HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Ｔ字形断面棒の捩り問題の理論解法と実験研究
Author(s)	半沢，宏；石川，博将
Citation	北海道大學工學部研究報告，38，23-46
Issue Date	1965-09-02
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40766
Type	departmental bulletin paper
File Information	38_23-46.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

T 字形断面棒の捩り問題の理論解法と実験研究

半　沢　　宏
石　川　博　将

Theoretical Solution and Experimental Investigation for Torsion Problem of Prismatical Bar with T-Section

Hiroshi HANZAWA
Hiromasa ISHIKAWA

Abstract

The torsion problems of prismatical bars can be solved, as Saint Venant confirmed, by integrating the equation $\Delta\varphi=0$, as a first boundary value problem. Thus, hitherto considerable mathematical analyses have been applied to the torsion problems of prismatical bars with various sections.

In this paper, the torsion problem of a prismatical bar with T-section is investigated by means of application of Schwarz-Christoffels' transformation.

In order to calculate the stress components, which define the complete system in pure torsion, a digital computer is used.

As to the experiment for verifying this calculation, stress components are measured by a photoelastic method, employing stress freezing and oblique incidence method.

The experimental results are found to be in satisfactory agreement with the calculations except for some extreme points which are under the influence of other factors.

目　　次

I　緒　　論 …… 23
II　理論計算 …… 24
III　光弾性実験 …… 36
IV　理論計算結果と実験解析結果に対する考察 …… 45

I. 緒　　論

柱体の捩りの問題は Saint Venant の理論により，$\Delta\varphi=0$ なる Laplace の方程式を満足する φ を求める第1境界値問題となる。

それゆえに数学的方法により種々の形状の捩り問題が解かれてきた。

Trefftz 氏[1] は Schwarz-Christoffel の写像変換[2),3),4),5)] により多角形断面棒の捩り問題の

解法を示した。本論文で，筆者は，類似の解法によって，T 字形断面棒の捩り問題を解いた。

T 字形断面は形鋼断面の一種であるが，形鋼断面棒の捩りは工業的に重要な問題であるのに厳密解がない[6),7)]。したがって，本論文で T 字形断面棒の応力算定式を導き，内部応力の計算を電子計算機で行なった。計算結果を確認するために，三次元光弾性実験[8),9)]，すなわち，応力凍結させた試験片から切り出したスライスを斜入射法[10)]で解析した。

使用記号

$x,\ y,\ z$	直交座標または $z=x+iy$
$\xi,\ \eta,\ \zeta$	直交座標または $\zeta=\xi+i\eta$
$\tau_{xz},\ \tau_{yz}$	直交座標の剪断応力成分
θ	単位長さ当りの捩れ角
G	横弾性係数
E	縦弾性係数
φ	複素関数
ψ	φ の共役関数
χ_n	x 軸と n 多角柱辺のなす角
$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$	z 平面の多角形の内角
$p+iq,\ s+it$	複素関数
$R(\zeta)$	ζ の有理関数
n	縞次数
T	捩りモーメント
α	光弾性感度
θ	棒の軸と光線軸間角度
t	スライスの厚さ
t'	有効光路程
a	倍数 t/t'

II. 理 論 計 算

柱体の捩り問題では

断面内の各点で

$$\Delta\varphi=0 \tag{1}$$

周辺上で

$$\psi=\frac{x^2+y^2}{2} \tag{2}$$

を満足する $\varphi+i\psi=f(x+iy)$ を見出すと捩り応力が算定される。

Trefftz 氏は $\varphi+i\psi$ を見出す代りに

$$p+iq=\frac{df(x+iy)}{d(x+iy)},\quad s+it=\frac{d^2f(x+iy)}{d(x+iy)^2} \tag{3}$$

とおいて $(p+iq)$ を求めて捩り問題を解いた。捩り応力は次式で表し得る。

$$\tau_{xz}=G\theta(-y+p),\quad \tau_{yz}=G\theta(x-q) \tag{4}$$

ただし x, y は断面の座標を，G は横弾性係数，θ は単位長さの捩れ角とする。

変換式(3)は $(x+iy)$ 面において x 軸と χ_n の角度をなす直線上で $\psi=\frac{x^2+y^2}{2}$ ならば，s, t は $(s+it)$ 面において s 軸と $-2\chi_n$ の角度をなし，単位円に接する直線になる。それは(2)式を周囲の直線に沿って2度微分すると，

$$s\sin 2\chi_n+t\cos 2\chi_n=1 \tag{5}$$

となることから求まる。

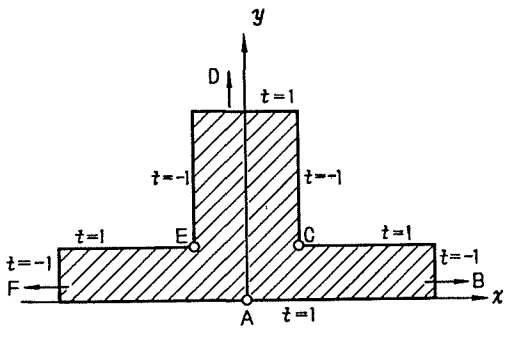
したがって $(x+iy)$ 面の切断面を ζ 面の上半面に Schwarz-Christoffel の公式によって写像し，$(s+it)$ の面上の多角形も，同様の方法によって ζ の上半面に写像し両平面の多角形の頂点が ζ 面で相一致するようにする。

したがって，一般式はつぎのようになる。

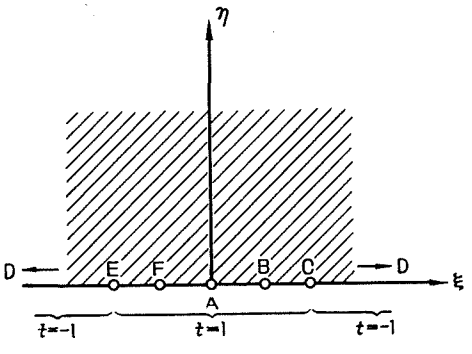
$$\left.\begin{aligned} s+it&=\int\frac{R(\zeta)\,d\zeta}{\pi(\zeta-\zeta_n)^{2\kappa_n}}\\ R(\zeta)&=a_0+a_1\zeta+\cdots+a_{2n-6}\zeta^{2n-6}\\ x+iy&=\int\frac{d\zeta}{\pi(\zeta-\zeta_n)^{1-\kappa_n}}\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

式中 a_0, a_1, $\cdots$, a_{2n-6} は実数であり，$R(\zeta)$ の次数は歪エネルギが有限であることより求まる。ただし $\kappa_n=\alpha_n/\pi$, α_n は $(x+iy)$ 面の多角形の内角

境界が水平垂直直線で作られる T 字形断面棒の場合について考察を進める。



第1図　z-平面



第2図　ζ-平面

境界条件の(5)式はこの場合つぎのようになる。

$$\begin{cases} t=1\cdots\cdots\text{水平}\ (\chi_n=\pi) \\ t=-1\cdots\cdots\text{垂直}\left(\chi_n=\dfrac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

第1図，第2図を参照すると，点 A は $z=0$, $\zeta=0$ なる点である。

無限右方 (B) は $\zeta=\zeta_1$ に，凹角 $C\,(z=1+i)$ は $\zeta=\zeta_2$ に，無限上方 (D) は $\zeta=\zeta_3$ に，凹角 $E\,(z=-1+i)$ は $\zeta=\zeta_4$ に，無限左方 (F) は $\zeta=\zeta_5$ に対応させると Schwarz-Christoffel 変換により

$$z=\int\frac{\sqrt{\zeta-\zeta_2}\sqrt{\zeta-\zeta_4}\,d\zeta}{(\zeta-\zeta_1)(\zeta-\zeta_3)(\zeta-\zeta_5)}$$

$$s+it=\int\frac{R(\zeta)d\zeta}{(\zeta-\zeta_1)^2(\zeta-\zeta_3)^2(\zeta-\zeta_5)^2(\zeta-\zeta_2)^3(\zeta-\zeta_4)^3}$$

$(s+it)$ 式の分母の次数は12次，$R(\zeta)$ は10次である。上式を解きやすくするため対応点をつぎのようにする。

無限右方 (B) は $\zeta_1=1$ に，角 C は $\zeta_3=k$ に，無限上方 (D) は $\zeta_3=\infty$ に，角 E は $\zeta_4=-k$ に，無限左方 (F) は $\zeta_5=-1$ にする。

したがって

$$z=c\int\frac{\sqrt{\zeta^2-k^2}}{\zeta^2-1}d\zeta \tag{7}$$

$$s+it=\int\frac{R(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta^2-1)^2(\zeta^2-k^2)^3} \tag{8}$$

となる。

(7) 式の定数 c を定める。

$$z=c\int_0^\zeta\frac{\sqrt{\zeta^2-k^2}}{\zeta^2-1}d\zeta=\frac{c}{2}\int_0^\zeta\left(\frac{\sqrt{\zeta^2-k^2}}{\zeta-1}-\frac{\sqrt{\zeta^2-k^2}}{\zeta+1}\right)d\zeta$$

$$=\frac{c}{2}\left\{2\ln\left(\sqrt{\zeta^2-k^2}+\zeta\right)-\sqrt{k^2-1}\,\sin^{-1}\frac{2\zeta\sqrt{(k^2-1)(\zeta^2-k^2)}}{k^2(\zeta^2-1)}+D\right\} \tag{9}$$

であるから

$\begin{cases} z=1+i \\ \zeta=k \end{cases}$ なる条件より (a) 式，　$\begin{cases} z=-1+i \\ \zeta=-k \end{cases}$ なる条件より (b) 式を導く，

$$1+i=\frac{c}{2}\left\{2\ln k-\sqrt{k^2-1}\,\sin^{-1}(0)+D\right\} \tag{a}$$

$$-1+i=\frac{c}{2}\left\{2\ln(-k)-\sqrt{k^2-1}\,\sin^{-1}(0)+D\right\} \tag{b}$$

$\sin^{-1}(0)=0,\ \pi,\ 2\pi\cdots\cdots$ であるが (9) 式の $\sin^{-1}$ の項は $\zeta=-k,\ 0,\ k,$ で $\sin^{-1}(0)$ となる。$\zeta=0$ の時 $\sin^{-1}(0)=\pi$ とする。ゆえに $\zeta=k$ で $\sin^{-1}(0)=0$ なら $\zeta=-k$ で $\sin^{-1}(0)=2\pi$ となるが $\sin(2\pi-\theta)=\sin\theta$ より $\zeta=\pm k$ で $\sin^{-1}(0)=0$ とおく。

したがって(a), (b)式は

$$1+i=\frac{c}{2}\left\{2\ln k+D\right\} \tag{a}'$$

$$-1+i=\frac{c}{2}\left\{2\ln k+2\ln i^2+D\right\} \tag{b}'$$

(a)′, (b)′式から

$$c=\frac{2i}{\pi},\qquad D=\pi(1-i)-2\ln k$$

結局(9)式は

$$z=1+i+\frac{i}{\pi}\left\{2\ln\frac{\sqrt{\zeta^2-k^2}+\zeta}{k}-\sqrt{k^2-1}\sin^{-1}\frac{2\zeta\sqrt{(k^2-1)(\zeta^2-k^2)}}{k^2(\zeta^2-1)}\right\} \tag{10}$$

となる。

k の値の決定

$\begin{cases}z=0\\ \zeta=0\end{cases}$ なる対応により(10)式は

$$i-\frac{i}{\pi}\sqrt{k^2-1}\sin^{-1}(0)_{\zeta=0}=0$$

となり，前述した如く $\sin^{-1}(0)_{\zeta=0}=\pi$ であるから $k=\sqrt{2}$ が求まる。

ゆえに z-平面上でC点 $(z=1+i)$，E点 $(z=-1+i)$ は ζ-平面上で ξ 軸上 $\sqrt{2}$，$-\sqrt{2}$ に対応する。

したがって(7)式はつぎのようになる。

$$z=(1+i)+\frac{i}{\pi}\left\{2\ln\left(\sqrt{\frac{\zeta^2}{2}-1}+\frac{\zeta}{\sqrt{2}}\right)-\sin^{-1}\frac{\zeta\sqrt{\zeta^2-2}}{\zeta^2-1}\right\}$$

または

$$z=(1+i)+\frac{i}{\pi}\left\{2\ln\left(\sqrt{\frac{\zeta^2}{2}-1}+\frac{\zeta}{\sqrt{2}}\right)+i\ln\frac{1+i\zeta\sqrt{\zeta^2-2}}{\zeta^2-1}\right\} \tag{11}$$

(8)式より，分子の次数が分母の次数より2次低いから部分分数に分けることにより

$$s+it=a_0\ln(\zeta-1)+a_1\ln(\zeta+1)+a_2\ln(\zeta-\sqrt{2})+a_3\ln(\zeta+\sqrt{2})$$
$$+\frac{b_1}{\zeta-1}+\frac{b_2}{\zeta+1}+\frac{b_3}{\zeta-\sqrt{2}}+\frac{b_4}{\zeta+\sqrt{2}}+\frac{c_1}{(\zeta-\sqrt{2})^2}+\frac{c^2}{(\zeta+\sqrt{2})^2}+d_1\zeta+(A+Bi)$$

ここで a_0, a_1, a_2, a_3, $b_1\,b_2\,b_3\,b_4$, c_1, c_2, d_1, は定数，$A+Bi$ は積分定数である。

各定数は $\zeta=\pm1$ で応力が有限，$\zeta=0$ で境界条件 $t=1$ および $\zeta=\pm k$ で $t=\pm1$ なることより

$$a_0=a_1=b_1=b_2=d_1=0,\quad a_2=a_3=-\frac{2}{\pi},\quad b_3=-b_4,\quad c_1=c_2$$

なることがわかる。

したがって(8)式はつぎのようになる。

$$s+it=-\frac{2}{\pi}\ln(\zeta^2-2)+\frac{2\sqrt{2}\,b_3}{\zeta^2-2}+\frac{2c_1(\zeta^2+2)}{(\zeta^2-2)^2}+A+Bi$$

(3)式を用いると

$$p+iq=-\frac{4i}{\pi^2}\int_0^\zeta\frac{\sqrt{\zeta^2-2}\ln(\zeta^2-2)}{\zeta^2-1}d\zeta+\frac{4\sqrt{2}\,b_3 i}{\pi}\int_0^\zeta\frac{\sqrt{\zeta^2-2}\,d\zeta}{(\zeta^2-2)(\zeta^2-1)}$$
$$+\frac{4ci}{\pi}\int_0^\zeta\frac{\sqrt{\zeta^2-2}(\zeta^2+2)}{(\zeta^2-1)(\zeta^2-2)}d\zeta+(A+Bi)z \qquad (12)$$

しかるに

$(A+Bi)z=(Ax-By)+i(Bx+Ay)$, となるから

$\zeta^2>2$ なる境界上，すなわち $\xi^2>2$ なる範囲では

$$p=Ax-By$$

(2)式により境界線上では

$\psi=\dfrac{x^2+y^2}{2}$，また(3)式より $p=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}$ より　$Ax-By=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}=y$ が常に成立つためには，

$A=0$, $B=-1$ となる。

(12)式を整理すると

$$p+iq=-\frac{4i}{\pi^2}\int_0^\zeta\frac{\sqrt{\zeta^2-2}\ln(\zeta^2-2)}{\zeta^2-1}d\zeta+\left(\frac{2\sqrt{2}\,b_3}{\pi}-\frac{6c_1}{\pi}\right)i\sin^{-1}\frac{\zeta\sqrt{\zeta^2-2}}{\zeta^2-1}$$
$$-\frac{8c_1 i}{\pi}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-2}}\right)-iz$$

上式で $\sin^{-1}$ が $\zeta^2<2$ で $i\sinh$ なることに注意すると $\zeta=\pm1$ で無限大になる。応力が $\zeta=\pm1$ で有限なることより，$c_1=\dfrac{\sqrt{2}}{3}b_3$ となる。

したがって

$$p+iq=-\frac{4i}{\pi^2}\int_0^\zeta\frac{\sqrt{\zeta^2-2}\ln(\zeta^2-2)}{\zeta^2-1}d\zeta-\frac{8c_1 i}{\pi}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-2}}\right)-iz \qquad (13)$$

となり残る未知数は c_1 だけである。

未知定数 c_1 の決定

$p+iq$ の第1項目の積分を Taylor 展開する。

$$I_1=\int_0^\zeta\frac{\sqrt{\zeta^2-2}\ln(\zeta^2-2)}{\zeta^2-1}d\zeta$$

とし，さらに $\zeta^2-2=\mu^2$ とおくと，

$$I_1=\int\frac{2\mu^2\ln\mu d\mu}{(\mu^2+1)\sqrt{\mu^2+2}}=2\int\frac{\ln\mu d\mu}{\sqrt{\mu^2+2}}-2\int\frac{\ln\mu d\mu}{(\mu^2+1)\sqrt{\mu^2+2}}=2J_1-2J_2 \qquad (14)$$

しかし，(13)式は $\zeta^2>2$ なる場合の式であるから $\zeta^2<2$ なる場合には，(13)式はつぎのようになる。

$$p+iq=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\zeta}\frac{\sqrt{2-\zeta^2}\ln(2-\zeta^2)}{\zeta^2-1}d\zeta-\frac{8c_1}{\pi}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{2-\zeta^2}}\right)+iz \tag{15}$$

(14)式を求めたと同様にして，(15)式の第1項を

$$I_1'=\int_0^{\zeta}\frac{\sqrt{2-\zeta^2}\ln(2-\zeta^2)}{\zeta^2-1}d\zeta$$

とおき，$2-\zeta^2=\mu^2$ とおくと，I_1' は

$$I_1'=2\int\frac{\ln\mu}{\sqrt{2-\mu^2}}d\mu+2\int\frac{\ln\mu d\mu}{(\mu^2-1)\sqrt{2-\mu^2}}=2J_1'+2J_2' \tag{16}$$

(14)式，(16)式の分母を Taylor 展開する際は，μ の値，すなわち ζ の値により以下のように分けられ積分が可能となる。

以下の分類で，J_1，J_2 の値のときは(14)式を用いて I_1 を計算し，応力を(13)式にて算定する。また J_1'，J_2' の値のときは(16)式を用いて I_1' を計算し，応力を(15)式にて算定する。

(i) $\zeta^2<1$

$$\begin{aligned}J_1'=\frac{\sqrt{2}}{2}\Big[&\Big\{(2-\zeta^2)^{\frac{1}{2}}+0.083333(2-\zeta^2)^{\frac{3}{2}}+0.018750(2-\zeta^2)^{\frac{5}{2}}+0.005580(2-\zeta^2)^{\frac{7}{2}}\\&+0.001899(2-\zeta^2)^{\frac{9}{2}}+0.000699(2-\zeta^2)^{\frac{11}{2}}+0.000259(2-\zeta^2)^{\frac{13}{2}}\\&+0.000109(2-\zeta^2)^{\frac{15}{2}}+0.000045(2-\zeta^2)^{\frac{17}{2}}\Big\}\frac{1}{2}\ln(2-\zeta^2)\\&-\Big\{(2-\zeta^2)^{\frac{1}{2}}+0.027780(2-\zeta^2)^{\frac{3}{2}}+0.003750(2-\zeta^2)^{\frac{5}{2}}+0.000797(2-\zeta^2)^{\frac{7}{2}}\\&+0.000211(2-\zeta^2)^{\frac{9}{2}}+0.000064(2-\zeta^2)^{\frac{11}{2}}+0.000020(2-\zeta^2)^{\frac{13}{2}}\\&+0.000007(2-\zeta^2)^{\frac{15}{2}}+0.000003(2-\zeta^2)^{\frac{17}{2}}\Big\}\Big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_2'=-1.02\Big[&\Big\{(2-\zeta^2)^{-\frac{1}{2}}+0.333333(2-\zeta^2)^{-\frac{3}{2}}+0.200000(2-\zeta^2)^{-\frac{5}{2}}+0.142857(2-\zeta^2)^{-\frac{7}{2}}\\&+0.111111(2-\zeta^2)^{-\frac{9}{2}}+0.090909(2-\zeta^2)^{-\frac{11}{2}}+0.076923(2-\zeta^2)^{-\frac{13}{2}}\\&+0.066666(2-\zeta^2)^{-\frac{15}{2}}+0.058824(2-\zeta^2)^{-\frac{17}{2}}\Big\}\frac{1}{2}\ln(2-\zeta^2)\\&+\Big\{(2-\zeta^2)^{-\frac{1}{2}}+0.111111(2-\zeta^2)^{-\frac{3}{2}}+0.040000(2-\zeta^2)^{-\frac{5}{2}}\\&+0.020408(2-\zeta^2)^{-\frac{7}{2}}+0.012345(2-\zeta^2)^{-\frac{9}{2}}+0.008264(2-\zeta^2)^{-\frac{11}{2}}\\&+0.005917(2-\zeta^2)^{-\frac{13}{2}}+0.004444(2-\zeta^2)^{-\frac{15}{2}}+0.003460(2-\zeta^2)^{-\frac{17}{2}}\Big\}\Big]\end{aligned}$$

(ii) $1<\zeta^2<2$

J_1' は (i) の場合の J_1' をそのまま用いる。

$$J_2'=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big[\Big\{(2-\zeta^2)^{\frac{1}{2}}+0.416600(2-\zeta^2)^{\frac{3}{2}}+0.275000(2-\zeta^2)^{\frac{5}{2}}+0.202009(2-\zeta^2)^{\frac{7}{2}}$$
$$+0.159016(2-\zeta^2)^{\frac{9}{2}}+0.130804(2-\zeta^2)^{\frac{11}{2}}+0.110951(2-\zeta^2)^{\frac{13}{2}}$$
$$+0.096266(2-\zeta^2)^{\frac{15}{2}}+0.084987(2-\zeta^2)^{\frac{17}{2}}\Big\}\frac{1}{2}\ln(2-\zeta^2)$$
$$-\Big\{(2-\zeta^2)^{\frac{1}{2}}+0.138889(2-\zeta^2)^{\frac{3}{2}}+0.055000(2-\zeta^2)^{\frac{5}{2}}+0.028858(2-\zeta^2)^{\frac{7}{2}}$$
$$+0.017669(2-\zeta^2)^{\frac{9}{2}}+0.011891(2-\zeta^2)^{\frac{11}{2}}+0.008535(2-\zeta^2)^{\frac{13}{2}}$$
$$+0.006418(2-\zeta^2)^{\frac{15}{2}}+0.004999(2-\zeta^2)^{\frac{17}{2}}\Big\}\Big]$$

(iii) $2<\zeta^2<3$

$$J_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\Big[\Big\{(\zeta^2-2)^{\frac{1}{2}}-0.083333(\zeta^2-2)^{\frac{3}{2}}+0.018750(\zeta^2-2)^{\frac{5}{2}}-0.005580(\zeta^2-2)^{\frac{7}{2}}$$
$$+0.001899(\zeta^2-2)^{\frac{9}{2}}-0.000699(\zeta^2-2)^{\frac{11}{2}}+0.000259(\zeta^2-2)^{\frac{13}{2}}$$
$$-0.000109(\zeta^2-2)^{\frac{15}{2}}+0.000045(\zeta^2-2)^{\frac{17}{2}}\Big\}\frac{1}{2}\ln(\zeta^2-2)$$
$$-\Big\{(\zeta^2-2)^{\frac{1}{2}}-0.027778(\zeta^2-2)^{\frac{3}{2}}+0.003750(\zeta^2-2)^{\frac{5}{2}}-0.000797(\zeta^2-2)^{\frac{7}{2}}$$
$$+0.000211(\zeta^2-2)^{\frac{9}{2}}-0.000064(\zeta^2-2)^{\frac{11}{2}}+0.000020(\zeta^2-2)^{\frac{13}{2}}$$
$$-0.000007(\zeta^2-2)^{\frac{15}{2}}+0.000003(\zeta^2-2)^{\frac{17}{2}}\Big\}\Big]$$

$$J_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\Big[\Big\{(\zeta^2-2)^{\frac{1}{2}}-0.416600(\zeta^2-2)^{\frac{3}{2}}+0.275000(\zeta^2-2)^{\frac{5}{2}}-0.202009(\zeta^2-2)^{\frac{7}{2}}$$
$$+0.159016(\zeta^2-2)^{\frac{9}{2}}-0.130804(\zeta^2-2)^{\frac{11}{2}}+0.110951(\zeta^2-2)^{\frac{13}{2}}$$
$$-0.096266(\zeta^2-2)^{\frac{15}{2}}+0.084987(\zeta^2-2)^{\frac{17}{2}}\Big\}\frac{1}{2}\ln(\zeta^2-2)$$
$$-\Big\{(\zeta^2-2)^{\frac{1}{2}}-0.138889(\zeta^2-2)^{\frac{3}{2}}+0.055000(\zeta^2-2)^{\frac{5}{2}}-0.028858(\zeta^2-2)^{\frac{7}{2}}$$
$$+0.017669(\zeta-2)^{\frac{9}{2}}-0.011891(\zeta^2-2)^{\frac{11}{2}}+0.008535(\zeta^2-2)^{\frac{13}{2}}$$
$$-0.006418(\zeta^2-2)^{\frac{15}{2}}+0.004999(\zeta^2-2)^{\frac{17}{2}}\Big\}\Big]$$

(iv) $3<\zeta^2<4$

J_1 は (iii) の場合の J_1 をそのまま用いる。

$$J_2=-1.02\Big[\Big\{(\zeta^2-2)^{-\frac{1}{2}}-0.333333(\zeta^2-2)^{-\frac{3}{2}}+0.200000(\zeta^2-2)^{-\frac{5}{2}}-0.142857(\zeta^2-2)^{-\frac{7}{2}}$$
$$+0.111111(\zeta^2-2)^{-\frac{9}{2}}-0.090909(\zeta^2-2)^{-\frac{11}{2}}$$

$$+0.076923(\zeta^2-2)^{-\frac{13}{2}}-0.066666(\zeta^2-2)^{-\frac{15}{2}}+0.058824(\zeta^2-2)^{-\frac{17}{2}}\Big\}\frac{1}{2}\ln(\zeta^2-2)$$
$$+\Big\{(\zeta^2-2)^{-\frac{1}{2}}-0.111111(\zeta^2-2)^{-\frac{3}{2}}+0.040000(\zeta^2-2)^{-\frac{5}{2}}-0.020408(\zeta^2-2)^{-\frac{7}{2}}$$
$$+0.012345(\zeta^2-2)^{-\frac{9}{2}}-0.008264(\zeta^2-2)^{-\frac{11}{2}}+0.005917(\zeta^2-2)^{-\frac{13}{2}}$$
$$-0.004444(\zeta^2-2)^{-\frac{15}{2}}+0.003460(\zeta^2-2)^{-\frac{17}{2}}\Big\}\Big]$$

(v) $4<\zeta^2$

$$J_1=\Big[\Big\{0.500000(\zeta^2-2)^{-1}-0.375000(\zeta^2-2)^{-2}+0.416667(\zeta^2-2)^{-3}$$
$$-0.546250(\zeta^2-2)^{-4}+0.787500(\zeta^2-2)^{-5}-1.203125(\zeta^2-2)^{-6}$$
$$+1.915178(\zeta^2-2)^{-7}-3.141200(\zeta^2-2)^{-8}\Big\}\frac{1}{2}\ln(\zeta^2-2)$$
$$-\Big\{-0.125000(\zeta^2-2)^{-1}+0.093750(\zeta^2-2)^{-2}-0.069444(\zeta^2-2)^{-3}$$
$$+0.068281(\zeta^2-2)^{-4}-0.078750(\zeta^2-2)^{-5}+0.100260(\zeta^2-2)^{-6}$$
$$-0.136780(\zeta^2-2)^{-7}+0.196380(\zeta^2-2)^{-8}\Big\}\Big]$$

$$J_2=\Big[\Big\{-0.500000(\zeta^2-2)^{-1}+0.500000(\zeta^2-2)^{-2}-0.583333(\zeta^2-2)^{-3}$$
$$+0.750000(\zeta^2-2)^{-4}-1.037500(\zeta^2-2)^{-5}+1.520833(\zeta^2-2)^{-6}$$
$$-2.691964(\zeta^2-2)^{-7}+3.718750(\zeta^2-2)^{-8}\Big\}\frac{1}{2}\ln(\zeta^2-2)$$
$$-\Big\{0.250000(\zeta^2-2)^{-1}-0.125000(\zeta^2-2)^{-2}+0.097222(\zeta^2-2)^{-3}$$
$$-0.093750(\zeta^2-2)^{-4}+0.103750(\zeta^2-2)^{-5}-0.126736(\zeta^2-2)^{-6}$$
$$+0.192283(\zeta^2-2)^{-7}-0.232421(\zeta^2-2)^{-8}\Big\}\Big]$$

(15) 式より

$$p+iq=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\zeta}\frac{\sqrt{2-\zeta^2}\ln(2-\zeta^2)}{\zeta^2-1}d\zeta-\frac{8c_1}{\pi}\frac{\zeta}{\sqrt{2-\zeta^2}}+iz$$

上式を $\zeta=0$ から $\zeta=1$ まで積分する。

最初の積分は (i) により計算した J_1', J_2' より (16) 式を用い I_1' を求めることにより出来る。

$$\frac{8c_1}{\pi}\left[\frac{\zeta}{\sqrt{2-\zeta^2}}\right]_0^1=\frac{8c_1}{\pi}$$

(i) の J_1' の式より

$$[J_1']_1=-0.730178$$

$$[J_1']_0=-0.606643$$

$\therefore \quad 2[J_1']_0^1 = 2\{[J_1']_1 - [J_1']_0\} = -0.247069$

同様に

$$[J_2']_1 = -1.239162$$

$$[J_2']_0 = -1.445171$$

$\therefore \quad 2[J_2']_0^1 = 2\{[J_2']_1 - [J_2']_0\} = 0.412018$

したがって(10)式より

$$[I_1']_0^1 = 2[J_1']_0^1 + 2[J_2']_0^1 = 0.164950$$

結局上式は

$$p+iq = iz + \frac{4}{\pi^2} \times 0.164950 - \frac{8c_1}{\pi}$$

$$= iz + 0.066851 - \frac{8c_1}{\pi}$$

これらの値は $\zeta=1$，すなわち z が無限大になったときの値のため p_∞，q_∞ なる記号を用いる。

$$p_\infty = -y + 0.066851 - \frac{8c_1}{\pi}$$

$$q_\infty = x$$

(4)式より $\tau_{yz} = 0$

2つの上下右方長片の境界を，それに相応する ψ の値として，ψ_a，ψ_u とすると

$$\psi_a = \frac{x^2+1}{2}, \quad \psi_u = \frac{x^2}{2} \qquad \therefore \quad \psi_a - \psi_u = \frac{1}{2}$$

(3)式より $p = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}$ であるから

$$\lim_{x\to\infty}(\psi_a - \psi_u) = \int_0^1 p_\infty dy$$

したがって

$$\frac{1}{2} = \int_0^1 \left(-y + 0.066851 - \frac{8c_1}{\pi}\right) dy$$

$$= -\frac{1}{2} + 0.066851 - \frac{8c_1}{\pi}$$

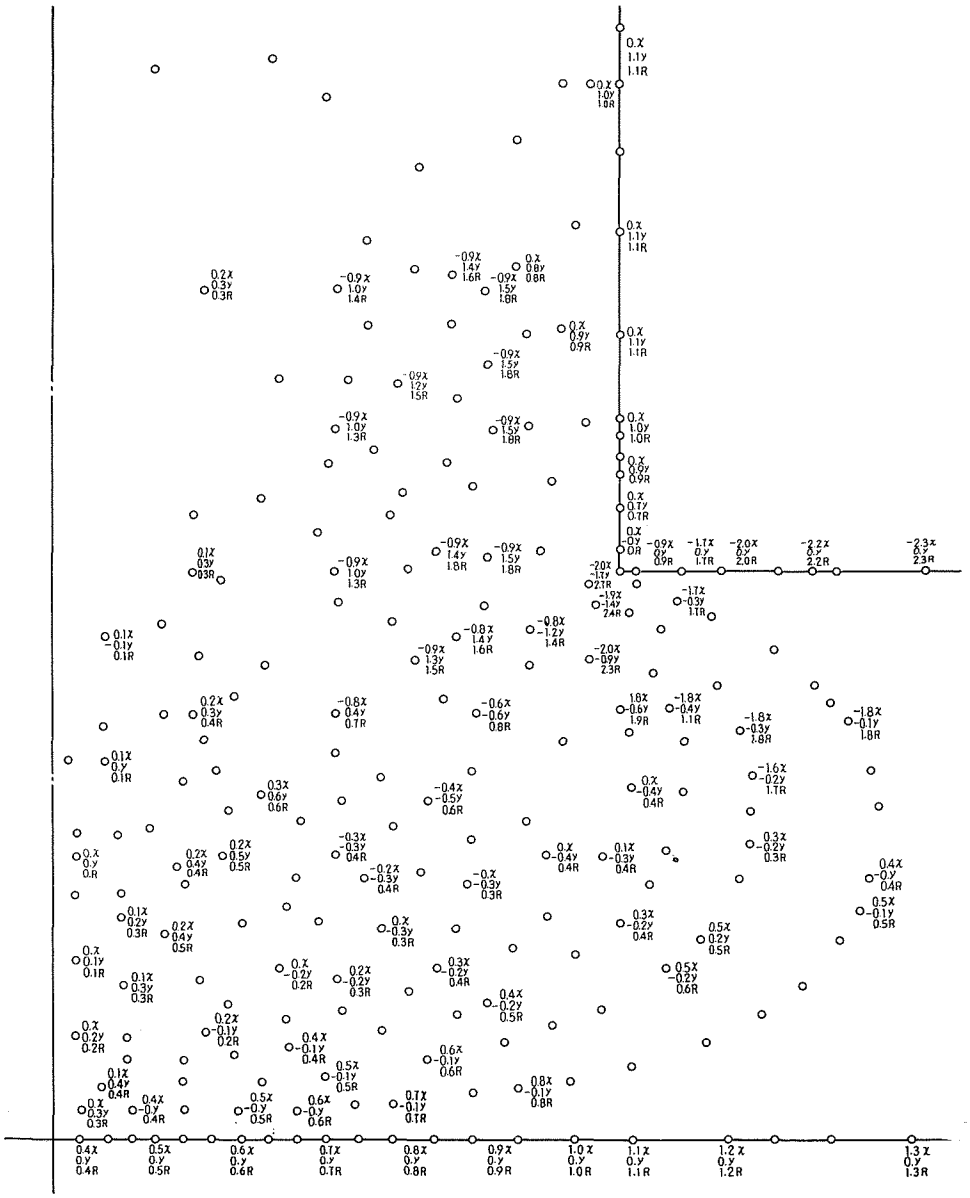
$$\therefore \quad c_1 = -0.366447$$

以上の考察により，つぎの3つの式がT字形断面棒の応力算定式となる。

$\zeta^2 < 2$ の場合

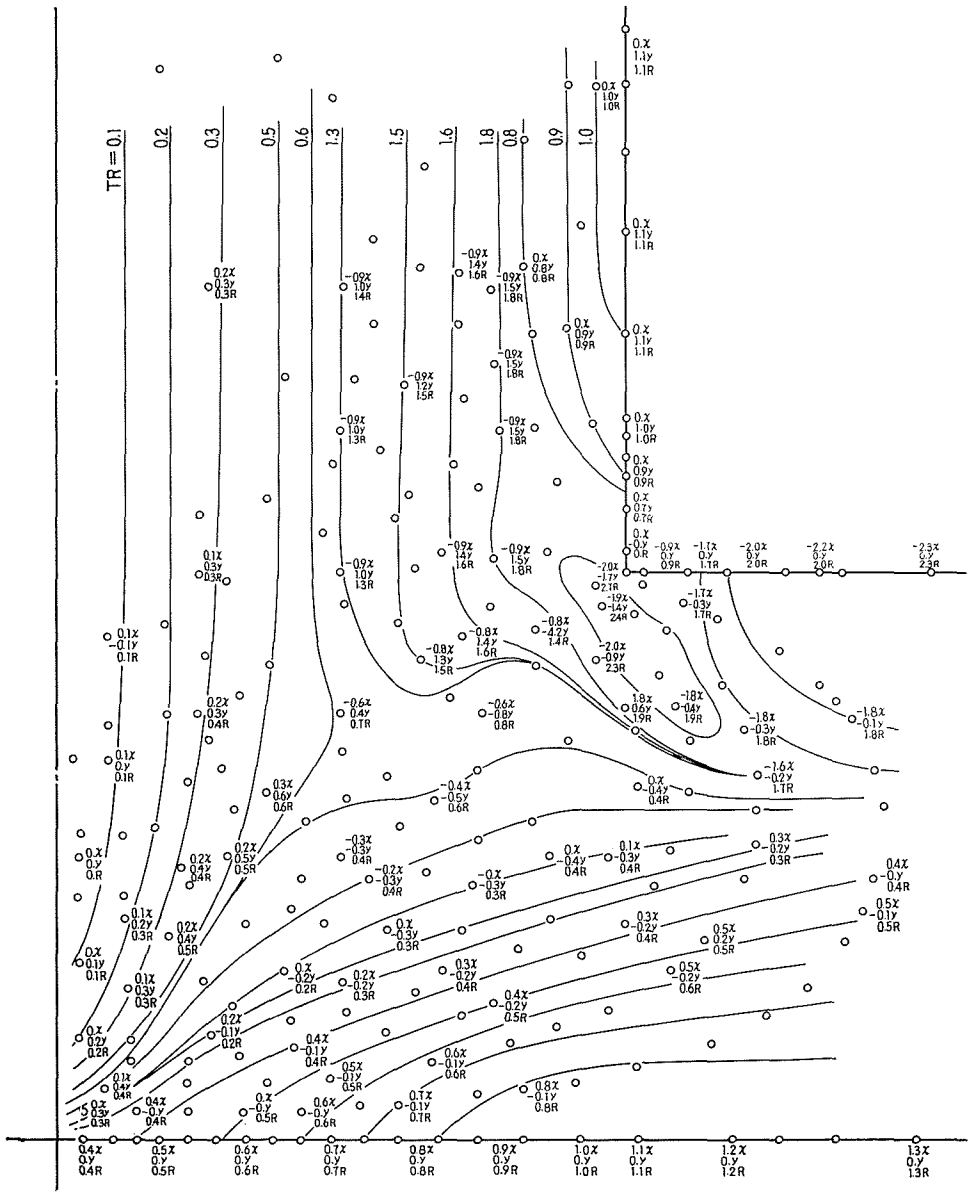
$$
\left.
\begin{aligned}
z &= \frac{2i}{\pi}\int_0^{\zeta}\frac{\sqrt{\zeta^2-2}}{\zeta^2-1}\,d\zeta \\
s+it &= -\frac{2}{\pi}\ln(\zeta^2-2)-\frac{2.89158(\zeta^2-1)}{(\zeta^2-2)^2}-i \\
p+it &= -\frac{4i}{\pi^2}\int_0^{\zeta}\frac{\sqrt{\zeta^2-2}\,\ln(\zeta^2-2)}{\zeta^2-1}\,d\zeta+\frac{2.89158\,i}{\pi}\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-2}}-iz
\end{aligned}
\right\} \qquad (17)
$$

$\zeta^2<2$ の場合



第3図　理論計算結果

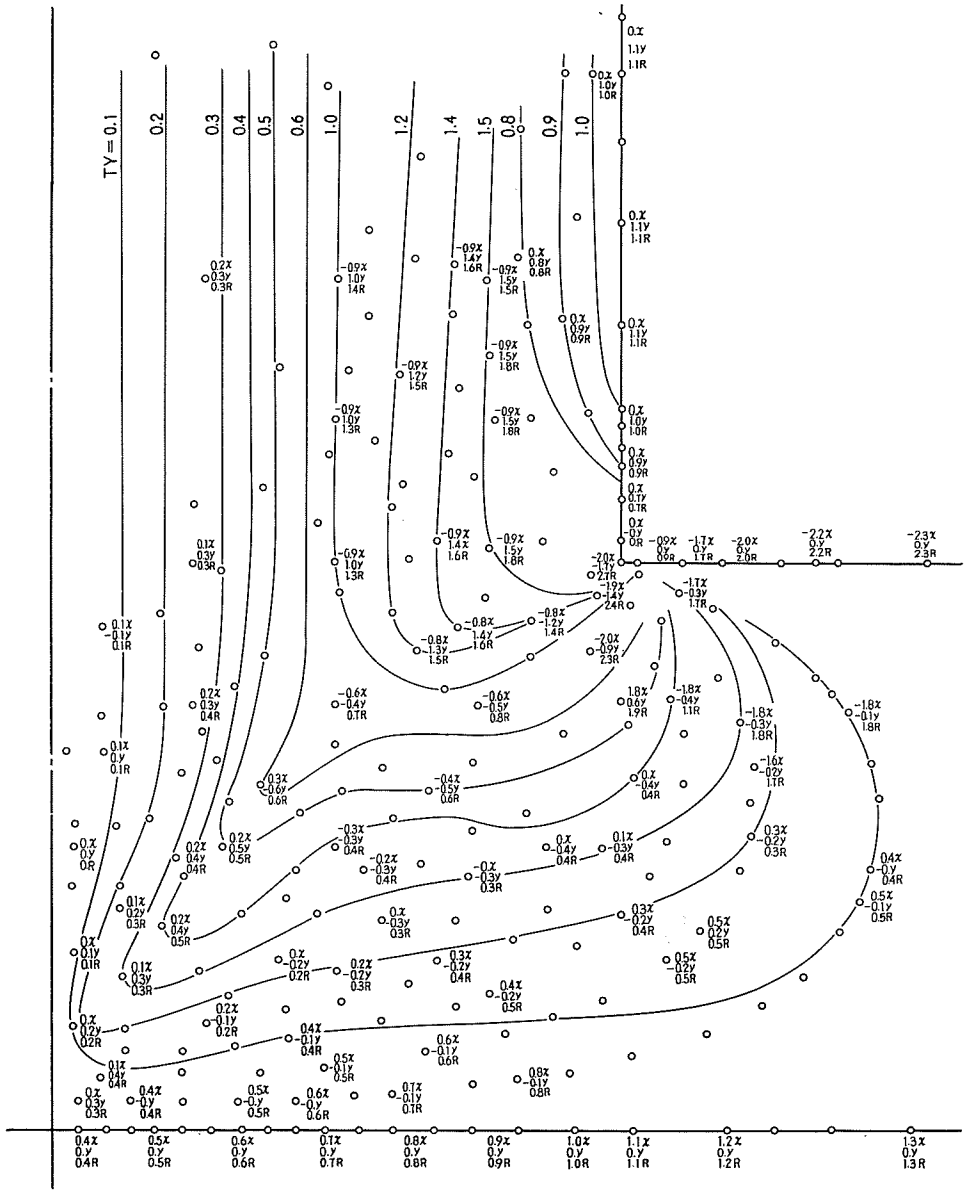
$$
\left.\begin{aligned}
z &= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\zeta}\frac{\sqrt{2-\zeta^2}}{\zeta^2-1}\,d\zeta \\
s+it &= -\frac{2}{\pi}\ln(2-\zeta^2)-\frac{2.89158(\zeta^2-1)}{(2-\zeta^2)^2}+i \\
p+iq &= \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\zeta}\frac{\sqrt{2-\zeta^2}\ln(2-\zeta^2)}{\zeta^2-1}\,d\zeta+\frac{2.89158}{\pi}\frac{\zeta}{\sqrt{2-\zeta^2}}+iz
\end{aligned}\right\} \qquad (18)
$$



第4図　等合成剪断応力線図

(17) 式，(18) 式を用いると任意の $\zeta(=\xi+i\eta)$ の値に対し，それに対応する T 字形断面の点と，その点の応力値が計算される。

しかし，$p+iq$ の積分の項が ζ の値により計算式が異なり，さらに ζ が複素数のため計算は煩雑となる。このため実数計算は電子計算機を用いて行なった。なおプログラム作成は実部虚部に分けて計算できるように配慮した。



第5図　　等 τ_{yz} 線 図

計算結果をまとめると第3図に示す通りである。第4図はこれにもとづき作成した等合成剪断応力線図，第5図は等 τ_{yz} 線図である。

結果の考察は，実験結果と比較検討するため，IV のところで論述する。

なお(17)式，(18)式より求めた理論計算値は，長片が単位長さの形状で，かつ $G\theta=1$ 当りの応力値であるから，長片の幅 b，材料の横弾性係数 G とし，捩りモーメント T を受けた時生じた捩り角を θ とすると，任意の点の応力値は第3図の値に $bG\theta$ をかけたものである。

III. 光弾性実験

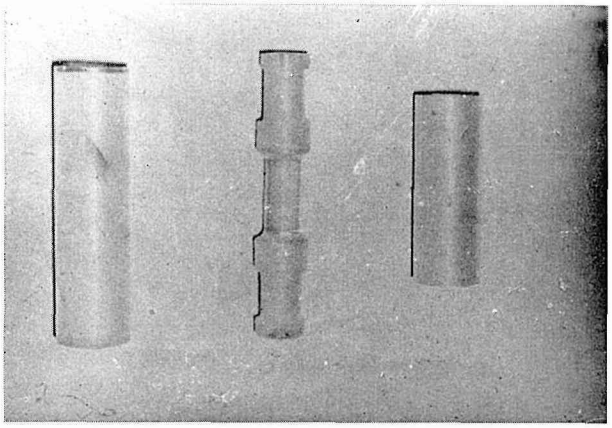
理論計算で算定した内部応力値を確認するために光弾性実験を行なった。光弾性材料アラルダイト（エポキシ樹脂）を注型して，T 字形断面棒を作り捩りをかけて応力凍結させ，スライスを切り出して斜入射法で解析した。このT字形断面棒捩り実験にさきだち，使用材料の材料性質を測定した。その結果を第1表に示す。なを材質は応力凍結を高温（120°C）にて行なう関係上，常温，高温につき測定した。

第1表 常温，高温材料性質値

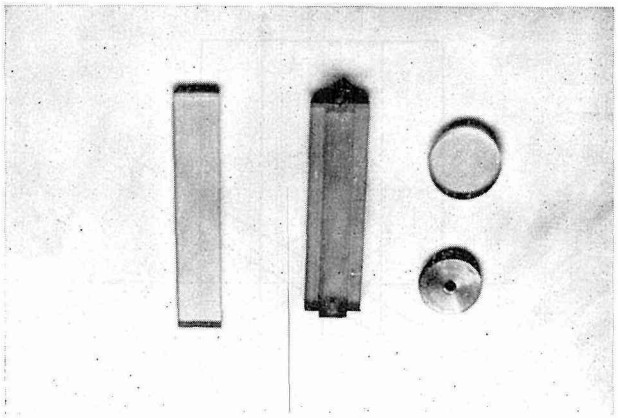
	常温の値	高温の値
縦弾性係数	354 kg/mm²	1.16 kg/mm²
横弾性係数	133 kg/mm²	0.435 kg/mm²
光弾性感度	0.898 mm/kg	37.2 mm/kg
材料硬度	H_B (5/1000/30) 52	
ポアソン比	0.33	0.335

第6図，第7図は作成した試験片である。

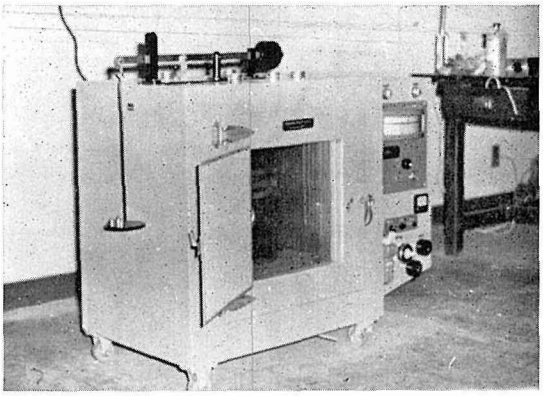
第6図は常温，高温捩り試験片であり，第7図は高温光弾性感度用試験片（円板），T字形断面棒及び平板から切り出した常温光弾性感度用試験片を示す。



第6図



第7図



第8図

本研究のための実験は，第7図に示す形状のT字形断面棒を第8図に示す空気恒温槽内に固定されている捩り装置に取り付け，温度を120°Cまで上げて1時間その温度に保ってから捩りモーメントをかけた。そのままの状態で80°Cまで1時間に5°Cの割合で徐冷し，80°Cから槽内で室温まで空冷し応力凍結を完了した。

第9図に応力が凍結された試験片よりスライスを切り出す様子を示す。第10図は切り出したスライスを示す。

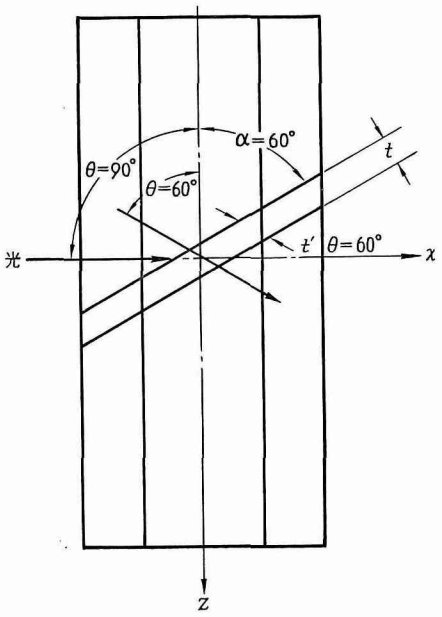
M. M. Frocht氏によると純粋捩りを受ける柱体の斜入射法解析の基礎式は，斜入射角θ縞次数n，光路程t'とすると，つぎの関係式である。

$$n = 2\alpha t' \sin\theta\sqrt{\tau_{xz}^2 \cos^2\theta + \tau_{yz}^2} \tag{19}$$

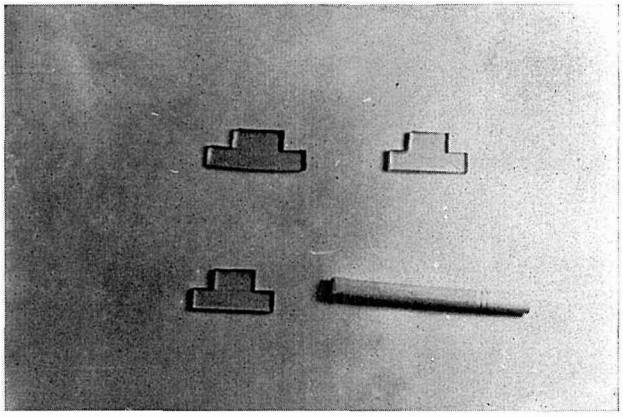
ただしここで，αは光弾性感度

$\theta = 90°$の時は(19)式は

$$n = 2\alpha t' \tau_{yz} \tag{20}$$



第9図 スライス切出し法



第10図

となる。したがって斜スライスから斜入射角を変え2個の応力型を得ると(19)式により τ_{xz}, τ_{yz} が算定される。

(i) T字形断面棒捩り実験 —その1—

応力解析に必要な数値を列記する。

l =標点距離 99 mm, 試験片全長 130 mm, 凍結開始温度 120°C

θ =捩れ角 21° (0.366 rad)

T =捩りモーメント 18.2 kg·mm

α = 光弾性感度　32.7 mm/kg

θ = 棒の軸と光線軸間角度 60°, 90°

t = スライスの厚さ 3.6 mm

t' = 有効光路程　$t' = t/\sin(60° + \theta)$

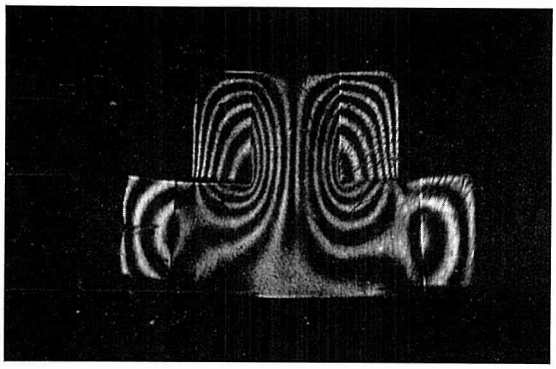
G = 横弾性係数　0.435 kg/mm²

断面寸法は第13図に示す。応力解析は斜入射角 $\theta = 60°$, $\theta = 90°$ の2つの応力図（第11図，第12図）より行なった。

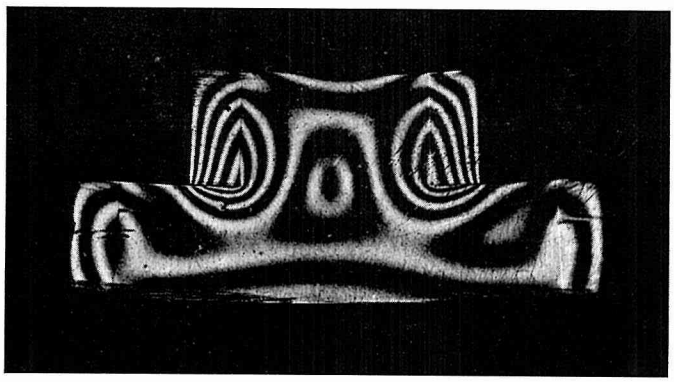
(イ) スライスの楔状でない部分，すなわち，ある入射角 θ に対する厚さ t' が一定の部分の応力解析

この場合は第35図のスライス形状図においてT字形断面の上部（図ではH–Hより上の部分）では A_1–A_1 から A_2–A_2 の範囲，下部（図ではH–Hより下の部分）では B_1–B_1 から B_2–B_2 の範囲である。第14図の場合も同じ範囲である。

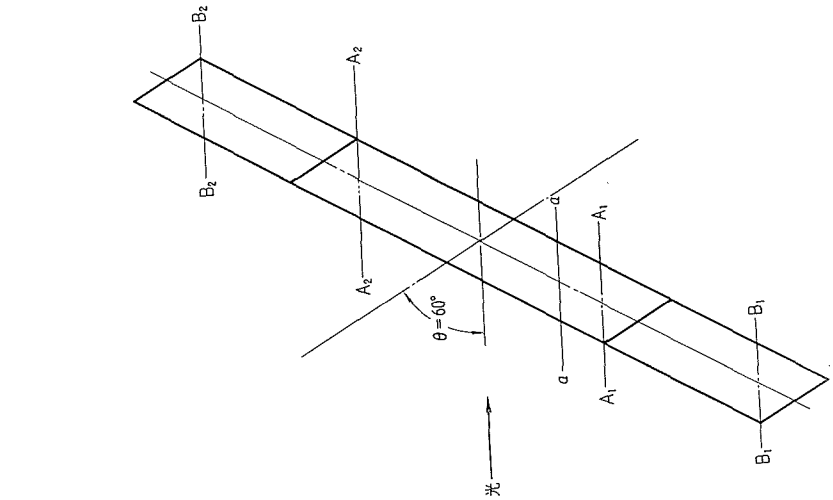
$\theta = 90°$ では (20) 式より



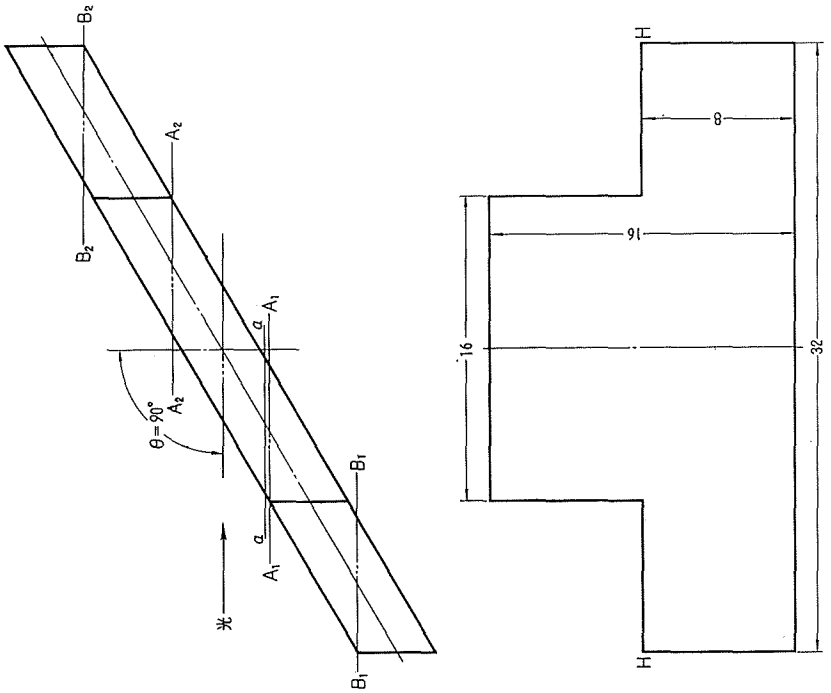
第11図



第12図



第14図 スライス形状 $\theta = 60°$



第13図 スライス形状 $\theta = 90°$

$$\tau_{yz}=\frac{n}{2\alpha t'}=2.13\times10^{-3}\,\mathrm{n} \tag{21}$$

$\theta=60°$ では (19) 式より

$$\tau_{xz}^2=0.722\times10^{-4}\,n^2-4\tau_{yz}^2 \tag{22}$$

(21) 式, (22) 式で n の値は等しい値でない。それは応力形図より測定して決める。

したがって, たとえば (4, 8) なる点では, 第13図のスライス形状で a-a なる所に相当し $\theta=90°$ に対する第11図を参照すると縞次数 $n=5.25$ を得るから (21) 式より

$$\tau_{yz}=1.11\times10^{-2}\ \mathrm{kg/mm^2}$$

同様の考察を行なって $\theta=60°$ に対して $n=2.9$ を得るから (22) 式より

$$\tau_{xz}=1.05\times10^{-2}\ \mathrm{kg/mm^2}$$

が求まる。

ここで, (x, y) なる点は, T字形断面で中心より左右長片の方向に x, 最長片を底辺としてそれより上方 y なる所の点である。理論形状と比較するために 8 mm を単位長さ 1 とする。したがって (4, 8) の点は (0.5, 1) となる。以下この表示法を用いる。

(ロ) スライスの楔状の部分, すなわちある入射角 θ に対する厚さ t' が一定でない部分の応力解析

この場合は第13図のスライス形状図で, T字形断面の上部 (図では H-H より上の部分) では A_1-A_1, A_2-A_2 の外側の範囲, 下部 (図では H-H より下の部分) では B_1-B_1, B_2-B_2 の外側の範囲である。第14図の場合も同じ範囲である。

(19) 式, (20) 式から

$\theta=90°$ に対して

$$n=4\alpha t\,\tau_{yz} \tag{23}$$

$\theta=60°$ に対して

$$n=\alpha t\sqrt{\tau_{xz}^2+4\tau_{yz}^2} \tag{24}$$

上式では有効光路程 t' ではなく, スライスの厚さ t で式が書かれている。t は最大 3.6 mm であるが, 楔状の部分で直線的に減少している。厚さが $\frac{1}{2}$ になると縞次数は厚さ一定 (t =3.6 mm) と考えたときの2倍の次数を与える。(23) 式と (24) 式で t(= 3.6 mm) を一定とし, その部分の光路程が t の $1/a$ に相当すれば na を縞次数として計算する。

結局, この範囲での計算式はつぎのようになる。

$$na=4\alpha t\,\tau_{yz}\qquad(\theta=90°) \tag{25}$$

$$na=\alpha t\sqrt{\tau_{xz}^2+4\tau_{yz}^2}\qquad(\theta=60°) \tag{26}$$

以上の方法で計算した結果を第2表に示す。第2表の比較値とは, つぎの如く計算した値

である。

$$比較値=\left(1-\frac{実験値}{理論値}\right)\times 100\ (\%)$$

比較値の欄の上の値は τ_{yz} の，下の値は τ_{xz} の比較値である。

第2表 実験応力値と理論計算値の比較

x	y	入射角 θ	縞次数 n	倍数 a	実験応力値 τ_{yz} kg/mm²	実験応力値 τ_{xz} kg/mm²	理論応力値 τ_{yz} kg/mm²	理論応力値 τ_{xz} kg/mm²	比較値 %
		90°	1	1					
1.5	0	60°	2	1	0.21×10^{-2}	1.5×10^{-2}	0	1.68×10^{-2}	10 6
		90°	1.7	1					6.2
0.5	0.5	60°	0.95	1	0.36×10^{-2}	0.36×10^{-2}	0.384×10^{-2}	0.384×10^{-2}	6.2
		90°	1.8	1					1.0
1.0	0.5	60°	0 91	1	0.38×10^{-2}	0.12×10^{-2}	0.384×10^{-2}	0.128×10^{-2}	6.2
		90°	1.4	1					−17
1.25	0.5	60°	0.8	1	0.3×10^{-2}	0.32×10^{-2}	0.256×10^{-2}	0.384×10^{-2}	16.6
		90°	1.8	1					1.0
0.25	0.75	60°	0.95	1	0.38×10^{-2}	0.25×10^{-2}	0.384×10^{-2}	0.256×10^{-2}	2.4
		90°	2.6	1					− 6.0
0.5	0.75	60°	1.6	1	0.55×10^{-2}	0.805×10^{-2}	0.52×10^{-2}	0.77×10^{-2}	− 4.5
		90°	3.6	1					2.0
0.75	0.75	60°	2	1	0.76×10^{-2}	0.74×10^{-2}	0.775×10^{-2}	0.775×10^{-2}	4.5
		90°	3.2	1					12.2
1.0	0.75	60°	2.5	1	0.68×10^{-2}	1.63×10^{-2}	0.775×10^{-2}	2.32×10^{-2}	29.7
		90°	2.2	1					9.5
1.25	0.75	60°	2.0	1	0.47×10^{-2}	1.44×10^{-2}	0.52×10^{-2}	2.06×10^{-2}	30.1
		90°	2	1					−10.7
0.25	1	60°	1	1	0.425×10^{-2}	0	0.384×10^{-2}	0.129×10^{-2}	
		90°	5.25	1					14.0
0.5	1	60°	2.9	1	1.11×10^{-2}	1.05×10^{-2}	1.29×10^{-2}	1.16×10^{-2}	9.5
		90°	6	4/3					12.0
0.75	1	60°	4.2	1	1.7×10^{-2}	1.09×10^{-2}	1.93×10^{-2}	1.16×10^{-2}	6.0
		90°	4.8	2					
1	1	60°	3	1.8	2.04×10^{-2}	2.04×10^{-2}	∞	∞	

第2表　その2

x	y	入射角 θ	縞次数 n	倍数 a	実験応力値 τ_{yz} kg/mm²	実験応力値 τ_{xz} kg/mm²	理論応力値 τ_{yz} kg/mm²	理論応力値 τ_{xz} kg/mm²	比較値 %
		90°	0	1					
1.25	1	60°	2.7	1	0	2.3×10^{-2}	0	2.7×10^{-2}	14.8
		90°	5.25	1					14.0
0.5	1.25	60°	2.9	1	1.11×10^{-2}	1.05×10^{-2}	1.29×10^{-2}	1.16×10^{-2}	9.5
		90°	6	4/3					11.9
0.75	1.25	60°	4.2	1	1.7×10^{-2}	1.09×10^{-2}	1.93×10^{-2}	1.16×10^{-2}	6.0
		90°	4.2	2					−38.0
1	1.25	60°	2.3	1.8	1.78×10^{-2}	0	1.29×10^{-2}	0	
		90°	2	1					−10.6
0.25	1.5	60°	1.2	1	0.425×10^{-2}	0.6×10^{-2}	0.384×10^{-2}	0.256×10^{-2}	−23.3
		90°	4.2	1					31.0
0.5	1.5	60°	2.2	1	0.89×10^{-2}	0.59×10^{-2}	1.29×10^{-2}	1.16×10^{-2}	49.0
		90°	4.8	4/3					25.0
0.75	1.5	60°	3.5	1	1.35×10^{-2}	1.2×10^{-2}	1.8×10^{-2}	1.16×10^{-2}	− 3.4
		90°	3.7	2					−10.5
1.0	1.5	60°	2.5	1.8	1.57×10^{-2}	0	1.42×10^{-2}	0	
		90°	1	1					44.7
0.25	1.75	60°	2	1	0.212×10^{-2}	1.6×10^{-2}	0.384×10^{-2}	0.256×10^{-2}	59.2
		90°	2.6	1					57.4
0.5	1.75	60°	2.4	1	0.55×10^{-2}	0.87×10^{-2}	1.29×10^{-2}	1.16×10^{-2}	25.0
		90°	3	4/3					52.8
0.75	1.75	60°	2.4	1	0.85×10^{-2}	1.12×10^{-2}	1.8×10^{-2}	1.16×10^{-2}	3.5
		90°	2.4	2					28.1
1.0	1.75	60°	1.5	1.8	1.02×10^{-2}	1.05×10^{-2}	1.42×10^{-2}	0	

(ii)　T 字形断面棒捩り実験　— その2 —

応力解析に必要な数値を列記する。

l = 標点距離 103 mm　試験片全長 110 mm　凍結開始温度 120°C

θ = 捩れ角 15.2° (0.265 rad)

T = 捩りモーメント　6.825 kg·mm

α = 光弾性感度　32.7 mm/kg

θ = 棒の軸と光線軸間角度　60°, 90°

t＝スライスの厚さ　1.8 mm

t'＝有効光路程　$t'=t/\sin(60°+\theta)$

G＝横弾性係数　0.435 kg/mm²

断面寸法は第15図に示す。

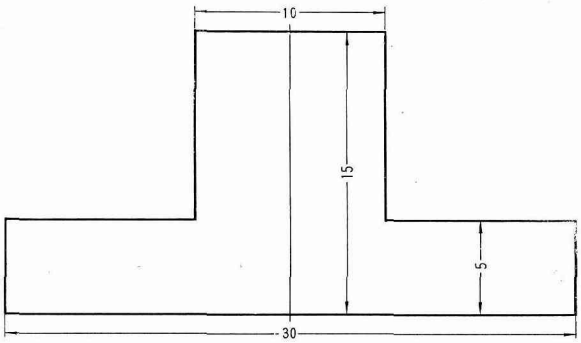
斜入射角 $\theta=60°$, $\theta=90°$ の2つの応力図を第16図，第17図に示す。

応力解析は第16図だけを用いて，τ_{yz} だけ解析した。第17図の応力形で縞次数が少ないため τ_{yz} の解析にとどまり，実験―その1―の不備の点を補うこととした。

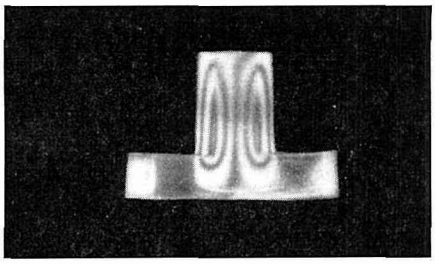
以下の解析は実験―その1―の場合と同様である。解析結果を第3表に示す。

第3表　実験応力値と理論計算値の比較

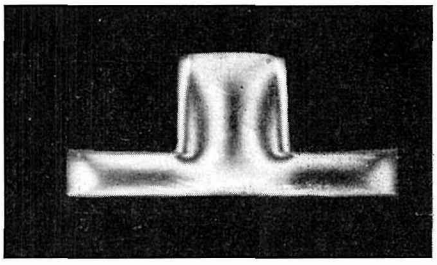
x	y	倍数 a	縞次数 n	実験値 (τ_{yz} kg/mm²)	計算値 (τ_{yz} kg/mm²)	比較値 %
1.5	0	1	0	0	0	
0.5	0.5	1	0.45	0.191×10^{-2}	0.173×10^{-2}	−10
1.0	0.5	1	0.45	0.191×10^{-2}	0.173×10^{-2}	−10
1.25	0.5	1	0.3	0.127×10^{-2}	0.115×10^{-2}	−10
0.25	0.75	1	0.45	0.191×10^{-2}	0.173×10^{-2}	−10
0.5	0.75	1	0.6	0.254×10^{-2}	0.234×10^{-2}	− 7
0.75	0.75	1	0.85	0.36×10^{-2}	0.349×10^{-2}	− 3
1.0	0.75	1	0.85	0.36×10^{-2}	0.349×10^{-2}	− 3
1.25	0.75	1	0.6	0.254×10^{-2}	0.234×10^{-2}	− 7
0.25	1	1	0.45	0.191×10^{-2}	0.173×10^{-2}	−10
0.5	1	1	1.3	0.55×10^{-2}	0.58×10^{-2}	+ 5
0.75	1	1.18	2	0.99×10^{-2}	0.867×10^{-2}	−14
1	1	2	1.5	1.27×10^{-2}	∞	
1.25	1	1	0	0	0	
0.5	1.25	1	1.3	0.55×10^{-2}	0.58×10^{-2}	+ 5
0.75	1.25	1.18	2	0.99×10^{-2}	0.867×10^{-2}	−14
1	1.25	2	1	0.85×10^{-2}	0.58×10^{-2}	−46
0.25	1.5	1	0.45	0.21×10^{-2}	0.173×10^{-2}	−20
0.5	1.5	1	1.3	0.55×10^{-2}	0.58×10^{-2}	+ 5
0.75	1.5	1.18	2	0.99×10^{-2}	0.81×10^{-2}	−22
1	1.5	2	1.2	1.02×10^{-2}	0.64×10^{-2}	−59
0.25	1.75	1	0.45	0.21×10^{-2}	0.173×10^{-2}	−20
0.5	1.75	1	1.3	0.55×10^{-2}	0.58×10^{-2}	+ 5
0.75	1.75	1.18	2	0.99×10^{-2}	0.81×10^{-2}	−22
1	1.75	2	1.2	1.02×10^{-2}	0.64×10^{-2}	−59



第15図　スライス形状



第16図



第17図

IV. 理論計算結果と実験解析結果に対する考察

第3図，第4図，第5図の理論計算結果図と第2表，第3表の実験値と計算値の比較表を検討してつぎの結論を得た。

1. 理論計算結果，境界上で境界に垂直な応力成分は零である。これは捩り理論と一致する。実験では零でない点がある。たとえば (0, 1.5) (1.0, 1.25) の点で τ_{yz} の値が零でない。

これは，実験解析用の T 字形断面の形状と，理論計算の断面形状の違いによる境界辺 A–A の影響と考えられる。

2. 凹角隅部の境界上ではなく，その近傍の内部に応力値の大きな範囲があることが理論計算により知ったが，実験においても，この範囲は境界辺の影響を受けず，理論計算応力値と実験解析値がよく一致している。

3. 凹角隅部の境界直交点で応力が無限大になり，その近傍の境界では応力は大きな値をとらず各辺によりある一定値に収束することが理論計算により判明した。

実験では凹角隅部の応力は大きな値となるがそれほど著じるしくない。これはスライスの厚みに平均化されたためである。

各辺によりある一定値に収束する傾向が応力図にうかがわれる。

4. 内部および境界で，実験形状が理論形状と違うために境界辺の影響を受けて，応力値

のあまりよく一致しない点があった。

しかし実験—その２—の如く形状を変えることにより，さらに一層よりよい応力値の一致が見られることが判明した。

5. 本実験ではスライスの厚みが楔形となる所で応力値が理論値と一致しなかった。

この点に関しては，形状を変えても同じである。しかし問題となる凹角隅部近傍の応力値は本実験で十分解析され，理論値とよい一致をみた。

終りに，研究上種々の御協力戴いた岸田路也助教授，および材料力学講座の各位に深く感謝いたします。

参考文献

1) E. Trefftz : "Über die Torsion prismatisch Stäbe von polygonalen Querschnitt.", Math. Ann. 97, vol 82. (1921)
2) Forsyth : Theory of Function, Third. ed.
3) 井上正雄 : 応力関数論, 93 頁.
4) 池田芳郎 : 等角写像とその応用, 83 頁.
5) 石津武彦 : 関数論とその応用, 331 頁.
6) Roak : Formulas for stress and strain, 151.
7) J. H. Huth : J. appl. Mech. 17-4 (1950), 388.
8) 辻二郎・河田幸三 : 光弾性実験法.
9) 応力測定技術研究会 : 応力測定法.
10) Max. M. Frocht : "Studies in Three-Dimensional Photoelasticity Torsional Stresses of oblique Incidence", J. Appl. Mech. 11 (1944), A-229.