板及び円管の残留主応力測定理論

——Baldwin 法及び Sachs–Espey 法に対する
積分方程式による考察——

土 肥 修

The Theories on the Measurements of the Principal Residual Stresses in Plate and Tube

Considerations for Baldwin's and Sachs-Espey's
Methods from the Integral Equations.

Osamu Doi

Abstract

Baldwin published a method for measuring single principal residual stress in plate not symmetrically distributed for the center plane with successive approximating calculation by removing a definite thin layer successively from one surface of the plate.

Baldwin's formula is deformed to the integral equation and the solution of it must coincide with the analytical formula proposed by the author and by Treuting and Read.

Baldwin considered only one principal stress, where the author and Treuting and Read took 2 principal stresses into consideration.

In 1927 Sachs set forth a Boring Out Method to be used in the determination of the principal residual stresses in cylinder. However, considerable difficulties and errors were encountered when this method was applied to thin walled tube or cylindrical shell. Thus in 1941 Sachs and Espey proposed another method.

In this new method Sachs and Espey considered 2 principal stresses in a tube. By cuting off a circumferential narrow ring and a longitudinal narrow tablet from the tube, they calculated the residual stresses with a formula from the deformations of test pieces in response to each layer by successive approximation.

Sachs-Espey's formula is also considered to be the integral equation and an analytical formula is proposed by solving the integral equation and it is suggested that this must coincide with the formula set forth by the author to calculate the 3 principal residual stresses in the outer layer of a cylindrical body.

目　　次

はしがき

平板の残留主応力測定法として Baldwin 法[4]，円管の残留主応力測定法として Sachs-Espey[7] 法が発表されているが，之等は共に遂次近似計算を繰り返して応力を求める方法をとっている。

著者は，残留主応力の機械的測定法における応力と歪の関係式が，すべて積分方程式によって表現され，これを解く事によって解析的な残留主応力計算式に到達するものと考へているが，Baldwin 法，Sachs-Espey 法もその関係式を積分方程式として考慮した結果，共に著者[2),8)]の求めた計算式に一致する事がたしかめられた。

1. Baldwin 法

元来，円筒の軸方向応力のみが存在する場合について考えられた Heyn-Bauer 法[1] (1911) は，中心面に対して対称な応力分布を持ち，一方向にのみ応力が存在する特別な場合に限り，板の残留応力測定法として応用する事が出来る。

此の方法は，一方向応力のみしか考えない為に，実際には無視した応力の影響で，測定値がかなり過大若しくは過小に評価される危険がある。

著者[2] は，板の一方の側から順次薄層を取り去りつつ (これに直流電解法を採用した)，変化する曲率を測定して，一般に中立面に対して非対称的に残留する二方向主応力を計算する方法を，積分方程式を解く事によって導いたが (1949)，その後，Treuting & Read[3] (1951) が，全く同一の結果を発表している。

Baldwin[4] (1949) も，板の一方の側から順次薄層を取り去る方法で，中心面に対して非対称的に分布する残留主応力を求める方法を発表しているが，この方法は一方向の主応力のみしか考慮しておらず，且つ，次にその概略を述べる様に，歪の測定値と応力との間に成立する関係式 (之が実は積分方程式である) によってそのまま遂次近似の数値計算を繰り返す方法をとっている。

此の関係式を積分方程式として解けば，残留応力を一義的に決定する計算式が得られる筈であり，著者及び Treuting & Read の与えた式と同一の結果に帰するものと想像されるが結果は違う。之は後に述べる様に，最初に立てた方程式中の符号のミスによるもので，符号を整理すれば同一の結果に達する。

1. 1. Baldwin 法の概略

残留主応力を測定すべき板について，一方の側から薄層を取り去る時

t_0 = 板　厚

t = 取去った残りの板厚

S_t = 板の任意の層に残留する長さ方向の真の応力

S_a = 最後に取り去った薄層 dt に存在していた応力

S_b = 厚さ t 迄取り去った為に生じた曲げモーメントによって，次に取り去るべき表面に附加された応力

S_c = 厚さ t 迄取り去った為に生じた面内力によって，次に取り去るべき表面に附加された応力

f = 厚さ t 迄取り去られた為に生じた試片の，長さ L に亘る撓み

df = dt なる層の応力 S_a が取り去られた為に変化した撓み

とすれば，

$$S_t = S_a - S_b - S_c \tag{1.1}$$

$$S_a = \frac{4}{3}\frac{E \cdot t^2}{L^2}\frac{df}{dt} \tag{1.2}$$

$$S_b = \frac{4E \cdot t \cdot f}{L^2} \tag{1.3}$$

$$S_c = \frac{1}{t}\int_t^{t_0} S_t \cdot dt = \frac{1}{t}\int_t^{t_0}(S_a - S_b - S_c)\,dt \tag{1.4}$$

なる関係が成立する。

Baldwin の方法は，次の様な逐次近似計算である。

(1)　t の函数として f を目盛る。

(2)　式 (1. 2), (1. 3) から夫々の t に対して S_a, S_b を計算する。

(3)　式 (1. 1) において，先ず $S_c=0$ として S_t の第 1 近似値

$$S_t = S_a - S_b \tag{1.5}$$

を計算する。

(4)　S_t の第 1 近似値を用いて，式 (1. 4) から S_c を求める。

(5)　この S_c を式 (1. 1) に入れて S_t の第 2 近似値を求める。

(6)　以下同様に，式 (1. 4), (1. 1) を順次使って S_t の第 3, 第 4…… 近似値を計算し，S_t が

一定の値に収斂すれば，その値を以って正解とする。

1. 2. 積分方程式の解

Baldwin の方法は，上の関係式 (1. 1)〜(1. 4) を逐次近似計算によって解いた事になるが，之等を解析的に解けば，一義的な残留主応力計算式が導ける筈で，次にその解を示す。

即ち，先ず式 (1. 2)，(1. 3)，(1. 4) を式 (1. 1) に入れれば，次の形の積分方程式となる。

$$S_l = \frac{4Et^2}{3L^2}\frac{df}{dt} - \frac{4E\cdot t}{L^2}\cdot f - \frac{1}{t}\int_t^{t_0} S_l d\tau \tag{1. 6}$$

両辺に t を乗じ，t で微分して整理すれば

$$\frac{dS_l}{dt} = \frac{4E\cdot t^2}{3L^2}\frac{d^2f}{dt^2} - \frac{8E}{L^2}\cdot f$$

t によって積分すれば

$$S_l = \frac{4E}{3L^2}\left(t^2\frac{df}{dt} - 2t\cdot f + 4\int_t^{t_0} f\cdot d\tau\right) + C \tag{1. 7}$$

積分常数 C は，式 (1. 7) が常に式 (1. 6) を満足すべき条件から，$C=0$ で，結局 S_l の解は

$$S_l = \frac{4E}{3L^2}\left(t^2\frac{df}{dt} - 2\cdot tf + 4\int_t^{t_0} f\cdot d\tau\right) \tag{1. 8}$$

となり，式 (1.8) はこの方法による残留応力計算式である。

式 (1. 8) は然し，著者の与えた式[2]，及び Treuting & Read[3] の求めた式と比べ，係数及びその符号が異なる。

今，撓み f の符号と応力の関係を厳密に再考する。先ず

(i) 薄層を取り去る表面側に凸なる場合に f の符号を正とすれば，S_a の符号が変り，式 (1. 2) のかわりに

$$S_a = -\frac{4}{3}\frac{E\cdot t^2}{L^2}\frac{df}{dt} \tag{1. 2′}$$

を採用せねばならず，積分方程式 (1. 6) は，

$$S_l = -\frac{4E\cdot t^2}{3L^2}\frac{df}{dt} - \frac{4E\cdot t}{L^2}\cdot f - \frac{1}{t}\int_t^{t_0} S_l\cdot d\tau \tag{1. 6′}$$

となり，解は前と同様に取扱えば，

$$S_l = -\frac{4E}{3L^2}\left(t^2\frac{df}{dt} + 4tf - 2\int_t^{t_0} f\cdot d\tau\right) \tag{1. 8′}$$

となって，著者及び Treuting & Read の計算式と一致する。

次に，符号のとり方を逆にし，

(ii) 薄層を取去る表面側に凹なる場合の f に正号をつければ，S_b の符号が変り，式 (1. 3) のかわりに

$$S_b = -\frac{4Et\cdot f}{L^2} \qquad (1.3')$$

となるから，積分方程式(1. 6)は，

$$S_l = \frac{4Et^2}{3L^2}\frac{df}{dt} + \frac{4E\cdot t}{L^2}\cdot f - \frac{1}{t}\int_t^{t_0} S_l d\tau \qquad (1.6)''$$

と書きかえられ，之を解いて残留応力計算式

$$S_l = \frac{4E}{3L^2}\left(t^2\frac{df}{dt} + 4t\cdot f - 2\int_t^{t_0} f\cdot d\tau\right) \qquad (1.8'')$$

が得られる。

式(1. 8′), (1. 8″)の相違は，f の符号のとり方が逆な為に，式全体の符号が異なるだけで，係数関係は等しい。

即ち，Baldwin 法は，式(1. 8′)又は(1. 8″)によって一義的に残留応力を計算する方法に帰する事が出来るし，その計算式は，著者の与えた撓み法及び Treuting & Read の計算式と，係数的には一致する。ただ異なる点は，著者及び Treuting & Read が二方向主応力を考慮したのに対し，Baldwin は一方向主応力しか考えていない点である。

2. Sachs-Espey 法

Heyn-Bauer 法[1]は，円筒の軸方向応力のみを仮定しているが，Mesnager[5] (1919)は，横方向応力を無視した為の影響を調べ，之を考慮する新しい方法を提唱し，その後 Sachs[6] (1927)が更に簡単な式にまとめ，Sachs-Mesnager 法が出来た。Sachs' Boring-Out Method が之である。

Sachs-Mesnager 法では，中実又は中空円筒の内部から，Mesnager 法では外部から，同心円筒形に薄層を除きつつ，取去った層に存在する周方向，軸方向の残留主応力を測定し，最後に径方向の残留主応力を求めるもので，原理的には同じである。

所が，薄肉円筒については Sachs-Mesnager 法又は Mesnager 法は適用し難く，その測定誤差も大きい。Sachs-Espey 法[7] (1941)は此の欠点を補なって，薄肉円管の残留二方向主応力を測定する事を目的とし，種々の厚さに腐蝕した後，周方向，軸方向に細長い試片をとり，夫々の試片について次に述べる測定を行ない，逐次近似計算によって残留主応力を求めるものである。

此の場合にも，Sachs-Espey の関係式が積分方程式である事に着目して之を解けば，残留主応力を一義的に決定する計算式が導かれる筈である。

著者[8]は別に，表面ロール加工した車軸表層部の残留主応力を測定する方法を提唱した(1951)が，之は板の撓み法を応用したもので，残留主応力を測定せんとする表層部の適当な厚さを残して穿孔し，薄肉円管を作り，周方向の円環試片，軸方向の短冊試片を取り出して，夫

々一面から薄層を腐蝕又は電解によって順次取り去りつつ，試片の曲率変化を測定し，夫々の層の残留二主応力を求め，それに円環，短冊試片を取り出す際の応力変化分及び穿孔による応力変化分を別々に測定して合成する事により，初状態における周及び軸方向残留主応力を計算し，最後に周方向応力を積分して径方向応力を得る方法である。

Sachs-Espey の関係式から積分方程式を導き，之を解いて得られる解の形は，著者の与えた円筒表層部残留三主応力測定法の計算式に一致する。ただ Sachs-Espey の求める応力は実は見掛の応力で，真の応力でない点に注意を要する。

2. 1. Sachs-Espey 法の概略

先ず周方向試片については，閉じた円管を1カ所で切断，開放し，外側から順次適当な腐蝕剤で溶解しつつ

d = 円管の厚さ

x = 円管表面から考えている層迄の距離

S_c = 求める x 層の周方向応力

S_1 = 閉じた円管を一端で開放する為に変化する x 層の応力

S_2 = x 層迄取り去った為に生じた面内力によって変化する応力

S_3 = x 層迄取り去った為に生じた曲げモーメントによって変化する応力

S_4 = dx の層を取り去った為に生じた曲げモーメントの変化により変る応力

とすれば

$$S_c = S_1+S_2+S_3+S_4 \tag{2.1}$$

$$S_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(d-2x)\frac{\varDelta D_1}{D_m^2} \tag{2.2}$$

$$S_2 = -\frac{1}{d-x}\int_0^x (S_c-S_1)\,dx \tag{2.3}$$

$$S_3 = \frac{E}{1-\nu^2}(d-x)\frac{\varDelta D}{D_m^2} \tag{2.4}$$

$$S_4 = -\frac{E}{1-\nu^2}\frac{(d-x)^2}{3D_m^2}\frac{dD}{dx} \tag{2.5}$$

但し，$\varDelta D_1$ = スリットを入れて開放した為の直径の変化

D_m = スリットを入れる前後の平均直径

$\varDelta D$ = x 層迄取り去った為の直径変化

E = 縦弾性係数

ν = ポアソン比

なる関係が成り立つ事から，式 (2.2)〜(2.5) を式 (2.1) に入れ，

$$S_c = \frac{E}{1-\nu^2}(d-2x)\frac{\Delta D_1}{D_m^2} + \frac{E}{1-\nu^2}(d-x)\frac{\Delta D}{D_m^2} - \frac{E}{1-\nu^2}\cdot\frac{(d-x)^2}{3D_m^2}\cdot\frac{dD}{dx} - \frac{1}{d-x}\int_0^x (S_c - S_1)\,dx \tag{2.6}$$

の関係を導いた。

残留主応力計算は，次の様に逐次近似計算による。

(1) 腐蝕除去した厚さに対し，直径変化を記録して関係曲線を作る。

(2) 式 (2.2), (2.4), (2.5) から S_1, S_2, S_3 を計算し，溶解厚さの函数として目盛る。

(3) S_2 は不明であるから，第1近似値として $S_2=0$ とおき

$$S_c = S_1 + S_3 + S_4 \tag{2.7}$$

を以って S_c の第1近似値とする。

(4) 式 (2.1) にかわって

$$S_c - S_1 = S_3 + S_4$$

と近似し，式 (2.3) に入れて S_2 の第2近似値を求める。

(5) この S_2 を用いて

$$S_c - S_1 = S_2 + S_3 + S_4$$

を求め，再び式 (2.3) から S_2 の第3近似値を計算する。

(6) 以上の計算を繰り返し，S_2 が一定の値に収斂すれば，これを以って S_2 の確値として，式 (2.1) から S_c を求める。

即ち，各層に対して以上の逐次近似計算を繰り返す繁がある。

次に軸方向応力 S_l については，円管から軸方向に細長い試片を切りとり，外側から腐蝕溶解しつつ，全く同様にして

$$S_l = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \tag{3.1}$$

$$S_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(d-2x)\cdot f_1 \tag{3.2}$$

$$S_2 = -\frac{1}{d-x}\int_0^x (S_l - S_1)\,dx \tag{3.3}$$

$$S_3 = \frac{E}{1-\nu^2}(d-x)\cdot f \tag{3.4}$$

$$S_4 = -\frac{E}{1-\nu^2}\frac{(d-x)^2}{3}\frac{df}{dx} \tag{3.5}$$

但し，$2\cdot f_1$ = 円管から短冊試片を切り取った為の試片の曲率変化

$2\cdot f$ = 短冊試片の一方側から x 層迄取り去った時の曲率変化

なる事から，

$$S_t = \frac{E}{1-\nu^2}(d-2x)\cdot f_1 + \frac{E}{1-\nu^2}(d-x)\cdot f - \frac{E}{1-\nu^2}\,\frac{(d-x)^2}{3}\,\frac{df}{dx} - \frac{1}{d-x}\int_0^x (S_t - S_1)\cdot dx \tag{3.6}$$

計算方法は，S_c について行なったと同様の逐次近似計算である。

2. 2. 積分方程式の解

Sachs–Espey の関係式 (2. 6), (3. 6) は Volterra 型の積分方程式であるから，之を解いて解を与えれば，残留主応力を一義的に決定する計算式を導く事が出来る。式 (2. 6), (3. 6) は全く同じ形であるから，解法は方程式 (3. 6) について考える。式中 f は x の函数，f_1 は x に無関係の定数であるから，式 (3. 2) の S_1 を用いて式 (3. 6) を変形すれば，

$$S_t(x) = \frac{Ef_1}{1-\nu^2}(d-x) + \frac{E}{1-\nu^2}(d-x)\cdot f(x) - \frac{E(d-x)^2}{3(1-\nu^2)}\cdot\frac{df}{dx} - \frac{1}{d-x}\int_0^x S_t(\xi)\cdot d\xi \tag{3.7}$$

両辺に $(d-x)$ を乗じ，x で微分して整理すれば，

$$\frac{dS_t}{dx} = -\frac{2E}{1-\nu^2}f_1 - \frac{2E}{1-\nu^2}f(x) + \frac{2E}{1-\nu^2}(d-x)\cdot\frac{df}{dx} - \frac{E}{3(1-\nu^2)}(d-x)^2\cdot\frac{d^2f}{dx^2}$$

之を x について積分し

$$S_t = -\frac{2Ef_1}{1-\nu^2}\cdot x - \frac{E}{3(1-\nu^2)}\left\{(d-x)^2\frac{df}{dx} - 4(d-x)\cdot f + 2\int_0^x f(\xi)\cdot d\xi\right\} + C \tag{3.8}$$

積分常数 C は，式 (3. 8) が常に式 (3. 7) を満足すべき条件から，

$$C = \frac{Ef_1\cdot d}{1-\nu^2} \tag{3.9}$$

となる。C は円管から試片を切り出した為の表面 $x=0$ における応力変化を表わす。

式 (3. 8) は結局

$$S_t = \frac{E\cdot f_1}{1-\nu^2}(d-2x) - \frac{E}{3(1-\nu^2)}\left\{(d-x)^2\frac{df}{dx} - 4(d-x)\cdot f + 2\cdot\int_0^x f(\xi)\cdot d\xi\right\} \tag{3.10}$$

となり，最終の解を得る。

全く同様に，S_c についても，ΔD_1 が x の函数でない事を考え，式 (2. 2) の S_1 を方程式 (2. 6) に入れて積分方程式を解き，積分常数を定めれば，

$$S_c = \frac{E}{1-\nu^2}\,\frac{\Delta D_1}{D_m^2}(d-2x) - \frac{E}{3(1-\nu^2)\cdot D_m^2}\left\{(d-x)^2\frac{dD}{dx} - 4(d-x)\cdot\Delta D + 2\int_0^x \Delta D(\xi)\cdot d\xi\right\} \tag{2.10}$$

が解となる。

式 (2. 10), (3. 10) は，残留主応力計算式で，右辺第 2 項は，著者が円筒[8] 及び板[2] について

与えた式，並びに Treuting & Read[3] が平板について与えた式と比べ，係数的には全く同じ形である。即ち，Sachs–Espey 法は，著者の行なった解析的な方法を，逐次近似計算によって解く事に相当する。

然し以上の計算で，夫々 ΔD_1，ΔD の変位は S_c; f_1，f の変位は S_l のみによって定まるものとしているが，実は ΔD_1，ΔD，f_1，f とも S_c，S_l 両方の影響をうけたものである。従って Sachs–Espey の求める S_c，S_l は，そのままでは真の応力ではない。云わば見掛けの残留主応力とも云ふべき値である。

真の残留主応力は，S_c^*，S_l^* とおけば，

$$\left.\begin{aligned} S_c^* &= S_c+\nu\cdot S_l \\ S_l^* &= S_l+\nu\cdot S_c \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

で計算しなければならぬ[2),8)]。この点注意を要する。

む　す　び

1. 平板残留主応力測定法としての Baldwin 法および円管残留主応力測定法としての Sachs–Espey 法は共に逐次近似計算方式である。これらの関係式を積分方程式と見倣して解く事により，解析的な応力計算式が導かれ，それらによれば，残留応力を各層の函数として一義的に計算決定する事が出来る。

2. Baldwin 法は一軸主応力を考慮するに留まるが，各項の符号を正確に再考し，二軸主応力を考慮すれば，積分方程式の解として得られる応力計算式は，著者が積分方程式から導いて与えた撓み法及び Treuting–Read の計算式と一致する。

3. Sachs–Espey の関係式を積分方程式として解いて得られる応力計算式も，著者の与えた計算式に一致する。

文　　献

1) E. Heyn and O. Bauer: "On the Stresses in Cold Drawn Metals". Internationale Zeitschrift für Metallographie, Vol. 1, 1911.

2) 久野陸夫, 土肥修: "残留内力の測定", 日本機械学会講演会発表, 1949; "金属板の残留内力測定", 北大工学部研究報告, 第9号, 1953.

3) R. G. Treuting and W. F. Read: "A Mechanical Determination of Biaxial Residual Stress in Sheet Materials". Journal of Applied Physics, Vol. 22, No. 2, 1951.

4) W. M. Baldwin: "Residual Stresses in Metals". Marburg Lecture. Proceedings, American Society for Testing Materials, Vol. 49, 1949.

5) M. Mesnager: "Methods de Determination des Tensions Existant dans un Cylindre Circulaire". Comptes Rendus hebedaires des Seances de l'Academie des Sciences, Vol. 169, 1919.

6) G. Sachs: "Evidence of Residual Stresses in Rods and Tubes", Zeitschrift für Metallkunde, Vol. 19, 1927.

7) G. Sachs and G. Espey: "New Method for Determination of Stress Distribution in Thin Walled Tubing". American Institute of Mining and Metallurgical Engineers, Metals Technology

Tech. Pub. 1384, 1941.

8) 土肥　修: "円筒表層部残留3主応力測定法――表面ロール加工による車軸表層部の残留主応力" 北大工学部研究報告, 第27号, 1961.