HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	せん断流における非対称渦列の安定性について
Author(s)	木谷，勝；有江，幹男
Citation	北海道大學工學部研究報告，37，37-49
Issue Date	1965-06-12
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40762
Type	departmental bulletin paper
File Information	37_37-50.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

せん断流における非対称渦列の安定性について

木　谷　　勝
有　江　幹　男

The stability of asymmetrical double rows of vortices in a uniform shear flow

Masaru KIYA
Mikio ARIE

Abstract

In this paper, the authors present a flow model of the vortex system which would be originated in the wake of a two-dimensional bluff obstacle in a uniform shear flow $u=Gy+U$, together with a discussion on the stability of the vortex system concerned.

The stability area is shown in figure 4 in terms of γ and p, where γ is the circulation ratio Γ_2/Γ_1 and p the spacing ratio times π. This flow model can simply be reduced to the Kármán vortex street when the velocity profile is uniform, its condition of stability being $h/l=0.281$ which is indicated as K in figure 4.

From the momentum considerations, moreover, the drag D of the body giving rise to the system can be evaluated as

$$D=\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2l}\rho hU_v+\frac{\rho(\Gamma_1^2+\Gamma_2^2)}{4\pi l}-\frac{\rho h\Gamma_1\Gamma_2}{2l^2}\tanh\frac{\pi h}{l},$$

where ρ is the density of the fluid, U_v is the velocity of the vortex system relative to the obstacle, h is the lateral spacing between the vortex rows, l is the distance between consecutive vortices of the same row and Γ_1, Γ_2 are the circulations of the vortices which belong to the vortex system. This formula is equivalent to that given by Kármán when $G=0$, namely $\Gamma_1=\Gamma_2=\Gamma$.

1. 緒　　言

一様流の中に置かれたにぶい二次元物体の後流中にはレイノルズ数の適当な範囲でいわゆるカルマン渦列が形成される。安定した渦列内では渦のピッチ l と二つの渦列の間隙 h との間に $h/l=0.281$ なる関係が存在し，この場合に限りカルマン渦列が安定でありうることが Kármán[1] によって最初に指摘された。さらに Kármán は渦によって運ばれる運動量を考察することにより当該物体に作用する抗力 D に対する式として

$$D=\rho U^2h\left[2.83\frac{u}{U}-1.12\left(\frac{u}{U}\right)^2\right]$$

を与えている。ここに U は一様流の速度，u は渦列の移動速度，ρ は流体の密度である。この式を用いて抗力を計算するためには u/U なる比の値が既知でなければならぬが，これは実験によって求める以外になく，u/U を理論的に定めることは今日までのところ不可能である。わずかに Heisenberg[2] が平板の場合について行なった解析があるが，その根底となっている仮定は Prandtl も指摘しているように[2] 不完全なものであった。Kármán の与えた抗力の式は u/U として実測値を入れる限り実験と比較的よく一致する結果を与える。

Kármán が最初にこの渦列の安定性を論じてから多数の関係論文が発表されている。中でも Rosenhead[3] は渦列の安定性におよぼす境界壁の影響を詳細に論じている。Levy & Hooker[4] は物体への近寄り流れが一様でなく，渦列の中心線で最大となっているような対称形の速度分布をなす場合にはカルマン渦列は安定ではありえないことを明らかにしている。

本報告は物体への近寄り流れがこのような対称性を持たない場合の一例として，直線的な速度分布 $u=Gy+U$ を有するせん断流についてカルマン渦列の安定性を論じたものである。

2. せん断流における渦列

せん断流中に置かれたにぶい二次元物体の後流中に生ずる渦列として Fig. 1 に示すような配列のものを仮定する。一つの渦列に属する渦のピッチを l，上下の渦列の間隙を h，それぞれの渦列に属する渦の循環を Γ_1 および $-\Gamma_2$ ($\Gamma_1>0$, $\Gamma_2>0$) とし，下側の渦列に属する渦は上

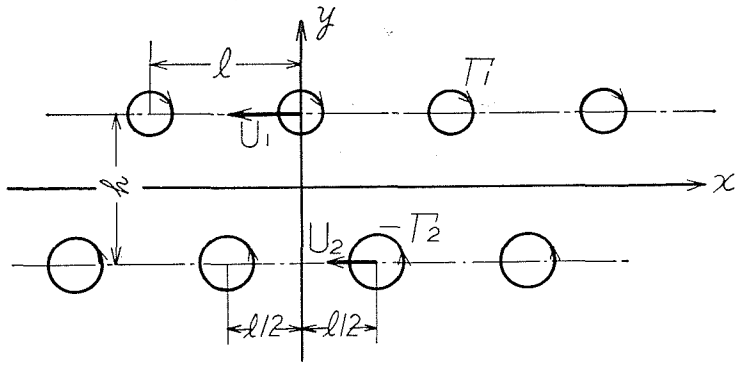

Fig. 1.

側の渦列に属する渦の半ピッチの位置に配列されているものとする。一様流中に置かれた物体の後流中に生ずるカルマン渦列では $\Gamma_1=\Gamma_2=\Gamma$ であるから，Fig. 1 の渦列は特別な場合としてカルマン渦列を含んでいる。

循環 Γ_1 および $-\Gamma_2$ なる渦から構成されている上下二つの渦列による複素ポテンシャルをそれぞれ W_1, W_2 とすれば

$$\left.\begin{aligned} W_1 &= \frac{i\Gamma_1}{2\pi}\log\sin\frac{\pi}{l}\left(z-i\frac{h}{2}\right) \\ W_2 &= -\frac{i\Gamma_2}{2\pi}\log\cos\frac{\pi}{l}\left(z+i\frac{h}{2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

であるから Fig. 1 のように二つの渦列が合成された場合の複素ポテンシャルは

$$W=\frac{i\Gamma_1}{2\pi}\log\sin\frac{\pi}{l}\left(z-i\frac{h}{2}\right)-\frac{i\Gamma_2}{2\pi}\log\cos\frac{\pi}{l}\left(z+i\frac{h}{2}\right) \tag{2}$$

となる。渦列が単独に存在する場合には渦は静止しているがこのように二つの渦列があると上側の渦列に属する渦は下側の渦列に属する渦によって誘起される速度のために x 軸の負の向きにある速度を獲得し，下側の渦列についても同様のことがいえる。このような移動速度を上側の渦列について U_1，下側の渦列について U_2 とすると

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= \left.\frac{dW_2}{dz}\right|_{z=i\frac{h}{2}} = -\frac{\Gamma_2}{2l}\tanh\frac{\pi h}{l} \\ U_2 &= \left.\frac{dW_1}{dz}\right|_{z=-i\frac{h}{2}+\frac{l}{2}} = -\frac{\Gamma_1}{2l}\tanh\frac{\pi h}{l} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

となる。U_1 および U_2 はそれぞれ $z=i\dfrac{h}{2}$，$z=-i\dfrac{h}{2}+\dfrac{l}{2}$ なる位置にある渦の移動速度であるが，上下の渦列に属する渦はそれぞれすべて等価であるからこのような計算しやすい代表的な渦について求めた速度はそれぞれの渦列全体としての移動速度に一致する。

一般に $\Gamma_1\neq\Gamma_2$ であるから U_1 と U_2 とは等しくない。したがって Fig. 1 に示したような渦の配列はこのままでは保持されないことになる。そこで後流中においても近寄り流れの速度分布 $u=Gy+U$ がそのままの形で持続しているものと仮定し，U_1 および U_2 にこれを重畳す

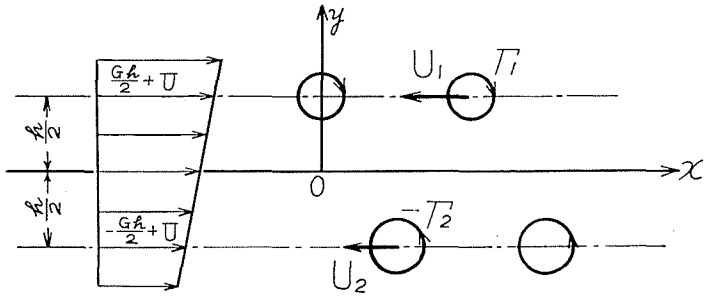

Fig. 2.

ることにより上下二つの渦列の速度が全体として同一になるようにする。Fig. 2 を参照すれば明らかなようにこの条件は次のように書ける。

$$\frac{Gh}{2}+U+U_1=-\frac{Gh}{2}+U+U_2$$

すなわち

$$Gh=\frac{\Gamma_2-\Gamma_1}{2l}\tanh\frac{\pi h}{l}. \tag{4}$$

$G>0$ とすれば $\Gamma_2>\Gamma_1$ となり，下側の渦は上側の渦よりも大きな循環を持たなければならない。

3. 渦の移動方程式

上側の渦列および下側の渦列に属する渦が，Fig. 1 に示した平衡位置からそれぞれ $(x_m,\ y_m)$, $(x'_n,\ y'_n)$ $(m,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots)$ だけ変位したものとし，二つの渦列に属するそれぞれ任意の一つの渦に注目して，これらの渦が呈する運動を調べる。この代表的な渦として上側の渦列では $(0,\ h/2)$，下側の渦列では $(l/2,\ -h/2)$ なる位置にある渦をとることにする。渦列は二種類の無限個の渦から構成されていてそれぞれの渦列に属する渦はすべて等価であるから，議論しやすい特定の渦について考察しても一般性が失なわれることはない。

平衡位置から $(x_m,\ y_m)$, $(x'_n,\ y'_n)$ だけ変位したときの上下の渦列に属する渦の座標はそれぞれ

$$\left(ml+x_m,\ \frac{h}{2}+y_m\right),\quad \left(\left(n+\frac{1}{2}\right)l+x'_n,\ -\frac{h}{2}+y'_n\right),\quad m,n=0,\ \pm1,\pm2,\cdots$$

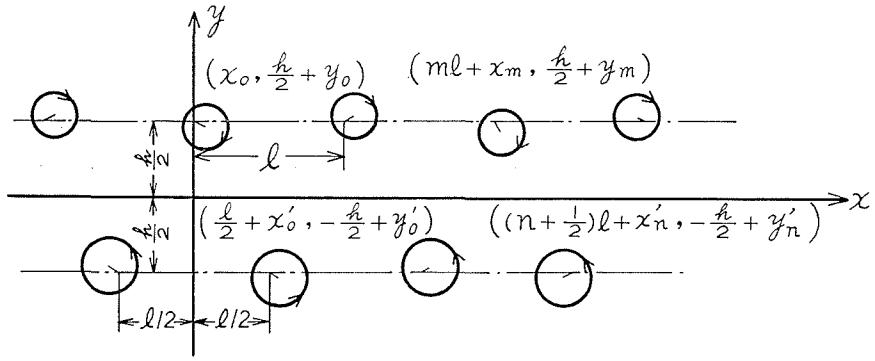

Fig. 3.

で表わされ，注目した渦の座標は $\left(x_0,\ \frac{h}{2}+y_0\right)$, $\left(\frac{l}{2}+x'_0,\ -\frac{h}{2}+y'_0\right)$ となる。このように平衡位置から変位したすべての渦によって $\left(x_0,\ \frac{h}{2}+y_0\right)$ なる点に移動した渦に誘起される速度 u_i, v_i は

$$u_i=\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{y_0-y_m}{r_{0m}^2}-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{y_0-y'_n+h}{r_{0n}^2},$$

$$v_i=-\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{x_0-x_m-ml}{r_{0m}^2}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{x_0-x'_n-\left(n+\frac{1}{2}\right)l}{r_{0n}^2},$$

ただし

$$r_{0m}^2=(x_0-x_m-ml)^2+(y_0-y_m)^2,$$

$$r_{0n}^2=\left\{x_0-x_n'-\left(n+\frac{1}{2}\right)l\right\}^2+(y_0-y_n'+h)^2$$

であり，ここに $\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'$ は $m=0$ を除いたすべての整数値に対する和を表わす。同様に $\left(\frac{l}{2}+x_0',\ -\frac{h}{2}+y_0'\right)$ なる点に移動した渦に誘起される速度 u_i', v_i' は

$$u_i'=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{y_0'-y_m-h}{r_{0m}'^2}-\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{y_0'-y_n'}{r_{0n}'^2},$$

$$v_i'=-\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{x_0'-x_m-\left(m-\frac{1}{2}\right)l}{r_{0m}'^2}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{x_0'-x_n'-nl}{r_{0n}'^2},$$

ただし

$$r_{0m}'^2=\left\{x_0'-x_m-\left(m-\frac{1}{2}\right)l\right\}^2+(y_0'-y_m-h)^2,$$

$$r_{0n}'^2=(x_0'-x_n'-nl)^2+(y_0'-y_n')^2$$

である。x_m, y_m および x_n', y_n' は h, l に比較して微小なるものとし x_m/l, y_m/l 等の二次以上の高次の項を省略すれば u_i, v_i, u_i', v_i' はそれぞれ

$$u_i=\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{y_0-y_m}{m^2l^2}-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{h}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2l^2+h^2}$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{2\left(n+\frac{1}{2}\right)lh}{\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2l^2+h^2\right\}^2}(x_0-x_n')$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2l^2-h^2}{\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2l^2+h^2\right\}^2}(y_0-y_n'),$$

$$v_i=\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{x_0-x_m}{m^2l^2}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2l^2+h^2}{\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2l^2+h^2\right\}^2}(x_0-x_n')$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{2\left(n+\frac{1}{2}\right)lh}{\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2l^2+h^2\right\}^2}(y_0-y_n');$$

$$u_i'=-\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{h}{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2l^2+h^2}-\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{2\left(m-\frac{1}{2}\right)lh}{\left\{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2l^2+h^2\right\}^2}(x_0'-x_m)$$

$$+\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2l^2-h^2}{\left\{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2l^2+h^2\right\}^2}(y_0'-y_m)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{y_0'-y_n'}{n^2l^2},$$

$$v_i'=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2l^2-h^2}{\left\{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2l^2+h^2\right\}^2}(x_0'-x_m)$$

$$+\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{2\left(m-\frac{1}{2}\right)lh}{\left\{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2l^2+h^2\right\}^2}(y_0'-y_m)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{x_0'-x_n'}{n^2l^2}$$

となる。

注目した渦の変位速度 dx_0/dt, dy_0/dt は

$$\frac{dx_0}{dt}=\left\{G\left(\frac{h}{2}+y_0\right)+U+u_i\right\}-\left\{G\frac{h}{2}+U+U_1\right\},$$

$$\frac{dy_0}{dt}=v_i$$

によって与えられ，dx_0'/dt, dy_0'/dt についても同様であるから，u_i, u_i' の式において

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{h}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2l^2+h^2}=\frac{\Gamma_2}{2l}\tanh\frac{\pi h}{l}=-U_1,$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{h}{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2l^2+h^2}=\frac{\Gamma_1}{2l}\tanh\frac{\pi h}{l}=-U_2$$

なることに注意すれば

$$\frac{dx_0}{dt}=Gy_0+\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{y_0-y_m}{m^2l^2}-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{2\left(n+\frac{1}{2}\right)lh}{\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2l^2+h^2\right\}^2}(x_0-x_n')$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2l^2-h^2}{\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2l^2+h^2\right\}^2}(y_0-y_n'),\tag{5}$$

$$\frac{dy_0}{dt}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{x_0-x_m}{m^2l^2}-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2l^2-h^2}{\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2l^2+h^2\right\}^2}(x_0-x_n')$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{2\left(n+\frac{1}{2}\right)lh}{\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2l^2+h^2\right\}^2}(y_0-y_n'),\tag{6}$$

および

$$\frac{dx_0'}{dt}=Gy_0'-\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{2\left(m-\frac{1}{2}\right)lh}{\left\{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2l^2+h^2\right\}^2}(x_0'-x_m)$$

$$+\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2l^2-h^2}{\left\{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2l^2+h^2\right\}^2}(y_0'-y_m)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{y_0'-y_n'}{n^2l^2},\tag{7}$$

$$\frac{dy_0'}{dt}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2l^2-h^2}{\left\{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2l^2+h^2\right\}^2}(x_0'-x_m)$$

$$+\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{2\left(m-\frac{1}{2}\right)lh}{\left\{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2l^2+h^2\right\}^2}(y_0'-y_m)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{x_0'-x_n'}{n^2l^2}\tag{8}$$

が導かれる。いま x_m, y_m, x_n', y_n' に対して

$$x_m=\alpha\cos m\phi\,,\quad y_m=\beta\cos m\phi\,,$$

$$x_n'=\alpha'\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\phi\,,\quad y_n'=\beta'\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\phi$$

ただし

$$0\leqq\phi\leqq\pi$$

なる正弦攪乱を仮定し，これを (5) 式および (6) 式に代入すると

$$\frac{d\alpha}{dt}=\left(G+\frac{\Gamma_1}{2\pi l^2}A-\frac{\Gamma_2}{2\pi l^2}B\right)\beta+\beta'\frac{\Gamma_2}{2\pi l^2}C\,,\tag{9}$$

$$\frac{d\beta}{dt}=\left(\frac{\Gamma_1}{2\pi l^2}A-\frac{\Gamma_2}{2\pi l^2}B\right)\alpha+\alpha'\frac{\Gamma_2}{2\pi l^2}C\,,\tag{10}$$

ここに

$$A=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos m\phi}{m^2}=\frac{1}{2}\phi(2\pi-\phi)\,,$$

$$B=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-k^2}{\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+k^2\right\}^2}=\frac{\pi^2}{\cosh^2k\pi}\,,$$

$$C=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-k^2}{\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+k^2\right\}^2}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\phi$$

$$=\frac{\pi^2\cosh k\phi}{\cosh^2k\pi}-\frac{\pi\phi\cosh k(\pi-\phi)}{\cosh k\pi}\,,$$

$$k=h/l$$

となる。(7) 式および (8) 式に対しても同様の操作を行なうと

$$\frac{d\alpha'}{dt}=\left(G-\frac{\Gamma_2}{2\pi l^2}A+\frac{\Gamma_1}{2\pi l^2}B\right)\beta'-\beta\frac{\Gamma_1}{2\pi l^2}C\,,\tag{11}$$

$$\frac{d\beta'}{dt}=\left(-\frac{\Gamma_2}{2\pi l^2}A+\frac{\Gamma_1}{2\pi l^2}B\right)\alpha'-\alpha\frac{\Gamma_1}{2\pi l^2}C\tag{12}$$

が得られる。(9), (10), (11) および (12) 式において

$$\alpha=\alpha_0e^{\lambda t}\,,\quad\beta=\beta_0e^{\lambda t}\,,\quad\alpha'=\alpha_0'e^{\lambda t}\,,\quad\beta'=\beta_0'e^{\lambda t}$$

とおくと

$$-\alpha_0\lambda+\left(G+\frac{\Gamma_1}{2\pi l^2}A-\frac{\Gamma_2}{2\pi l^2}B\right)\beta_0+\beta_0'\frac{\Gamma_2}{2\pi l^2}C=0$$

$$\left(\frac{\Gamma_1}{2\pi l^2}A-\frac{\Gamma_2}{2\pi l^2}B\right)\alpha_0-\beta_0\lambda+\alpha_0'\frac{\Gamma_2}{2\pi l^2}C=0$$

$$-\beta_0\frac{\Gamma_1}{2\pi l^2}C-\alpha_0'\lambda+\left(G-\frac{\Gamma_2}{2\pi l^2}A+\frac{\Gamma_1}{2\pi l^2}B\right)\beta_0'=0$$

$$-\alpha_0\frac{\Gamma_1}{2\pi l^2}C+\left(-\frac{\Gamma_2}{2\pi l^2}A+\frac{\Gamma_1}{2\pi l^2}B\right)\alpha_0'-\beta_0'\lambda=0$$

となり，これから永年方程式

$$\begin{vmatrix} -\lambda & G+\frac{\Gamma_1}{2\pi l^2}A-\frac{\Gamma_2}{2\pi l^2}B & 0 & \frac{\Gamma_2}{2\pi l^2}C \\ \frac{\Gamma_1}{2\pi l^2}A-\frac{\Gamma_2}{2\pi l^2}B & -\lambda & \frac{\Gamma_2}{2\pi l^2}C & 0 \\ 0 & -\frac{\Gamma_1}{2\pi l^2}C & -\lambda & G-\frac{\Gamma_2}{2\pi l^2}A+\frac{\Gamma_1}{2\pi l^2}B \\ -\frac{\Gamma_1}{2\pi l^2}C & 0 & -\frac{\Gamma_2}{2\pi l^2}A+\frac{\Gamma_1}{2\pi l^2}B & -\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{13}$$

が導かれる。このような渦列が安定であるためには α, β, α', β' がすべて時間の増加と共に発散しないことが必要であり，(13)式は λ に関する四次方程式であるが，その根にある制限を加えることによって α, β, α', β' が発散しない場合を求めることができる。

4. 渦列の安定条件およびその安定領域

(13)式の左辺の行列式を $D(\lambda)$ とおき，これを展開すると

$$D(\lambda)=\lambda^4+a\lambda^2+b$$

ただし

$$a=\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi^2l^4}C^2+G\frac{\Gamma_2-\Gamma_1}{2\pi l^2}(A+B)-\frac{\Gamma_1^2+\Gamma_2^2}{4\pi^2l^4}(A^2+B^2)+\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\pi^2l^4}AB,$$

$$b=\left\{G^2-G\frac{\Gamma_2-\Gamma_1}{2\pi l^2}(A+B)+\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi^2l^4}(C^2-A^2-B^2)+\frac{\Gamma_1^2+\Gamma_2^2}{4\pi^2l^4}AB\right\}$$
$$\times\left\{\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi^2l^4}(C^2-A^2-B^2)+\frac{\Gamma_1^2+\Gamma_2^2}{4\pi^2l^4}AB\right\}$$

となる。$D(\lambda)=0$ の根は

$$\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-a+\sqrt{a^2-4b}},\quad \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-a-\sqrt{a^2-4b}}$$

の四つであるから，$\sqrt{-a+\sqrt{a^2-4b}}$ が $a'+ib'$ なる形の複素数であれば $-a'-ib'$ も $D(\lambda)=0$

の根になる。したがって a' の正負にかかわらず $e^{\lambda t}$ の中には時間と共に指数的に発散する項が必ず含まれてくる。それ故 $a'=0$, すなわち $\sqrt{-a+\sqrt{a^2-4b}}$ は純虚数または 0 でなければならない。同様に $\sqrt{-a-\sqrt{a^2-4b}}$ も純虚数または 0 でなければならない。a, b は共に実数であるから，この条件は

$$-a+\sqrt{a^2-4b} \leqq 0, \quad -a-\sqrt{a^2-4b} \leqq 0$$

となり，これらを簡単にすると

$$a \geqq 0, \quad b \geqq 0, \quad a^2-4b \geqq 0 \tag{14}$$

が得られる。いま簡単のために

$$\Gamma_1/\Gamma_2 = \gamma, \quad p = k\pi = \pi h/l, \quad x = k(\pi-\phi)$$

なる三つの記号を導入すると a, b および a^2-4b は (4) 式，すなわち

$$G = \frac{\Gamma_2-\Gamma_1}{2lh}\tanh\frac{\pi h}{l} = \frac{\pi\Gamma_1}{2l^2}(\gamma-1)\frac{\tanh p}{p} \tag{15}$$

なる関係式を考慮することにより次のように変形される。

$$\begin{aligned}\frac{4\pi^2l^4}{\Gamma_1^2}k^4a = {} & 2\gamma\frac{(p^2\sinh p\sinh x-px\cosh p\cosh x)^2}{\cosh^4 p} \\ & +(\gamma-1)^2 p\tanh p\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{p^2}{2}+\frac{p^2}{\cosh^2 p}\right) \\ & -(\gamma^2+1)\left\{\left(\frac{x^2}{2}-\frac{p^2}{2}\right)^2+\frac{p^4}{\cosh^4 p}\right\}+4\gamma\left(\frac{x^2}{2}-\frac{p^2}{2}\right)\frac{p^2}{\cosh^2 p},\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{4\pi^2l^4}{\Gamma_1^2}\right)^2 k^8b = {} & \left[(\gamma-1)^2p^2\tanh^2 p-(\gamma-1)^2 p\tanh p\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{p^2}{2}+\frac{p^2}{\cosh^2 p}\right)\right. \\ & +\gamma\left\{\frac{(p^2\sinh p\sinh x-px\cosh p\cosh x)^2}{\cosh^4 p}-\left(\frac{x^2}{2}-\frac{p^2}{2}\right)^2-\frac{p^4}{\cosh^4 p}\right\} \\ & \left.+(\gamma^2+1)\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{p^2}{2}\right)\frac{p^2}{\cosh^2 p}\right]\left[\gamma\left\{\frac{(p^2\sinh p\sinh x-px\cosh p\cosh x)^2}{\cosh^4 p}\right.\right. \\ & \left.\left.-\left(\frac{x^2}{2}-\frac{p^2}{2}\right)^2-\frac{p^4}{\cosh^4 p}\right\}+(\gamma^2+1)\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{p^2}{2}\right)\frac{p^2}{\cosh^2 p}\right],\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{4\pi^2l^4}{\Gamma_1^2}\right)^2 k^8(a^2-4b) = {} & \left[(\gamma+1)^2\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{p^2}{2}-\frac{p^2}{\cosh^2 p}\right)^2\right. \\ & \left.-4\gamma\frac{(p^2\sinh p\sinh x-px\cosh p\cosh x)^2}{\cosh^4 p}\right] \\ & \times(\gamma-1)^2\left\{p\tanh p-\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{p^2}{2}+\frac{p^2}{\cosh^2 p}\right)\right\}^2.\end{aligned} \tag{18}$$

$D(\lambda)=0$ の根 λ が純虚数または 0 であるための条件は (14) 式によって示されているが，(16), (17), (18) 式を見れば明らかなようにこの条件は三つのパラメータ γ, p および x の間の関係として与えられる。x は $0 \leqq x \leqq p$ なる範囲の任意の値をとり得るから，γp-平面内において所要の条件を満足する領域のうち最も狭い領域が任意波長の攪乱に対して渦列が安定となる領域で

ある。

(16), (17), (18) 式の右辺は γ について二次式になっているから x および p の値を与えて各式の右辺を 0 とする γ の値を簡単に求めることができる。このようにして各 x の値に対応する $a=0$, $b=0$, $a^2-4b=0$ なる曲線を γp-平面内にえがき (14) 式の条件を満足する領域を求めた。その結果 $x=p(\phi=0)$ の場合には γp-平面内の全領域にわたって条件 (14) が満足され, x の減少と共にこの領域は単調に減少し, $x=0(\phi=\pi)$ の時に最も狭い領域を与えることが判明した。したがって $x=0$ に対応する領域が所要の安定領域であり,

$$(\gamma-1)^2\frac{\tanh p}{p}\left[\frac{\tanh p}{p}-\frac{1}{2}-(1-\tanh^2 p)\right]$$
$$-\gamma\left[\frac{1}{4}+(1-\tanh^2 p)^2\right]+\frac{\gamma^2+1}{2}(1-\tach^2 p)\geqq 0 \qquad (19)$$

によって表わされる。これは Fig. 4 に示されるようなものである。K としるした点は $\gamma=1$,

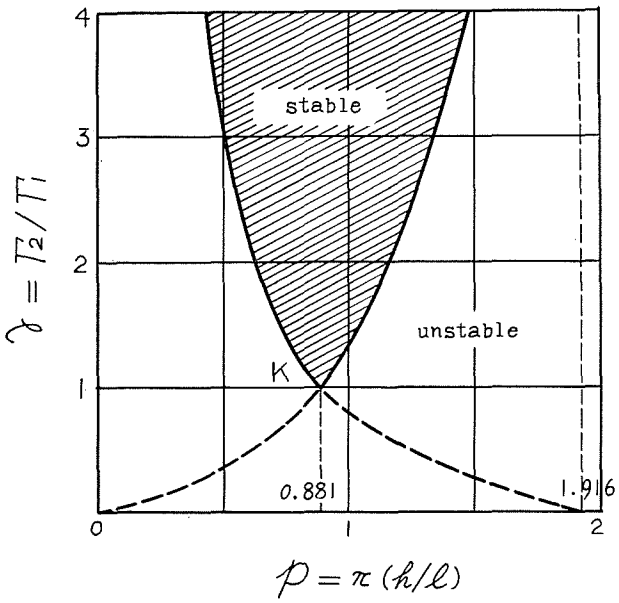

Fig. 4.

$p=0.881\,(h/l=0.281)$ なる点であって, 一様流の場合のカルマン渦列における安定点に対応している。漸近線は $p=0$ および $p=1.916\,(h/l=0.610)$ であるから, 直線型の速度分布をなすせん断流の場合には h/l が 0.610 より大なる渦列は存在し得ないことがわかる。

5. 物体に作用する抗力

前節までに述べた渦列がせん断流中におかれ物体の後流中に形成された場合この物体に作用する抗力を求めてみる。

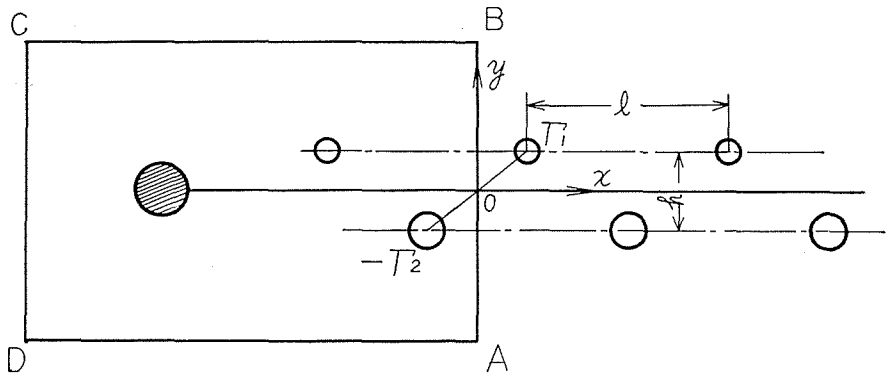

Fig. 5.

抗力の式を計算するために xy-平面に垂直方向に単位厚さをとり，xy 面において渦列と共に動く動座標を選んで Fig. 5 に示す短形 ABCD の中の流体に運動量の定理を適用する。短形の辺 L (AB の長さ) は物体の寸法および l, h 等に比し十分大なるようにとる。AB は物体より相当後方にあって渦列によって生ずる速度成分の式がそのまま AB に沿って使用できるものと仮定する。流体は x 軸の正の方向に $u=Gy+U$ の速度で動き，渦はやはり x 軸の正の方向に

$$\left.\begin{aligned} U_v &= \frac{1}{2}Gh+U-\frac{\Gamma_2}{2l}\tanh\frac{\pi h}{l} \\ &= -\frac{1}{2}Gh+U-\frac{\Gamma_1}{2l}\tanh\frac{\pi h}{l} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

で表わされる速度をもって移動する。渦列によって生ずる AB に沿う速度成分を u, v をもって表わす。Fig. 5 に示すように上列と下列との隣合った二つの渦を連ねる直線の中点と AB の中点とが一致するものとし，この交点を座標の原点とする時は渦列の複素ポテンシァル関数は (2) 式により

$$W=\frac{i\Gamma_1}{2\pi}\log\sin\frac{\pi}{l}(z-z_0)-\frac{i\Gamma_2}{2\pi}\log\sin\frac{\pi}{l}(z+z_0), \tag{21}$$

ただし

$$z_0=\frac{l}{4}+i\frac{h}{2}$$

で表わされる。

つぎに運動量の定理を ABCD 内の流体に対して適用するが，この際渦が x 軸の正の方向に U_v の速度で動きそのために発生する新たな渦対によって流体の運動量は常に増加することに注意しなければならない。この運動量の単位時間当りの平均増加量は

$$D_1=\rho\left(\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2}\right)\frac{h}{l}U_v \tag{22}$$

で与えられる。ここに $\rho\left(\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2}\right)h$ は渦対によって運ばれる運動量の x 成分であり，U_v/l は単位時間に辺 AB を通過する渦対の数である。抗力の式を得るためにはこの量 D_1 に ABCD の辺から単位時間に流出する運動量および ABCD の辺に作用する圧力による寄与を付加しなければならない。この計算は Blasius の第一公式を使用することによって比較的簡単に行なうことができる。この計算に際し L は非常に大であるから AB の辺の外では u, v が $1/L$ の程度になり省略してよく積分路は閉曲線とする代りに AB をとればよい。すなわち

$$D_2 = R_e\left\{i\frac{1}{2}\rho\int_{-i\frac{L}{2}}^{i\frac{L}{2}}\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz\right\},$$

ただし R_e は実数部を意味する。または上式の $L\to\infty$ の極限をとって

$$D_2 = R_e\left\{i\frac{1}{2}\rho\lim_{L\to\infty}\int_{-i\frac{L}{2}}^{i\frac{L}{2}}\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz\right\} \tag{23}$$

となる。(23) 式に (21) 式を代入し積分を実行すると

$$D_2 = \frac{\rho(\Gamma_1^2+\Gamma_2^2)}{4\pi l} - \frac{\rho h\Gamma_1\Gamma_2}{2l^2}\tanh\frac{\pi h}{l} - \lim_{L\to\infty}\frac{\rho(\Gamma_1-\Gamma_2)^2}{8l^2}L$$

が得られるが，Γ_1 と Γ_2 との差があまり大きくないものとしてこの式の右辺第三項を無視し (22) 式の D_1 をこれに加えると所要の抗力の式として

$$D = \rho\left(\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2}\right)\frac{h}{l}U_v + \frac{\rho(\Gamma_1^2+\Gamma_2^2)}{4\pi l} - \frac{\rho h\Gamma_1\Gamma_2}{2l^2}\tanh\frac{\pi h}{l} \tag{24}$$

が導かれる。特に $G=0$, $\Gamma_1=\Gamma_2=\Gamma$ の場合には

$$U_s = \frac{\Gamma}{2l}\tanh\frac{\pi h}{l}$$

なる記号を導入することにより (24) 式は

$$D = \frac{\rho\Gamma^2}{2\pi l} + \frac{\rho h\Gamma}{l}(U-2U_s) \tag{25}$$

なる形をとる。この式は Kármán によって最初に導出された一様流 $u=U$ 中におかれた物体に作用する抗力の式と一致する。また (24) 式において $\Gamma_1=\Gamma(1-\varepsilon)$, $\Gamma_2=\Gamma(1+\varepsilon)$ とおき ε の二次以上の高次の項を省略すると (24) 式は (25) 式と一致するから，一様流 $u=U$ に Gy なる小さな速度成分が重畳されても第一近似では抗力に何ら影響をおよぼさないことがわかる。

6. 結　　言

直線形の速度分布をなすせん断流中におかれたにぶい二次元物体の後流中に生ずる渦列

に対する一つの模型を提出しその安定性を論じた。この渦列が安定となる領域を循環比 $\Gamma_2/\Gamma_1=\gamma$ および spacing ratio $p=\pi h/l$ をパラメータとして Fig. 4 に示した。この模型は近寄り流れの速度分布が直線でない一般のせん断流の場合にもそのままの形で適用できるばかりでなく，特別な場合として一様流に対するカルマン渦列を含んでおり，その安定点 $h/l=0.281$ は Fig. 4 の K 点として表わされている。

また渦によって運ばれる運動量を考察することにより物体に作用する抗力の式を求めた結果，せん断が小さい時には一様流に対する Kármán の抵抗の式と同一になることが判明した。

参 考 文 献

1) von Kármán, Th. und Rubach, H., Ueber den Mechanismus des Flüssigkeits und Luftwiderstandes, Phys. Zeit. xiii. (1912).
2) Heisenberg, W., Die absoluten Dimensionen der Kármánschen Wirbelbewegung, Phys. Zeit. xxiii. (1922).
3) Rosenhead, L., The Kármán street of vortices in a channel of finite breadth, Phil. Trans. Roy. Soc. London, 228 (1929).
4) Levy, H. and Hooker, S. G., On the vortex motion in the wake of a cylinder in a fluid, Phil. Mag. S. 7, Vol. 9, No. 57, March (1930).
5) Goldstein, S., Modern developments in fluid dynamics, Oxford Clarendon Press (1938).