



Title	Gas Lensの理論的考察
Author(s)	鈴木, 道雄; Suzuki, Michio; 青木, 由直 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 38, 89-101
Issue Date	1965-09-02
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/40767">https://hdl.handle.net/2115/40767</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	38_89-102.pdf



# GAS LENS の理論的考察

鈴木道雄  
青木由直

## Theoretical Consideration of Gas Lens

Michio SUZUKI  
Yoshinao AOKI

### Abstract

In this paper, a theoretical consideration of gas lens is presented and the propagation of light in a medium with a gradient of refractive index is considered.

The eikonal equation which is the fundamental equation in geometrical optics is expressed by wave vector  $\mathbf{K}$  for the convenience of theoretical treatment in the following manner ;

$$\text{curl } \mathbf{K} = 0$$

The general equations which describe the path of the wave front of light in a medium with a gradient of refractive index only along the  $\rho$ -axis of the cylindrical coordinate are obtained by solving the above equation. The resulting equations are as follows ;

- (a) in the case where the  $\varphi$ -component of the wave vector  $\mathbf{K}$  does not exist

$$z = \int^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{k}{C_1}\right)^2 - 1}}$$

- (b) in the case where the  $\varphi$ -component of the wave vector exists

$$z = \int^{\rho} d\rho \frac{C_1}{\sqrt{k^2 - \left(\frac{C_2}{\rho}\right)^2 - C_1^2}}$$

$$\varphi = \int^{\rho} d\rho \frac{C_2}{\rho^2 \sqrt{k^2 - \left(\frac{C_2}{\rho}\right)^2 - C_1^2}}$$

$$z = \int^{\varphi} \frac{C_1}{C_2} \rho^2(\varphi) d\varphi$$

where  $|\mathbf{K}| = k$ ,  $C_1 = k_z$ ,  $C_2 = k_{\varphi}\rho$  and  $C_1, C_2$  are constants.

Similarly a case in which the refractive index changes only along the  $z$ -axis was considered and it was indicated that the gradient of refractive index along the  $z$ -axis is an important factor for the convergence of the light beam in the laminar flow-type gas lens.

## ま え が き

Laser beam を利用した長距離通信において、光伝送における損失を除く事が大きな問題となっている。この為 gas を利用して屈折率の勾配を持つ媒質をつくり、光 beam を収束し送伝する gas lens の方法が考えられ、1964年に D. W. Berreman<sup>2,3)</sup> により gas lens の実験報告がなされている。筆者等も現在第1図の如き温度勾配を利用した層流型の gas lens 装置を設

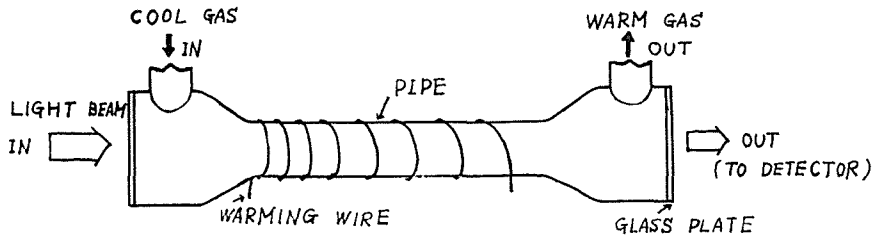


Fig. 1. Laminar flow-type gas lens using temperature gradient.

計し、実験する計画中である。しかし gas lens 装置の設計、理論解析において、屈折率の勾配のある媒質中での光の伝播が問題となってくる。屈折率が球座標の半径方向にのみよるような媒質中の光の伝播などでは、大気中の電波の伝播（地球のまわりを考慮したような領域における）等の問題で取り扱われている。

Gas lens のような媒質中での光の伝播については、最近では P. K. Tine, J. P. Gordon, J. R. Whinnery<sup>4)</sup> が解析しているが、正確に光路を決定するといった事についてはやっていない。これ等の事を考え、屈折率の勾配が円筒座標の径方向、又は軸方向のみに存在する媒質中の光の伝播について、光路を決定する一般式を導いてみた。又第1図の如き層流型の gas lens において軸方向の屈折率の変化も、光 beam の収束におおに関係してくる事も示した。なお理論解析においては、光を幾何光学的に取り扱い媒質には損失がないとして解いている。

又出发点となる基本方程式である eikonal equation を波数 vector で表現し、波数 vector に関する偏微分方程式を解いている。こうすると屈折率と位置 vector の積のかたちをした eikonal equation をとり扱うより容易になると思われる。

## § 1. 基本方程式

光の場を記述する Maxwell 方程式は、Gauss 単位系で次のように書ける。

$$\text{curl } \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$\text{curl } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mu \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 0 \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mu \mathbf{H} = 0 \quad (4)$$

又媒質の屈折率  $n$  は媒質定数,  $\epsilon, \mu$  と次の関係にある。

$$n = \sqrt{\epsilon \mu} \quad (5)$$

ここで光の電場, 磁場が時間的に調和振動している平面波と考えると, 平面波のかたよりの vector を  $\mathbf{e}(\mathbf{r}), \mathbf{h}(\mathbf{r})$  として,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{e}(\mathbf{r}) e^{i\varphi(\mathbf{r})} \quad (6)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{h}(\mathbf{r}) e^{i\varphi(\mathbf{r})} \quad (7)$$

ここで光を幾何光学的に扱おうと, 波数  $k_0 = \frac{\omega}{c}$  が非常に大きいとし, (6), (7) の関係を Maxwell 方程式に代入して次の式を得る (Appendix I)。

$$\operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{h} + k_0 \epsilon \mathbf{e} = 0 \quad (8)$$

$$\operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{e} - k_0 \mu \mathbf{h} = 0 \quad (9)$$

$$\mathbf{e} \cdot \operatorname{grad} \varphi = 0 \quad (10)$$

$$\mathbf{h} \cdot \operatorname{grad} \varphi = 0 \quad (11)$$

ここで

$$\operatorname{grad} \varphi = \mathbf{K} \quad (12)$$

とにおいて (12) 式を (8)~(11) 式に代入すると,

$$(|\mathbf{K}|^2 - k_0^2 \mu \epsilon) \mathbf{e} = 0$$

$$\therefore |\mathbf{K}| = k = k_0 \sqrt{\mu \epsilon} = k_0 n \quad (13)$$

(10), (11) 両式より vector  $\mathbf{K}$  は平面波のかたよりの vector のつくる面に垂直であるから, 平面波の進行方向に向いており, (13) 式よりその大きさが  $k_0 n$  であるから光波の波数 vector と考えられる。今光路にそってとった線素を  $ds$  とすれば, (12) 式より  $\varphi$  が求まり,

$$\varphi = \int^s k ds \quad (14)$$

(12) 式は幾何光学において基本方程式となる eikonal equation を波数 vector で表示した式である。(12) 式の両辺の curl をとると,  $\operatorname{curl} \operatorname{grad} \equiv 0$  に留意して,

$$\operatorname{curl} \mathbf{K} = 0 \quad (15)$$

よって, 光路は (15) 式を解く事により得られる。

## § 2. 屈折率の勾配が円筒座標の径方向のみにある媒質中の光の伝播

### (a) 波数 vector の $\varphi$ 成分がない場合

第2図において屈折率に円筒座標の  $\rho$  方向のみに変化し, 波数 vector の  $\varphi$  成分が存在しない場合を考える。これは層流型 gas lens において, 光線と管軸が同一平面内にあるように光

を入射させた場合の光の伝播に相当する。波数 vector の  $\rho, \varphi, z$  成分をそれぞれ  $k_\rho, k_\varphi, k_z$  とすれば、 $k_\varphi = 0$  より、 $\mathbf{i}_\rho, \mathbf{i}_z$  を  $\rho, z$  方向の unit vector として、

$$\mathbf{K} = \mathbf{i}_\rho k_\rho + \mathbf{i}_z k_z \quad (16)$$

但し

$$|\mathbf{K}| = k = \sqrt{k_\rho^2 + k_z^2} \quad (17)$$

(16) 式を (15) 式に代入して次の式を得る。

$$\frac{\partial k_\rho}{\partial z} - \frac{\partial k_z}{\partial \rho} = 0 \quad (18)$$

ここで (17) 式の関係を、 $k$  は  $\rho$  のみの関係である事に留意して (18) 式より

$$\frac{k_z}{\sqrt{k^2 - k_z^2}} \frac{\partial k_z}{\partial z} + \frac{\partial k_z}{\partial \rho} = 0 \quad (19)$$

(19) 式において三つの座標 ( $\rho, z, k_z$ ) で構成される空間を考えると、(19) 式の 1 階の偏微分方程式の解、 $k_z = f(\rho, z)$  はこの空間で曲面をあらわしており、その曲面をおりなす流線が光路をあらわしている。光流線 (以後光の流線という意味で光流線という言葉をつかう) の方程式は次のように書ける。

$$\frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{k}{k_z}\right)^2 - 1}} = \frac{dz}{1} = \frac{dk_z}{0} \quad (20)$$

ここで光路に沿ってとった線素を  $ds$  とすると、

$$\frac{d}{ds} (\mathbf{K} \cdot \mathbf{i}_z) = \frac{d\mathbf{K}}{ds} \cdot \mathbf{i}_z + \mathbf{K} \cdot \frac{d\mathbf{i}_z}{ds}$$

ここで

$$\frac{d\mathbf{K}}{ds} = \text{grad } k = \mathbf{i}_\rho \frac{dk}{d\rho} \quad (\text{Appdenix II})$$

$$\frac{d\mathbf{i}_z}{ds} = 0$$

より

$$\frac{d}{ds} (\mathbf{K} \cdot \mathbf{i}_z) = 0 \quad (21)$$

(21) 式より波数 vector  $\mathbf{K}$  の  $z$  成分  $k_z$  は光路にそって一定の値である事を示している。さてこの定数を  $C_1$  とおくと、

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{i}_z = k_z = \text{const.} = C_1 \quad (22)$$

(22) 式は初期条件を与えている。(22) 式より (20) 式の最初の式はすぐ積分出来て、

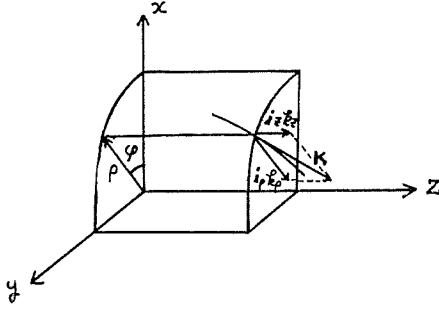


Fig. 2. Cylindrical co-ordinate  
Refractive index depends  
only on the co-ordinate  $\rho$ .

$$z = \int^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{k}{C_1}\right)^2 - 1}} \quad (23)$$

(23) 式が屈折率の勾配が  $\rho$  方向のみに存在する媒質中で、波数 vector の  $\varphi$  成分がないような光が伝播する時の光路をあらわす一般式となる。

(b) 波数 vector の  $\varphi$  成分がある場合

波数 vector  $\mathbf{K}$  は、

$$\mathbf{K} = \mathbf{i}_\rho k_\rho + \mathbf{i}_\varphi k_\varphi + \mathbf{i}_z k_z \quad (24)$$

但し

$$|\mathbf{K}| = k = \sqrt{k_\rho^2 + k_\varphi^2 + k_z^2} \quad (25)$$

(24) 式を (15) 式に代入して各成分について書くと、

$$\frac{\partial k_\rho}{\partial z} - \frac{\partial k_z}{\partial \rho} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial k_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial k_\varphi}{\partial z} = 0 \quad (27)$$

$$\frac{k_\varphi}{\rho} + \frac{\partial k_\varphi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial k_\rho}{\partial \varphi} = 0 \quad (28)$$

(25) 式の関係留意して (26)~(28) 式より、

$$\frac{\partial k_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{k_\varphi}{k_\rho} \frac{\partial k_z}{\partial \varphi} + \frac{k_z}{k_\rho} \frac{\partial k_z}{\partial z} = 0 \quad (29)$$

(29) 式において  $(\rho, \varphi, z, k_z)$  の 4 個の座標で構成される四次元空間を考えると、この四次元空間における曲面  $k_z = f(\rho, \varphi, z)$  をおりなす流線がこの空間における光流線となっている。この四次元空間の光流線の三次元空間  $(\rho, \varphi, z)$  への投影が、普通の三次元座標空間において光流線がおりなす曲面を与えている。(29) 式で与えられる曲面の光流線の方程式を求めると次式のようなになる (Appendix III)。

$$\frac{d\rho}{1} = \frac{\rho d\varphi}{\frac{k_\varphi}{k_\rho}} = \frac{dz}{\frac{k_z}{k_\rho}} = \frac{dk_z}{0} \quad (30)$$

ここで次の微分を考えると、

$$\frac{d}{ds} \{(\mathbf{K} - \mathbf{i}_z k_z) \times \mathbf{i}_\rho \rho\} = \frac{d\mathbf{K}}{ds} \times \mathbf{i}_\rho \rho - \frac{d(\mathbf{i}_z k_z)}{ds} \times \mathbf{i}_\rho \rho + (\mathbf{K} - \mathbf{i}_z k_z) \times \frac{d(\mathbf{i}_\rho \rho)}{ds}$$

(21) 式の関係より、

$$\frac{d(\mathbf{i}_z k_z)}{ds} = \mathbf{i}_z \frac{dk_z}{ds} + k_z \frac{d\mathbf{i}_z}{ds} = 0$$

Appendix II より、

$$\frac{d\mathbf{K}}{ds} = \text{grad } k = \mathbf{i}_\rho \frac{dk}{d\rho}$$

又、次の関係も成立する。

$$\frac{d(\mathbf{i}_\rho \rho)}{ds} = \frac{1}{k} (\mathbf{K} - \mathbf{i}_z k_z) \quad (\text{Appendix IV}) \quad (31)$$

よって以上の関係より、

$$\frac{d}{ds} \{ (\mathbf{K} - \mathbf{i}_z k_z) \times \mathbf{i}_\rho \rho \} = 0 \quad (32)$$

(32) 式において  $\mathbf{K} - \mathbf{i}_z k_z = \mathbf{i}_\rho k_\rho + \mathbf{i}_\varphi k_\varphi$  に留意して、

$$k_\varphi \rho = \text{const.} = C_2 \quad (33)$$

(33) 式は (22) 式と同様に初期条件を与えている。又 (33) 式の関係式は屈折率が球座標の径方向のみに変化がある媒質中を光が伝播する際に満足する関係、

$$r k_\theta = \text{const.} \quad (34)$$

に対応している。但し  $k_\theta$  は波数 vector の  $\theta$  成分 (Appendix V)。 (22), (23) 式の関係より (30) 式の最初の 3 つの式はすぐ積分出来て、次のようになる。

$$z = \int^\rho d\rho \frac{C_1}{\sqrt{k^2 - \left(\frac{C_2}{\rho}\right)^2 - C_1^2}} \quad (35)$$

$$\varphi = \int^\rho d\rho \frac{C_2}{\rho^2 \sqrt{k^2 - \left(\frac{C_2}{\rho}\right)^2 - C_1^2}} \quad (36)$$

$$z = \int^\varphi \frac{C_1}{C_2} \rho^2(\varphi) d\varphi \quad (37)$$

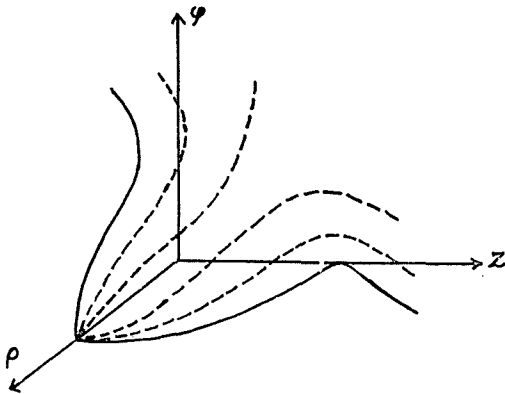


Fig. 3. Flow lines of light (path of light) and a curved surface weaved by these flow lines

(35), (36), (37) 式は第 3 図に示すように光流線の  $\rho-z$  平面,  $\rho-\varphi$  平面,  $z-\varphi$  平面への投影をあらわしており, (30) 式は第 3 図に示すように光流線でおりなされる曲面を示している。

### § 3. 屈折率の勾配が直角座標の一方にある媒質中の光の伝播

第 2 図において  $z$  方向に屈折率の勾配がある媒質を考える。この場合直角座標で考えると便利なので第 2 図において  $z$  軸を直角座標の  $z$  軸とし,  $z$  軸に垂直な面内に

$x$  軸,  $y$  軸をとる。この場合波数 vector は,

$$\mathbf{K} = \mathbf{i}_x k_x + \mathbf{i}_y k_y + \mathbf{i}_z k_z \quad (38)$$

但し

$$|\mathbf{K}| = k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad (39)$$

(38) 式を (15) 式に代入して成分について書くと,

$$\frac{\partial k_z}{\partial y} - \frac{\partial k_y}{\partial z} = 0 \quad (40)$$

$$\frac{\partial k_x}{\partial z} - \frac{\partial k_z}{\partial x} = 0 \quad (41)$$

$$\frac{\partial k_y}{\partial x} - \frac{\partial k_x}{\partial y} = 0 \quad (42)$$

(39) ~ (42) 式より次の式を得る。

$$\frac{\partial k_x}{\partial x} + \frac{k_y}{k_x} \frac{\partial k_x}{\partial y} + \frac{k_z}{k_x} \frac{\partial k_x}{\partial z} = 0 \quad (43)$$

(43) 式より光流線の方程式は,

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{\frac{k_y}{k_x}} = \frac{dz}{\frac{k_z}{k_x}} = \frac{dk_x}{0} \quad (44)$$

ここで

$$\frac{d}{ds} (\mathbf{K} \cdot \mathbf{i}_x) = \frac{d\mathbf{K}}{ds} \cdot \mathbf{i}_x + \mathbf{K} \cdot \frac{d\mathbf{i}_x}{ds} = \text{grad } n \cdot \mathbf{i}_x = 0,$$

$$\therefore k_x = \text{const.} = C_1 \quad (45)$$

同様に

$$k_y = \text{const.} = C_2 \quad (46)$$

(45), (46) が初期条件を与えている。

(45), (46) 式より (44) 式の最初の 3 つの式はすぐ積分出来て,

$$x = \frac{C_1}{C_2} y + C_3 \quad (47)$$

$$x = \int^z dz \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k}{C_1}\right)^2 - \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 - 1}} \quad (48)$$

$$y = \int^z dz \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k}{C_2}\right)^2 - \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^2 - 1}} \quad (49)$$

今屈折率の勾配が  $z$  方向に直線的な場合を考えてみると, 波数 vector の大きさを次のようにおく。

$$k = k_0 + k_1 z \quad (50)$$

(50) の関係を (47)~(49) 式に代入して初期条件として  $C_3 = 0$  とおくと,

$$x = \frac{C_2}{C_1} y \quad (51)$$

$$x = \frac{C_1}{k_1} \ln \left[ \frac{(k_0 + k_1 z) + \sqrt{(k_0 + k_1 z)^2 - (C_1^2 + C_2^2)}}{k_0 + \sqrt{k_0^2 - (C_1^2 + C_2^2)}} \right] \quad (52)$$

$$y = \frac{C_2}{k_1} \ln \left[ \frac{(k_0 + k_1 z) + \sqrt{(k_0 + k_1 z)^2 - (C_1^2 + C_2^2)}}{k_0 + \sqrt{k_0^2 - (C_1^2 + C_2^2)}} \right] \quad (53)$$

(51)~(53) 式を一本の光流線について描いてみると第 4 図 (a), (b) のようになる。この図から明らかのように、拡がってゆく光に対しては、 $k_1 > 0$  であれば媒質な凸 lens に似た働きをし、 $k_1 < 0$  であれば凹 lens に似た働きをする。よって層流型の gas lens においても、管軸方向の温度勾配が光 beam の収束に関係してくる事がわかる。

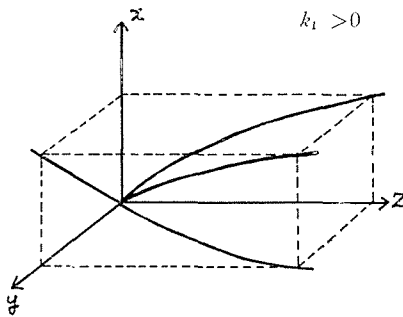


Fig. 4-a.

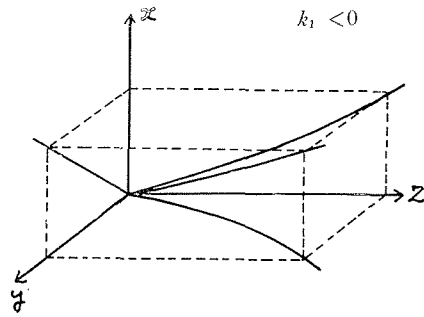


Fig. 4-b.

A flow line of light and the projection of it in a medium which has the gradient of refractive index only along  $z$ -axis.

### あ と が き

Gas lens につき、gas lens をなす媒質中の光の伝播の理論的考察をした。理論解析の基本方程式である eikonal equation を波数 vector で表示し、屈折率の勾配が円筒座標の径方向又は  $z$  方向にある媒質中を光が伝播する際の光路を求める一般式を導いた。又これ等の媒質中で光路に沿って保存される波数 vector の成分を明らかにした。得られた結果より層流型の gas lens において、管軸方向の屈折率の勾配も、光 beam の収束におおいに関係がある事を示した。

なお具体的な屈折率を与えて光路を計算する事、光の伝播を力学的 model に対応させて考える事が出来、理解が容易な事とか、その他光 beam の収束、場の強度、媒質に分散 (又は損失) がある場合等の考察は別の機会にゆずりたい。

### 謝 辞

Gas lens の設計、実験の準備にあたり御討論いただいた、応用電気研究所 西辻 昭助教授並びに staff の方々、又工学部電子工学科の laser 研究 group の方々に感謝します。

## 参考文献

- 1) Born, M. and E. Wolff: Principles of Optics, New York: Pergamon Press (1959).
- 2) Berreman, D. W.: A Lens or Light Guide Using Convectively Distorted Thermal Gradients in Gases, B. S. T. J. Briefs p. 1469 (July 1964).
- 3) Berreman: A Gas Lens Using Unlike Counter-Flowing Gases B. S. T. J. p. 1476 (July 1964).
- 4) Tien, P. K., J. P. Gordon, and J. R. Whinnery: Focusing of a Light Beam of Gaussian Field Distribution in Continuous and Periodic Lens-Like Media I. E. E. E. p. 129 (February 1965).
- 5) Marcuse, D. and S. E. Miller: Analysis of a Tubular Gas Lens. B. S. T. J. p. 1759 (July 1964).
- 6) 犬井鉄郎: 偏微分方程式とその応用. コロナ社.

## APPENDIX I

(8) ~ (11) 式の導出

(6), (7) 式を (1) ~ (4) 式に代入して,

$$\text{curl } \mathbf{H}_0 + ik_0 \in \mathbf{E}_0 = 0 \quad (\text{A-1})$$

$$\text{curl } \mathbf{E}_0 - ik_0 \mu \mathbf{H}_0 = 0 \quad (\text{A-2})$$

$$\text{div } \in \mathbf{E}_0 = 0 \quad (\text{A-3})$$

$$\text{div } \mu \mathbf{H}_0 = 0 \quad (\text{A-4})$$

但し

$$k_0 = \frac{\omega}{c} \quad (\text{A-5})$$

(A-1) ~ (A-4) に (6), (7) 式を代入して vector の公式を利用すると,

$$\text{curl } \mathbf{E}_0 = [\text{curl } \mathbf{e} + i(\text{grad } \varphi) \times \mathbf{e}] e^{i\varphi} \quad (\text{A-6})$$

$$\text{curl } \mathbf{H}_0 = [\text{curl } \mathbf{h} + i(\text{grad } \varphi) \times \mathbf{h}] e^{i\varphi} \quad (\text{A-7})$$

$$\text{div } \in \mathbf{E}_0 = [\in \text{div } \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \text{grad } \in + i \mathbf{e} \cdot \text{grad } \varphi] e^{i\varphi} \quad (\text{A-8})$$

$$\text{div } \mu \mathbf{H}_0 = [\mu \text{div } \mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot \text{grad } \mu + i \mu \mathbf{h} \cdot \text{grad } \varphi] e^{i\varphi} \quad (\text{A-9})$$

(A-1) ~ (A-4) 式に (A-6) ~ (A-9) 式を代入して,

$$(\text{grad } \varphi) \times \mathbf{h} + k_0 \in \mathbf{e} - i \text{curl } \mathbf{h} = 0 \quad (\text{A-10})$$

$$(\text{grad } \varphi) \times \mathbf{e} - k_0 \mu \mathbf{h} - i \text{curl } \mathbf{e} = 0 \quad (\text{A-11})$$

$$\mathbf{e} \cdot \text{grad } \varphi - i(\text{div } \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \text{grad } \ln \in) = 0 \quad (\text{A-12})$$

$$\mathbf{h} \cdot \text{grad } \varphi - i(\text{div } \mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot \text{grad } \ln \mu) = 0 \quad (\text{A-13})$$

今幾何光学的な取扱いをするから波数  $k_0$  は非常に大きいものとし, (A-10) ~ (A-13) 式において波数のかかっている項は無視する。

但し  $\varphi$  は平面波の位相と考えられるから, この項には波数  $k_0$  の order のものが入っているから結局得られた式は本文の (8) ~ (11) 式となる。

## APPENDIX II

$\frac{d\mathbf{K}}{ds} = \text{grad } k$  の導出

(12) 式より

$$\text{grad } \varphi = \mathbf{K} \quad (\text{A-14})$$

$\mathbf{K}$  の unit vector を  $\mathbf{K}_0$  とすると,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{K}}{ds} &= \frac{d}{ds} (\text{grad } \varphi) = \mathbf{K}_0 \cdot \text{grad} (\text{grad } \varphi) \\ &= \frac{1}{k} \text{grad } \varphi \cdot \text{grad} (\text{grad } \varphi) \\ &= \frac{1}{2k} \text{grad} [(\text{grad } \varphi)^2] \\ &= \frac{1}{2k} \text{grad } k^2 = \text{grad } k \end{aligned} \quad (\text{A-15})$$

## APPENDIX III

(30) 式の光流線の方程式の導出

(29) 式より

$$\frac{\partial k_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{k_\varphi}{k_\rho} \frac{\partial k_z}{\partial \varphi} + \frac{k_z}{k_\rho} \frac{\partial k_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{A-16})$$

又  $(\rho, \varphi, z, k_z)$  の4個の座標で構成される四次元空間における光流線のおりなす曲面  $k_z = f(\rho, \varphi, z)$  を考えると,  $k_z$  の微分をとって,

$$\frac{\partial k_z}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial k_z}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial k_z}{\partial z} dz - dk_z = 0 \quad (\text{A-17})$$

今第(A-1)図において  $k_z = f(\rho, \varphi, z)$  上のきわめて近い二点  $P(\rho, h_1 \varphi, z, h_2 k_z)$  と  $P'(\rho + d\rho, h_1(\varphi + d\varphi), z + dz, h_2(k_z + dk_z))$  (但し  $h_1, h_2$  は metrical coefficient) をとると光流線にそった vector  $d\mathbf{S}$  が考えられ,

$$d\mathbf{S} = [d\rho, h_1 d\varphi, dz, h_2 dk_z] \quad (\text{A-18})$$

(但し bracket 内に vector の成分を横にならべて vector 表示とする)

今次の vector を考える。

$$\mathbf{n} = \frac{1}{N} \left[ \frac{\partial k_z}{\partial \rho}, \frac{1}{h_1} \frac{\partial k_z}{\partial \varphi}, \frac{\partial k_z}{\partial z}, -\frac{1}{h_2} \right] \quad (\text{A-19})$$

但し

$$N = \sqrt{\left(\frac{\partial k_z}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial k_z}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial k_z}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{1}{h_2}\right)^2}$$

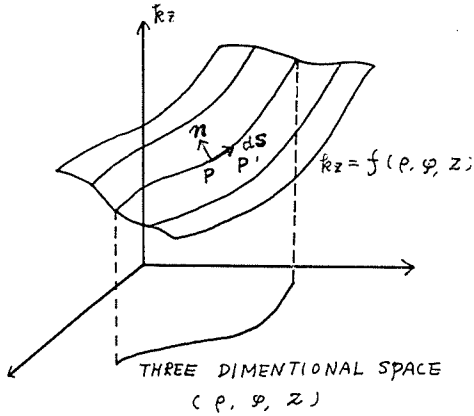


Fig. A-1. Four dimensional space consisted of four co-ordinate  $(\rho, \varphi, z, k_z)$   $k_z=f(\rho, \varphi, z)$  express a curved surface weaved by the flow line of light and  $n$  is a normal vector of the surface. Projection of a flow line of light in the three dimensional space makes a curved surface which is shown in Fig. 3.

ここで (A-18), (A-19) 式の scalar 積をとると

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{1}{N} \left( \frac{\partial k_z}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial k_z}{\partial \varphi} d\varphi \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial k_z}{\partial z} dz - dk_z \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A-20})$$

但し (A-20) において (A-17) 式の関係を用いた。

(A-20) 式より  $n$  は曲面  $k_z=f(\rho, \varphi, z)$  に垂直な方向、つまり normal 方向に向きをもつ unit vector である事がわかる。

さて今度は次のような vector を考える。

$$\mathbf{F} = \left[ 1, \frac{h_1}{\rho} \frac{k_\varphi}{k_\rho}, \frac{k_z}{k_\rho}, -h_2 0 \right] \quad (\text{A-21})$$

(A-17) と (A-21) の scalar 積をとってみると、

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} &= \frac{1}{N} \left( \frac{\partial k_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{k_\varphi}{k_\rho} \frac{\partial k_z}{\partial \varphi} + \frac{k_z}{k_\rho} \frac{\partial k_z}{\partial z} + 0 \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A-22})$$

但し (A-22) 式においては (A-16) 式の関係を用いた。

(A-20) 式と (A-22) 両式より vector  $\mathbf{F}$  と vector  $d\mathbf{S}$  は平行である事がわかる。

$$d\mathbf{S} // \mathbf{F} \quad (\text{A-23})$$

(A-23) 式を成分について書いてみると、

$$\frac{d\rho}{1} = \frac{\rho d\varphi}{\frac{k_\varphi}{k_\rho}} = \frac{dz}{\frac{k_z}{k_\rho}} = \frac{dk_z}{0} \quad (\text{A-24})$$

(A-24) 式が光流線の方程式である。

#### APPENDIX IV

(31) 式の導出

第 (A-2) 図より vector  $\mathbf{r}$  と vector  $i_\rho \rho$   $i_z z$  との関係は、

$$\mathbf{r} = i_\rho \rho + i_z z \quad (\text{A-25})$$

又光流線にそった unit vector を  $\frac{\mathbf{K}}{k}$  であらわすと、

$$d\mathbf{r} = ds \frac{\mathbf{K}}{k} \quad (\text{A-26})$$

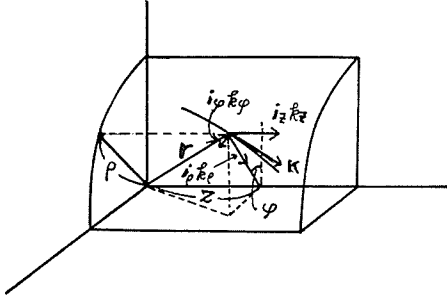


Fig. A-2.  $r$  is position vector and there is following relation,  $r = i_\theta \rho + i_z z$ .

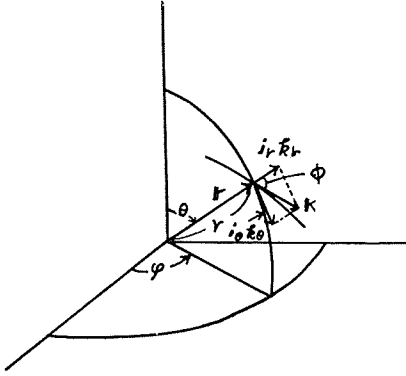


Fig. A-3. Spherical co-ordinate. Refractive index depends only on the co-ordinate  $r$ .

但し

$$k = \sqrt{k_r^2 + k_\theta^2} \quad (\text{A-30})$$

(A-29) を (15) 式に代入して,

$$r \frac{\partial k_\theta}{\partial r} - \frac{\partial k_r}{\partial \theta} = k_\theta \quad (\text{A-31})$$

ここで (A-30) 式を (A-31) 式に代入すると,

$$r \frac{\partial k_\theta}{\partial r} + \frac{k_\theta}{kr} \frac{\partial k_\theta}{\partial \theta} = k_\theta \quad (\text{A-32})$$

(A-32) 式より光流線の方程式は,

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\theta}{\frac{k_\theta}{k_r}} = \frac{dk_\theta}{k_\theta} \quad (\text{A-33})$$

ここで次の計算をする。

$$\frac{d}{ds} (\mathbf{r} \times \mathbf{K}) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \mathbf{K} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{K}}{ds}$$

$$\therefore \frac{d(i_\theta \rho)}{ds} = \frac{K}{k} - i_z \frac{dz}{ds}$$

ここで次の関係が成立するから,

$$\frac{k_z}{k} = \frac{dz}{ds} \quad (\text{A-27})$$

$$\frac{d(i_\theta \rho)}{ds} = \frac{K}{k} - i_z \frac{k_z}{k} = \frac{1}{k} (\mathbf{K} - i_z k_z) \quad (\text{A-28})$$

## APPENDIX V

屈折率の勾配が球座標の半径方向にある媒質中の光の伝播。

第 (A-3) 図のように球座標をとり屈折率は  $r$  の方向のみに変化するとする。今球座標を適当にとると、波数 vector の  $\varphi$  成分を零とおく事が出来るから、

$i_r, i_\theta$  をそれぞれ  $r, \theta$  方向の unit vector  $k_r, k_\theta$  をその方向の波数 vector の成分とすると、

$$\mathbf{K} = i_r k_r + i_\theta k_\theta \quad (\text{A-29})$$

$$\frac{d\mathbf{K}}{ds} = \text{grad } k = \mathbf{i}_r \frac{dk}{dr}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{K}_0$$

$\mathbf{K}_0$  は  $\mathbf{K}$  方向の unit vector

$$\therefore \frac{d}{ds}(\mathbf{r} \times \mathbf{K}) = 0$$

$$\therefore rk \sin \phi = rk_\theta = \text{const.} = C_1 \quad (\text{A-34})$$

(A-34) が本文の (33) 式に対応している。

(A-34) 式の関係より (A-33) 式の最初の式はすぐ積分出来て、

$$\theta = \int^r dr \frac{k_\theta}{rk_r} = \int^r dr \frac{1}{r \sqrt{\left(\frac{k_r}{C_1}\right)^2 - 1}} \quad (\text{A-35})$$