k}}{2} + \rho^{-k} \cdot \frac{a_{-k} + \overline{a_{-k}}}{2} \right) \sin kt \right. \\
&\quad \left. - i \left( \rho^k \cdot \frac{a_k - \overline{a_k}}{2} - \rho^{-k} \cdot \frac{a_{-k} - \overline{a_{-k}}}{2} \right) \cos kt \right\} \\
&+ i \sum_{k=1}^{\infty} k \left\{ \left( \rho^k \cdot \frac{a_k + \overline{a_k}}{2} - \rho^{-k} \cdot \frac{a_{-k} + \overline{a_{-k}}}{2} \right) \cos kt \right. \\
&\quad \left. + i \left( \rho^k \cdot \frac{a_k - \overline{a_k}}{2} + \rho^{-k} \cdot \frac{a_{-k} - \overline{a_{-k}}}{2} \right) \sin kt \right\}.
\end{aligned}$$

以上の値を (1.12) 式に代入して、応力  $\tau_r$ ,  $\tau_\theta$  を求めると、

$$\begin{aligned}
(3.13) \quad \tau_r - i\tau_\theta &= Gr \frac{(X^2 + Y^2)}{\sqrt{(X^2 + Y^2)^2 - 2r_0^2(X^2 - Y^2) + r_0^4}} \left( \left[ Kc \sin(\theta - \beta) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{Kr_0^2}{(X^2 + Y^2)^2} \left\{ 4XY(\rho + c \cos(\theta - \beta)) - r_0^2 c \sin(\theta - \beta) \right\} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{K\rho} \sum_{k=1}^{\infty} k \left\{ (\rho^k \mathbf{R}a_k + \rho^{-k} \mathbf{R}a_{-k}) \sin kt + (\rho^k \mathbf{I}a_k - \rho^{-k} \mathbf{I}a_{-k}) \cos kt \right\} \right] \\
&\quad - i \left[ K(\rho + c \cos(\theta - \beta)) - \frac{Kr_0^2}{(X^2 + Y^2)^2} \left\{ 4XYc \sin(\theta - \beta) + r_0^2(\rho + c \cos(\theta - \beta)) \right\} \right] \\
&\quad \left. - \frac{1}{K\rho} \sum_{k=1}^{\infty} k \left\{ (\rho^k \mathbf{R}a_k - \rho^{-k} \mathbf{R}a_{-k}) \cos kt - (\rho^k \mathbf{I}a_k + \rho^{-k} \mathbf{I}a_{-k}) \sin kt \right\} \right] \right)
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\mathbf{R}a$  は複素数  $a$  の実数部分、 $\mathbf{I}a$  は虚数部分である。

#### iv) 振りモーメント $M_i$ の計算

(a)  $z$ -平面における面積の計算

$\zeta$ -平面で、 $\rho = \rho_j$  なる円で囲まれる部分が  $z$ -平面では  $S_j$  なる面積であるとすると、

$$\begin{aligned}
(3.14) \quad S_j &= \int_0^{\rho_j} \int_0^{2\pi} \omega'(\zeta) \cdot \overline{\omega'(\zeta)} \cdot \rho \, d\theta \, d\rho \\
&= K^2 \int_0^{\rho_j} d\rho \oint \frac{\{(\rho\sigma + ce^{i\beta})^2 - r_0^2\} \{(\rho + ce^{-i\beta}\sigma)^2 - \sigma^2 r_0^2\}}{(\rho\sigma + ce^{i\beta})^2 (\rho + ce^{-i\beta}\sigma)^2} \cdot \frac{\rho}{i\sigma} \, d\sigma \quad (\sigma = e^{i\theta}) \\
&= K^2 \int_0^{\rho_j} \frac{d\rho}{i\rho} \oint \frac{\{(\rho\sigma + ce^{i\beta})^2 - r_0^2\} \{(\rho + ce^{-i\beta}\sigma)^2 - \sigma^2 r_0^2\}}{\sigma \left(\sigma + \frac{c}{\rho} e^{i\beta}\right)^2 (\rho + ce^{-i\beta}\sigma)^2} \, d\sigma,
\end{aligned}$$

$\sigma$  に関する積分は、被積分関数に  $\sigma=0$  に 1 位の、 $\sigma = -\frac{c}{\rho} e^{i\beta}$  に 2 位の極を持つから、留数計算で求められる。すなわち、

$$\begin{aligned}
S_j &= K^2 \int_0^{\rho_j} 2\pi \frac{d\rho}{\rho} \left[ \frac{\{(\rho\sigma + ce^{i\beta})^2 - r_0^2\} \{(\rho + ce^{-i\beta}\sigma)^2 - \sigma^2 r_0^2\}}{\left(\sigma + \frac{c}{\rho} e^{i\beta}\right)^2 (\rho + ce^{-i\beta}\sigma)^2} \right]_{\sigma=0} \\
&\quad + \frac{1}{1!} \frac{d}{d\sigma} \frac{\{(\rho\sigma + ce^{i\beta})^2 - r_0^2\} \{(\rho + ce^{-i\beta}\sigma)^2 - \sigma^2 r_0^2\}}{\sigma (\rho + ce^{-i\beta}\sigma)^2} \Big|_{\sigma = -\frac{c}{\rho} e^{i\beta}} \\
&= K^2 2\pi \int_0^{\rho_j} \left( \rho + \frac{\rho^2 + c^2}{(\rho^2 - c^2)^3} \rho r_0^4 \right) d\rho,
\end{aligned}$$

結局, 求める面積  $S_j$  は,

$$(3.15) \quad S_j = K^2 \pi \rho_j^2 \left( 1 + \frac{r_0^2}{\rho_j^2 - c^2} \right) \left( 1 - \frac{r_0^2}{\rho_j^2 - c^2} \right).$$

(b)  $I_p$  の計算

振りモーメント計算の際に出てくる  $\iint_S (x^2 + y^2) dS$  を算出する。

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= r^2 = \overline{\omega(\zeta)} \cdot \omega(\zeta) \\
&= K^2 \frac{\{(\rho\sigma + ce^{i\beta})^2 + r_0^2\} \{(\rho + ce^{-i\beta}\sigma)^2 + \sigma^2 r_0^2\}}{\rho\sigma \left(\sigma + \frac{c}{\rho} e^{i\beta}\right) (\rho + ce^{-i\beta}\sigma)}, \quad (\sigma = e^{i\theta}) \\
dS &= K^2 \frac{\{(\rho\sigma + ce^{i\beta})^2 - r_0^2\} \{(\rho + ce^{-i\beta}\sigma)^2 - \sigma^2 r_0^2\}}{i\rho\sigma \left(\sigma + \frac{c}{\rho} e^{i\beta}\right)^2 (\rho + ce^{-i\beta}\sigma)^2} d\rho d\sigma
\end{aligned}$$

であるから

$$(3.16) \quad \iint_S r^2 dS = K^4 \int_{\rho_1}^{\rho_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\{(\rho\sigma + ce^{i\beta})^4 - r_0^4\} \{(\rho + ce^{-i\beta}\sigma)^4 - \sigma^4 r_0^4\}}{i\rho^2 \sigma^2 \left(\sigma + \frac{c}{\rho} e^{i\beta}\right)^3 (\rho + ce^{-i\beta}\sigma)^3} d\rho d\sigma$$

となる。

上式の  $\sigma$  に関する積分は, 被積分関数に  $\sigma=0$  に2位の,  $\sigma = -\frac{c}{\rho} e^{i\beta}$  に3位の極を持つから, 留数計算で求められる。すなわち,

$$\begin{aligned}
&= K^4 \int_{\rho_1}^{\rho_2} d\rho \frac{2\pi}{\rho^2} \left[ \frac{1}{1!} \frac{d}{d\sigma} \frac{\{(\rho\sigma + ce^{i\beta})^4 - r_0^4\} \{(\rho + ce^{-i\beta}\sigma)^4 - \sigma^4 r_0^4\}}{\left(\sigma + \frac{c}{\rho} e^{i\beta}\right)^3 (\rho + ce^{-i\beta}\sigma)^3} \right]_{\sigma=0} \\
&\quad + \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\sigma^2} \frac{\{(\rho\sigma + ce^{i\beta})^4 - r_0^4\} \{(\rho + ce^{-i\beta}\sigma)^4 - \sigma^4 r_0^4\}}{\sigma^2 (\rho + ce^{-i\beta}\sigma)^3} \Big|_{\sigma = -\frac{c}{\rho} e^{i\beta}} \\
&= K^4 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left\{ \rho(\rho^2 + c^2) + \rho \frac{\rho^4 + 4\rho^2 c^2 + c^4}{(\rho^2 - c^2)^3} r_0^8 \right\} d\rho,
\end{aligned}$$

結局,

$$(3.17) \quad \iint_S r^2 dS = K^4 \pi \left[ \rho^2 \left( \frac{\rho^2}{2} + c^2 \right) \left( 1 - \frac{r_0^8}{(\rho^2 - c^2)^4} \right) \right]_{\rho_1}^{\rho_2}.$$

(c) 級数項の計算

(1.8) 式から

$$2\psi = 2a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (a_k \rho^k + \overline{a_{-k}} \rho^{-k}) e^{ik\theta} + (a_{-k} \rho^{-k} + \overline{a_k} \rho^k) e^{-ik\theta} \right\}$$

これを

$$(1.8)' \quad = 2a_0 + 2\psi_0$$

とすれば、振りモーメント  $M_L$  は、

$$(1.13)'' \quad \frac{M_L}{Gr} = 2S_1c_1 + 2(S_2 - S_1)a_0 + \iint_S 2\psi_0 dS - \iint_S r^2 dS$$

となり、右辺の第一、第二、第四項の積分はすでに求まっているから、第三項の計算を行なう。前出の諸計算の場合と同様に  $e^{i\theta} = \sigma$  と置くと、積分は、

$$(3.18) \quad \iint_S 2\psi_0 dS \\ = K^2 \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (a_k \rho^{k-1} + \overline{a_{-k}} \rho^{-k-1}) \frac{\{(\rho\sigma + ce^{i\beta})^2 - r_0^2\} \{(\rho + ce^{-i\beta}\sigma)^2 - \sigma^2 r_0^2\} \sigma^{k-1}}{i \left(\sigma + \frac{c}{\rho} e^{i\beta}\right)^2 (\rho + ce^{-i\beta}\sigma)^2} \right. \\ \left. + (\overline{a_k} \rho^{k-1} + a_{-k} \rho^{-k-1}) \frac{\{(\rho\sigma + ce^{i\beta})^2 - r_0^2\} \{(\rho + ce^{-i\beta}\sigma)^2 - \sigma^2 r_0^2\}}{i \left(\sigma + \frac{c}{\rho} e^{i\beta}\right)^2 (\rho + ce^{-i\beta}\sigma)^2 \sigma^{k+1}} \right] d\sigma d\rho,$$

$\sigma$  に関する積分は留数計算で求められる。すなわち、

$$= 2\pi K^2 \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (a_k \rho^{k-1} + \overline{a_{-k}} \rho^{-k-1}) \frac{1}{1!} \frac{d}{d\sigma} \frac{\{(\rho\sigma + ce^{i\beta})^2 - r_0^2\} \{(\rho + ce^{-i\beta}\sigma)^2 - \sigma^2 r_0^2\} \sigma^{k-1}}{(\rho + ce^{-i\beta}\sigma)^2} \right]_{\sigma = -\frac{c}{\rho} e^{i\beta}} \\ + (\overline{a_k} \rho^{k-1} + a_{-k} \rho^{-k-1}) \frac{1}{1!} \frac{d}{d\sigma} \frac{\{(\rho\sigma + ce^{i\beta})^2 - r_0^2\} \{(\rho + ce^{-i\beta}\sigma)^2 - \sigma^2 r_0^2\}}{(\rho + ce^{-i\beta}\sigma)^2 \sigma^{k+1}} \Big|_{\sigma = -\frac{c}{\rho} e^{i\beta}} \\ + (\overline{a_k} \rho^{k-1} + a_{-k} \rho^{-k-1}) \frac{\rho^2}{k!} \frac{d^k}{d\sigma^k} \frac{\{(\rho\sigma + ce^{i\beta})^2 - r_0^2\} \{(\rho + ce^{-i\beta}\sigma)^2 - \sigma^2 r_0^2\}}{(\rho\sigma + ce^{i\beta})^2 (\rho + ce^{-i\beta}\sigma)^2} \Big|_{\sigma=0} \Big] d\rho$$

である。第三項は、被微分関数を部分分数にして微分操作を行なうと容易に求まり、

$$(3.19) \quad = 2\pi K^2 \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k r_0^2 \left[ (1-k) \left\{ (ce^{i\beta})^{k-2} a_k + \frac{c^{2k-4}}{(ce^{i\beta})^{k-2}} \overline{a_k} \right\} \rho \right. \\ \left. + (1-k) \left\{ (ce^{i\beta})^{k-2} \overline{a_{-k}} + \frac{c^{2k-4}}{(ce^{i\beta})^{k-2}} a_{-k} \right\} \frac{1}{\rho^{2k-1}} + r_0^2 \frac{\{(k+1)\rho^2 - (k-1)c^2\}}{(\rho^2 - c^2)^3} \right. \\ \left. \times \left( \left\{ (ce^{i\beta})^k a_k + \frac{c^{2k}}{(ce^{i\beta})^k} \overline{a_k} \right\} \rho + \left\{ (ce^{i\beta})^k \overline{a_{-k}} + \frac{c^{2k}}{(ce^{i\beta})^k} a_{-k} \right\} \frac{1}{\rho^{2k-1}} \right) \right] d\rho$$

となる。ここで (3.19) 式右辺の  $\rho$  の係数をつぎのように置く。

$$(3.20) \quad \begin{cases} (-1)^k \left\{ (ce^{i\beta})^{k-2} a_k + (ce^{-i\beta})^{k-2} \overline{a_k} \right\} = R_1 \\ (-1)^k \left\{ (ce^{i\beta})^{k-2} \overline{a_{-k}} + (ce^{-i\beta})^{k-2} a_{-k} \right\} = R_2 \\ (-1)^k \left\{ (ce^{i\beta})^k a_k + (ce^{-i\beta})^k \overline{a_k} \right\} = R_3 \\ (-1)^k \left\{ (ce^{i\beta})^k \overline{a_{-k}} + (ce^{-i\beta})^k a_{-k} \right\} = R_4. \end{cases}$$

(3.19) 式は、結局つぎのようになる。

$$\iint_S 2\psi_0 dS = 2\pi r_0^2 K^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1-k}{2} \left[ \rho^2 R_1 - \frac{\rho^{2-2k}}{k-1} R_2 \right]_{\rho_1}^{\rho_2} + r_0^2 R_3 \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{(k+1)\rho^3 - (k-1)c^2\rho}{(\rho^2 - c^2)^3} d\rho + r_0^2 R_4 \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{(k+1)\rho^3 - (k-1)c^2\rho}{(\rho^2 - c^2)^3 \rho^{2k}} d\rho \right].$$

上式を計算して

$$(3.21) \quad \iint_S 2\psi_0 dS = \pi r_0^2 K^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (1-k)\rho^2 R_1 + \rho^{2-2k} R_2 - r_0^2 R_3 \left\{ \frac{k}{(\rho^2 - c^2)} + \frac{\rho^2}{(\rho^2 - c^2)^2} \right\} - r_0^2 R_4 \frac{\rho^{2-2k}}{(\rho^2 - c^2)^2} \right]_{\rho_1}^{\rho_2}$$

を得る。

つぎに, (3.12) 式の  $a_k$ ,  $\overline{a_{-k}}$  とから (3.20) 式の  $R$  を計算すると, (3.10) 式の  $m$  を用いて

$$R_1 = 2K^2 \frac{r_0^2 c^{2k-4}}{\rho_1^{2k-2}} \cdot \frac{m^2-1}{m^{2k}-1} \left\{ 1 - \frac{r_0^2 c^2}{(\rho_1^2 - c^2)(m^2 \rho_1^2 - c^2)} \cos 2\beta \right\} - 2K^2 \frac{r_0^2}{c^2} \left( 1 + \frac{c^2}{r_0^2} \cos 2\beta \right) \quad (k=1 \text{ のみ})$$

$$R_2 = 2K^2 \frac{r_0^2 c^{2k-4}}{m^{2k}-1} \left[ \left\{ m^{2k}(\rho_1^2 - c^2) - (m^2 \rho_1^2 - c^2) \right\} + \frac{m^{2k}(m^2 \rho_1^2 - c^2) - (\rho_1^2 - c^2)}{(\rho_1^2 - c^2)(m^2 \rho_1^2 - c^2)} r_0^2 c^2 \cos 2\beta \right]$$

$$R_3 = 2K^2 \frac{r_0^2 c^{2k-4}}{\rho_1^{2k-2}} \cdot \frac{m^2-1}{m^{2k}-1} \left\{ c^2 \cos 2\beta - \frac{r_0^2 c^4}{(\rho_1^2 - c^2)(m^2 \rho_1^2 - c^2)} \right\} - 2K^2 \frac{r_0^2}{c^2} \left( c^2 \cos 2\beta + \frac{c^4}{r_0^2} \right) \quad (k=1 \text{ のみ})$$

$$R_4 = 2K^2 \frac{r_0^2 c^{2k-4}}{m^{2k}-1} \left[ c^2 \left\{ m^{2k}(\rho_1^2 - c^2) - (m^2 \rho_1^2 - c^2) \right\} \cos 2\beta + \frac{m^{2k}(m^2 \rho_1^2 - c^2) - (\rho_1^2 - c^2)}{(\rho_1^2 - c^2)(m^2 \rho_1^2 - c^2)} r_0^2 c^4 \right]$$

であり, これらを (3.21) 式に代入し, 整頓すると, 結局次式を得る。

ここで

$$(3.22) \quad \rho_1^2 - c^2 = A, \quad \rho_2^2 - c^2 = m^2 \rho_1^2 - c^2 = B$$

と置く。

$$(3.23) \quad \iint_S 2\psi_0 dS = K^4 2\pi r_0^6 (A-B) \frac{2AB + c^2(A+B)}{A^2 B^2} \left( 1 + \frac{c^2}{r_0^2} - 2 \sin^2 \beta \right) - K^4 2\pi r_0^4 \frac{\rho_1^2}{c^4} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{c}{\rho_1} \right)^{2k} \left[ A \left( 1 - \frac{r_0^4 c^4}{A^4} \right) - B \frac{m^2}{m^{2k}} \left( 1 - \frac{r_0^4 c^4}{B^4} \right) + k \frac{m^2-1}{m^{2k}-1} (B-A) \left\{ \left( 1 - \frac{r_0^2 c^2}{AB} \right)^2 + 4 \frac{r_0^2 c^2}{AB} \sin^2 \beta \right\} \right].$$

以上求めた (3.15), (3.17), (3.23) 式を, (1.13)' 式に代入し, 振りモーメントを求めると,

$$\begin{aligned}
 (3.24) \quad \frac{M_t}{Gr} \cdot \frac{1}{\pi K^4} = & \frac{m^2 \rho_1^2}{2} \left(1 - \frac{r_0^4}{B^2}\right) \left\{ m^2 \rho_1^2 \left(1 - 3 \frac{r_0^4}{B^2}\right) + 4 \frac{r_0^4}{B} \right\} \\
 & - \frac{\rho_1^2}{2} \left(1 - \frac{r_0^4}{A^2}\right) \left\{ \rho_1^2 \left(1 - 3 \frac{r_0^4}{A^2}\right) + 4 \frac{r_0^4}{A} \right\} \\
 & - 2r_0^8 (m^2 - 1) \rho_1^2 \frac{1}{A \cdot B} \left\{ 2 + c^2 \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right) \right\} \left(1 + \frac{c^2}{r_0^2} - 2 \sin^2 \beta\right) \\
 & - 2r_0^4 \frac{\rho_1^2}{c^4} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c}{\rho_1}\right)^{2k} \left[ A \left(1 - \frac{r_0^4 c^4}{A^4}\right) - B \frac{m^2}{m^{2k}} \left(1 - \frac{r_0^4 c^4}{B^4}\right) \right. \\
 & \left. + k \frac{m^2 - 1}{m^{2k} - 1} (B - A) \left\{ \left(1 - \frac{r_0^2 c^2}{A \cdot B}\right)^2 + 4 \frac{r_0^2 c^2}{A \cdot B} \sin^2 \beta \right\} \right], \\
 A = & \rho_1^2 - c^2, \quad B = \rho_2^2 - c^2, \quad m = \rho_2 / \rho_1.
 \end{aligned}$$

を得る。

### あ と が き

本報告は、(2.1)式で与えられる写像関数をもって表わされる中空翼型断面をもつ棒の振りに関する一般解を示した。

特定の断面形状についての(2.1)式中の常数値および $\rho_1$ 、 $\rho_2$ の決定と、それによる振りの計算結果および実験結果との比較については、後報で発表する予定である。

なお、本学部故藤井忠二教授、半沢宏教授の御教示に感謝の意を表する次第である。

### 参 考 文 献

- 1) N. I. Muskhelishvili: Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, R. Noordhoff Ltd., (1953).
- 2) 生井正之: 日本機械学会論文集, 第20巻, 第95号(昭29).