HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	位置決め標準尺の平均化精度
Author(s)	斎藤, 勝政; 三品, 博達
Citation	北海道大學工學部研究報告, 39, 13-26
Issue Date	1965-12-14
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40772
Type	departmental bulletin paper
File Information	39_13-26.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

位置決め標準尺の平均化精度

斎藤勝政
三品博達

Improvement in Accuracy of the Position Measuring Transducer with the Sub-Scale

Katsumasa SAITO
Hiromichi MISHINA

Abstract

The development in the position measuring transducers has been supported by a strong demand to improve the accuracy in the automatic control of machine tools, as well as in precision measurement.

Some of the newest type transducers have an accuracy within $\pm 1\mu$ over the measuring range of some thousands millimeters. In such transducers, the readinghead is equipped with a sub-scale (see Fig. 14). And the sub-scale is considered to be very helpful for the measuring accuracy improvement.

In our laboratory, the behaviors of the sub-scale in the measuring accuracy improvement were studied through measuring experiments and numerical analysis. And the following conclusion were obtained;

(1) The measuring accuracy was improved with the increase of the number of the sub-scale.

(2) The measuring accuracy was chiefly influenced by the pitch error of the standard scale and slightly influenced by that of the sub-scale.

(3) The measuring accuracy was determined by the calculation assuming the Gauss distribution of the pitch errors on both scales.

1. 緒　　論

計測技術の向上により，長さの測定を目的とする差動トランスや可変コンデンサなどを用いたコンパレータで1μ程度の変位を検出することは比較的容易である。しかし，このような感度の高い測定器も最近までは測定範囲を広くとることができず，したがって工作機械や印刷機械などへの導入は一般に困難であった。現在工作機械などに用いられている標準スケールの多くは線度器を除いては親ねじと称されるねじスケールであり，測長範囲は数十 cm から数 m におよぶものである。こうした標準ねじスケールを10μ以下の精度で製作するには非常な労力と費用が必要である。また最近の工作機械の自動制御化の傾向に伴い，測定量を電気信号に

変換しておくことが望まれてきている。これらの要望にしたがって，高精度で広い測長範囲をもつ変換素子の開発が近年活発になり，そのうちいくつかは位置決め検出素子として実用化されつつある[1),2),3)]。

本報告では，こうした変換素子の多くに半ば無意識に用いられている標準スケールの平均化による精度向上の作用を解析し，スケール精度と測定精度の定量的関係を明らかにした。さらに平均化効果を有効に用いることにより，標準スケールの工作精度に比べて測定精度を大幅に向上させることができる点を指摘した。

2. 位置検出素子の一般的構造

現在までに開発されている高精度で長い測定範囲を持ち，さらに測定結果が電気信号で得られる位置検出素子には，原理的に次の三種がある。

(1) 抵抗変換形

(2) 相互誘導あるいは自己インダクタンスなど電磁作用を用いるもの

(3) 容量変換を用いるもの

これらの中で抵抗変換形は原理的には電圧分割によるものであり，通常ポテンシオメータとして広く利用されている。しかし抵抗分割を利用する方法は，機械的な接触を避けることができないため，長期使用の安定性に大きな欠点がみられるが，附属装置が簡単かつ直接的であることから利用される分野も広い。しかし工作機械などのような反復動作が多い過酷な条件ではほとんど利用されない。

相互誘導，自己インダクタンス，容量変換素子による位置検出機構は従来から使用されている親ねじの歩みによるものと同一原理であるが，特に非接触変換素子として利用できる点が大きな特徴である。次に容量変換形，誘導変換形，自己インダクタンス形による位置決め装置の構造を述べる。

2-1 容量変換形

面積 A，空隙の長さ t の平行金属板を考えると，その静電容量は次式で与えられる。

$$C = \frac{\varepsilon A}{t}$$

ε；金属板間の誘電定数

C は ε, A, t の関数であるからこの三つはいずれも容量を変化させることができる。これをコンパレータとして用いる場合，一般には間隙の変化を利用するが，この方法では微小変位しか測定できない。そこで工作機械などの位置決め装置に用いるには，Fig. 1 (a) のように等分割された櫛歯状の突起を持つスケールとスライダを電極と

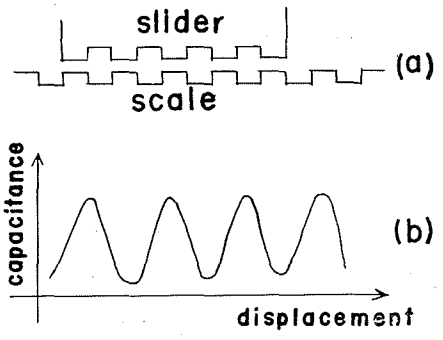

Fig. 1. Principle of the capacitance type transducer.

して用いる。スライダを移動させたときの容量は正弦波的な増減をする (Fig. 1 (b)) から，その変化の波数と容量値から長い距離と同時に微小変位量も読みとれることになる。さらに櫛歯状突起の代りにねじを用いれば，微小変位量は回転角に比例するので，直接サーボ系への導入が可能になる。

2-2 誘導変換形 (インダクタンス変換も含む)

誘導変換によるコンパレータの代表的なものは差動トランスである。これがせまい範囲の変位測定に大きな工業的成果をあげている点に注目し，これを利用したいくつかの位置決め装置が開発されている。

次に本実験に使用した位置検出素子の原理と構造を説明する。Fig. 2 に示すように，二組のコイルの中に磁性体コアが挿入されており，コアの軸方向の変位により，二組のコイルの自己インダクタンスが変化し，出力信号が得られるようになっている。コアには前に述べたように精密ねじが用いられている。コイルは円筒に巻かれた二条コイルを使用し，コイルのリードは，スケール (精密ねじ) のピッチに等しく作られている。二条に巻かれたコイルを Fig. 3 に

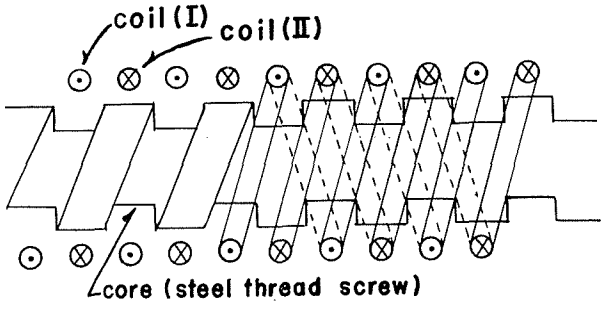

Fig. 2. Principle of the self-inductance type transducer.

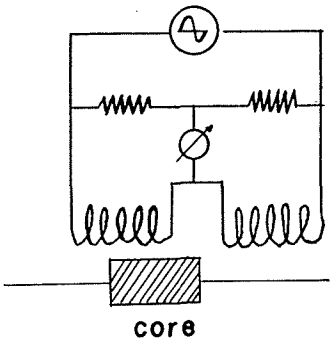

Fig. 3. Bridge circuit of the self-inductance transducer.

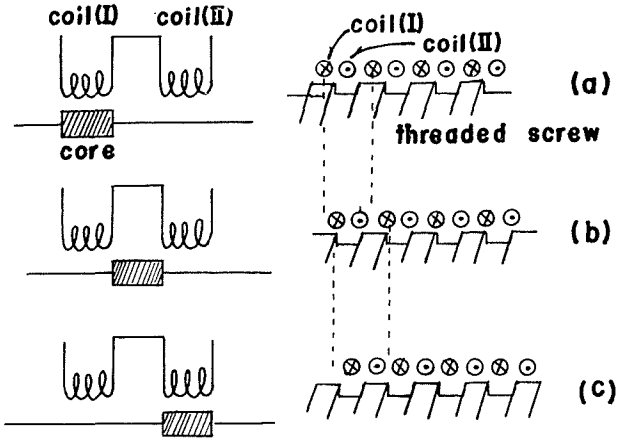

Fig. 4. Relation between displacement of core and thread screw.

示すようなブリッジに組み，発振器から励磁電圧を加える。各コア（精密ねじのねじ山）が Fig. 4(a) のようにいっぽうのコイルに重なったとき，二つのコイルのインダクタンス差が最大になり，したがって出力電圧は最大となる。Fig. 4(a) からねじの 1/4 ピッチだけコアが移動すると (Fig. 4(b) すなわち各コアが二つのコイルの中間にきた場合)，両コイルの自己インダクレンスが等しくなり，ブリッジは平衡して出力電圧は零になる。さらに 1/2 ピッチ移動すると出力電圧は再び零になり，出力電圧はその間では近似的に正弦変化をする。出力電圧とコア移動量の関係を Fig. 5(a) に示した。この出力信号を位相弁別して検波をすると Fig. 5(b) に示すような正弦波状の信号が得られる。すなわちコアのピッチとコイルのリードが等しく工作された場合，この信号の零点はねじの半ピッチごとに表われることになる。しかし，コアもコイルもともに誤差を伴なうため，出力信号にはこれらの誤差が複雑に入りまじり，それぞれの工作精度と異なった精度を示すのが普通である[2]。

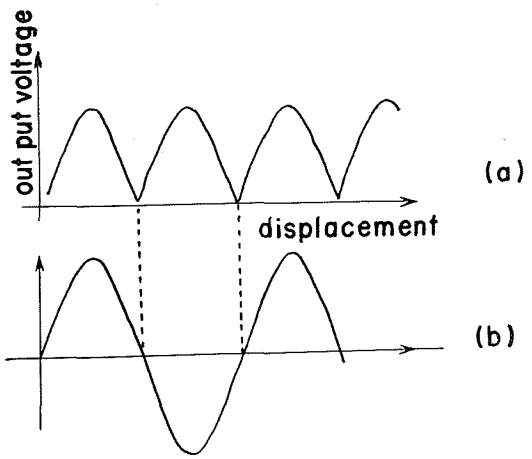

Fig. 5. Schematic illustration of out put voltage.
(a) before phase detector.
(b) after phase detector.

相互誘導を利用する場合も上に述べたインダクタンス形と同じ考え方で理解できる。ただしコアが二条ねじに巻かれた励磁用一次コイルで置きかえられている。

3. 実　　験

本実験においては上に述べた容量変換形，誘導変換形位置検出素子を，スケール（主スケール）と別のスライダ（副スケール）を持つ位置検出素子として一般化して解析を行なった。実験には比較的雰囲気に左右されにくい誘導形位置検出素子を用い，ねじのピッチ，コイルのリードおよひ出力誤差の測定を行なった。使用したねじスケールおよびコイルボビンの仕様は下記の通りである。

主スケール（角ねじ）

有効長	300 mm
山径	25 mm ϕ ±0.03
谷径	23 mm ϕ
ねじのピッチ	2 mm
ねじ形状	角形
材質	軟鋼　S 15 C

副スケール（検出コイル）

有効長	60 mm
円筒内径	25.3 mm ϕ
コイルのリード	2 mm
巻数	60 turns
ボビン材質	ステンレス鋼（表面絶縁メッキ）

3-1 標準ねじスケールのピッチおよびコイルリードの測定について

標準スケールとして用いるねじスケールの工作精度を2-2に述べた誘導形位置検出装置における出力精度と比較するためには，ねじスケールのピッチを高い精度で測定しておく必要がある。すなわち装置の出力の期待精度が1μ程度あることを考えると，ねじスケールは1μ程度の精度で測定しなくてはならない。現在の精密測定技術および測定機器を用いて200～300 mmにわたってこの程度の精度で測定することは不可能ではない。しかし，こうした精密測定を行なうにあたっては多くの労力と，完全に制御された雰囲気が必要である。本実験では直接こうした高精度測定をさけて，比較的条件をゆるめた中で最大の測定精度を望むことが必要になる。ちなみに現在一般に使用されている測長機を用いて測定を行なった場合，測定に伴なって生じる誤差は（個人誤差，偶然誤差を含めて）±3～±5μ程度であり，そうとう熟練しても±3μ以下のくり返し精度を保持することは困難である。本実験では測定を多数回行ない測定値に対し統計的処理をほどこし，測定に対する信頼度を高めることにした。

3-2 ねじスケールのピッチとコイルリードの測定

測定はカール・ツアイスの万能測長機（UMM）を用いた。測長機付属の標準スケールの精度は±1μ以内，スパイラルマイクロメータでは±0.5μ以内である。したがってUMMの総合精度は±1.5μ以内である。

ねじスケールのピッチ測定にはUMM付属のナイフエッジを用い，軸切断法で行なった。Fig.6のようなナイフエッジをねじスケールのフランク面にあて，エッジ端から0.3 mmの所に刻まれた毛細線（太さ0.3μ）を顕微鏡接眼レンズの標線（被測定物体上に換算して0.3μの太さをもつ）に一致させ，その位置を測定し，次のねじスケールのねじのフランク面にあてられたナイフエッジの毛細線までの距離をもってねじスケールの単一ピッチとした。測定の際にはエッジおよび接眼鏡の標線の太さによる分解能の限界（最大0.6μ）の外にエッジの接触状態による誤差が入り，これらはいずれも偶然誤差に類するものである。このようにして行なった測定での同一点でのくり返し精度は3～5μ程度であった。偶然誤差は誤差論の教えるところでは測定回数を増すことにより互に

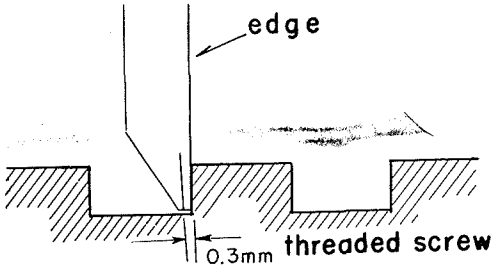

Fig. 6. Measuring the pitch of the screw.

打消し合い，測定値の信頼度を高めることができる。測定精度を判定する目安として，以下では 90 ピッチのねじ山について数回の測定を行ない，各対応するねじ山の間のピッチ誤差がどの程度再現されているかを検討した。すなわち各測定回数ごとに同一点での測定値がどの程度変わるかをみるため，各測定での単一ピッチ誤差の変化を一つの関数とみなして，それぞれについて相関係数を算出した。これは一次相関となるものであるから，偶然誤差，個人誤差，測長機の標準スケール誤差などの測定誤差が全くなければ全部相関係数は1になるはずであり，この場合の測定値はねじスケールの真の単一ピッチ誤差を示すものとみることができる。しかし実際の測定にはこうした誤差が総て入りまじり，各測定回数ごとに異なった単一ピッチを示す。したがってもし1回目の測定と2回目の測定が非常によく一致し，相関係数が1に近ければ，これは再現性のある測定とみることができる。Table 1 に5回測定を行なったときの相関

Table 1. Co-relation of the measured values.

	1	2	3	4	5
1	1.00000	0.61928	0.73488	0.75284	−0.04243
2	—	1.00000	0.84092	0.78728	−0.09971
3	—	—	1.00000	0.85117	−0.09223
4	—	—	—	1.00000	−0.11413
5	—	—	—	—	1.00000

係数を示した。この表をみると1回目から4回目の測定はどの二つの間の相関係数をとってみても1に近く再現性が認められるが，5回目の測定だけは他の4回の測定のどれと比較しても相関係数は小さな値となり，著しく再現性の低い測定であることがわかる。こうした再現性の低い測定値は何らかの原因で測定に誤りがあったとみることができるから，このような測定値を用いることは測定誤差を大きくする可能性があるものとして棄却する。このような考えのもとに一応7回の測定を行ない，おのおのの間の相関係数の極度に小さいものだけを棄却し，残

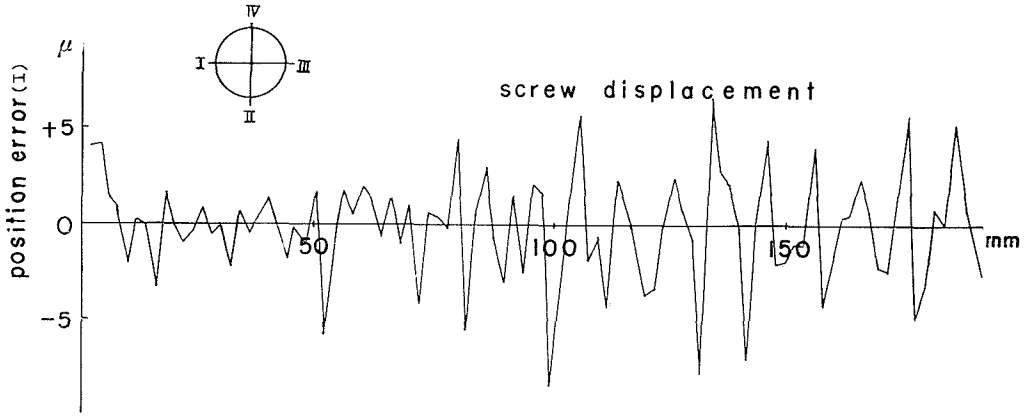

Fig. 7. Accuracy of the threaded screw. (I)

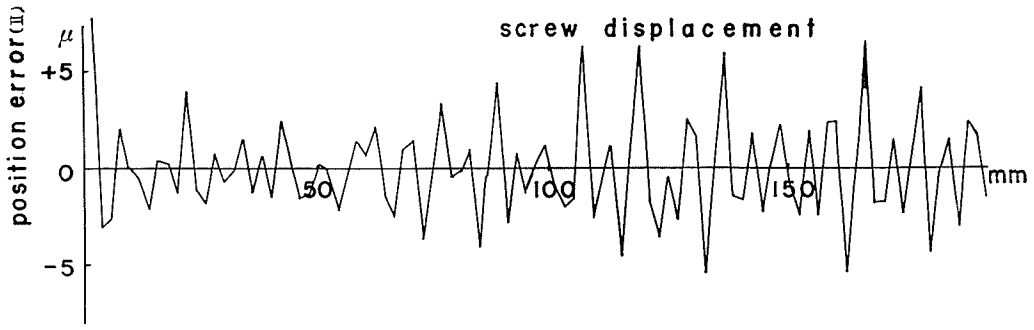

Fig. 8. Accuracy of the threaded screw. (II)

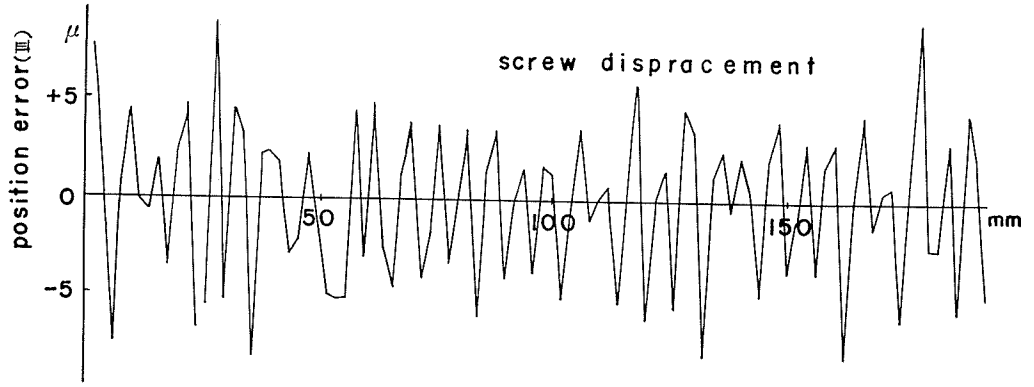

Fig. 9. Accuracy of the threaded screw. (III)

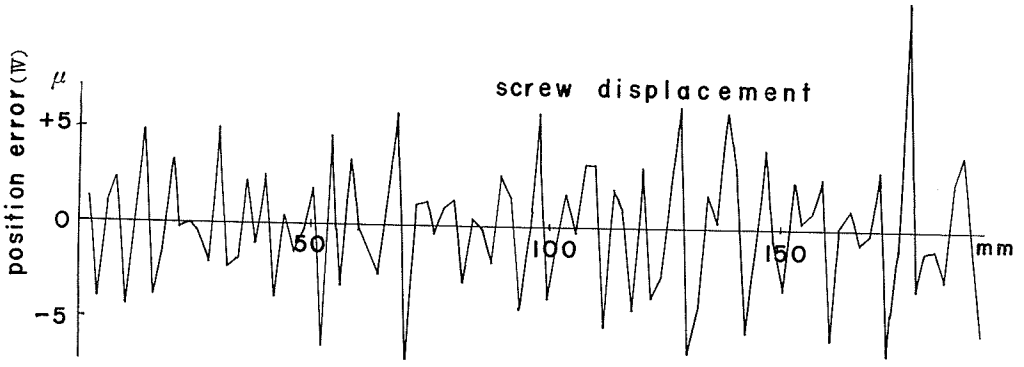

Fig. 10. Accuracy of the threaded screw. (IV)

りの測定値について平均値を求めた。この平均値を真の単一ピッチ誤差とみなし，80% 信頼限界のもとで，各ねじ山についての信頼幅を計算すると $\pm 1.5\mu$ 程度となり，ほぼ測長機標準スケールのもつ誤差範囲に入ってくる。すなわちねじスケールのおのおのの点での単一ピッチを“測定値の平均値 $\pm 1.5\mu$” として誤りを侵している確率が 20% ということになり，ほぼ満足な

測定結果を得ることができた。このようにしてねじ円周上にそって四等分した各断面で求めた各ねじ山の単一ピッチ誤差を Fig. 7, 8, 9, 10 に示した。

なおコイルについては円筒軸方向の一断面についてだけリードの測定を行なった。Fig. 11 にその結果を示す。

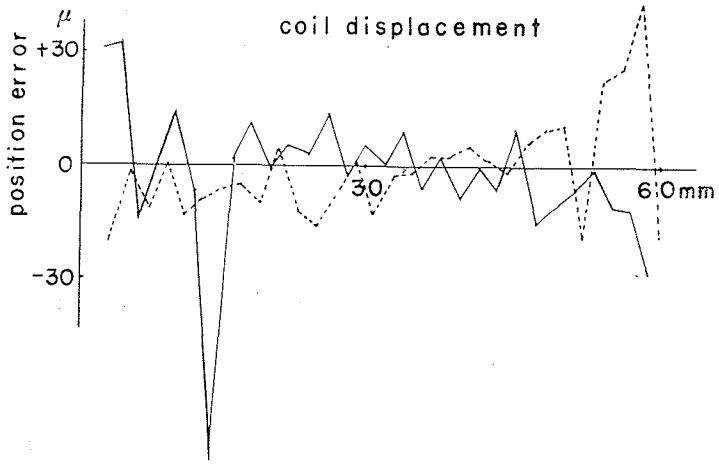

Fig. 11. Accuracy of the coil.

3-3 出力精度の測定

本実験に用いた装置は 2-2 で述べた自己インダクタンス形の検出素子であり，Fig. 12 に示すように発振，検出素子，増幅，検波の各部分から構成されている。インダクタンス測定用の搬送波は 15 kc を用い，増幅回路は 15 kc 同調増幅器である。残留電圧監視のため，同調増幅器における出力電圧を測定した。さらに，ブリッジの平衡点（コアとして用いたねじスケールの電磁的影響が二つのコイルに同等に及ぶ点であり，以後この状態にねじスケールが位置する時を零点と呼ぶ）を正確に知るため，位相検波を行ない，検波後の出力電圧から零点を決定した。出力誤差は零点から隣りの零点までねじスケールを移動した距離と，期待ピッチ (2.000 mm) との差として求めた。出力誤差の測定に用いた装置を Photo. 1 に示す。測定装置は移動する測定台 D 上にねじスケール B と UMM 付属標準スケール S が Abbe の原理を満足するように固定され，別に固定されたコイル A と顕微鏡 E から構成されている。零点から零点までねじスケールの固定されてている測定台を移動し，標準スケール S と顕微鏡 E

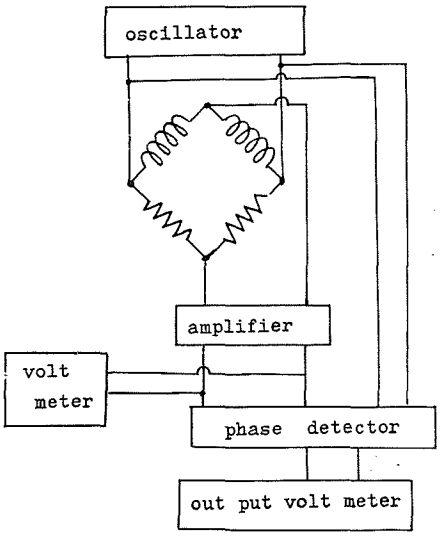

Fig. 12. Block diagram of circuit.

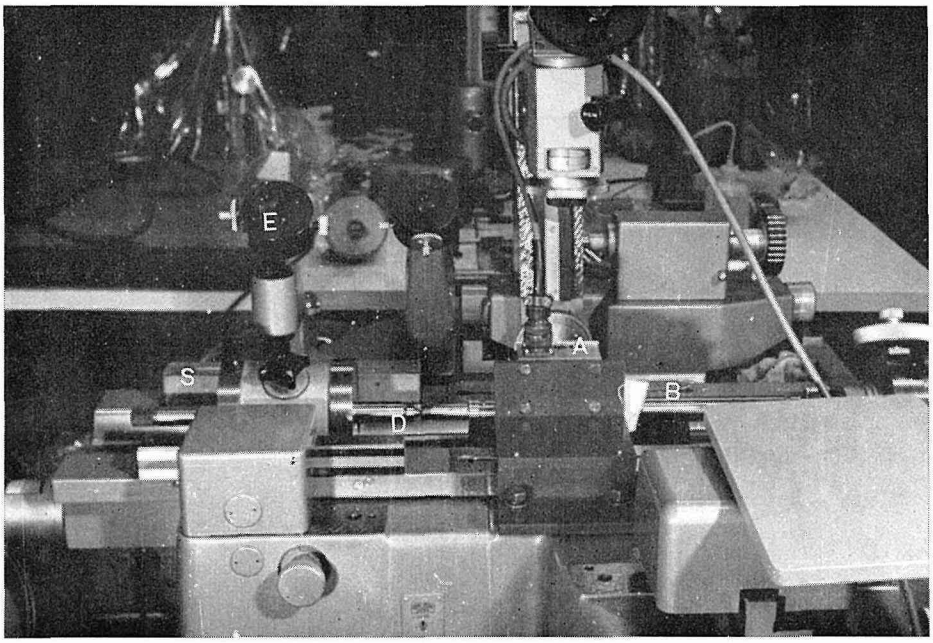

Photo. 1. Measuring apparatus of out put accuracy.

に付属するスパイラルマイクロメータでその間の移動量を読みとる。ねじを測定台と共に移動すると，残留電圧監視用の電圧計は Fig. 5 (a) のように，さらに零点指示用の電圧計は Fig. 5 (b) のように変化する。したがって感度は零点附近で最も高くなる。以上のようにして順次零点間の距離を求め，測定値と期待ピッチとの差を出力誤差として Fig. 13 に示した。

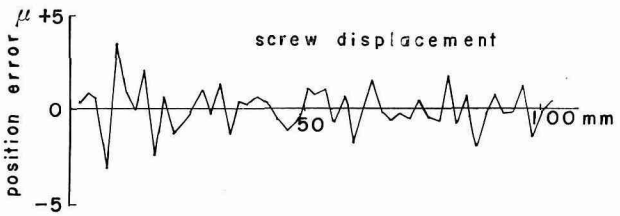

Fig. 13. Accuracy of the self-inductance type transducer.

4. 考　　察

使用した標準ねじスケールの単一ピッチ誤差 (Fig. 7～10) と出力誤差 (Fig. 13) を比較すると，出力誤差がねじスケール誤差よりも小さくなっていることがわかる。さらに副スケールとして用いたコイルのピッチ誤差 (Fig. 11) と比べると，出力精度が大きく改善されていることがわかる。

これらの効果を吟味するために Fig. 14 に示すような A (副), B (主) 二つのスケールを考えた。この二つのスケールは容量変換形位置決め装置の場合，二つの電極すなわち外ねじ (スライダ) と内ねじに対応し，誘導変換形の場合はソレノイドとねじスケールに，さらに自己イン

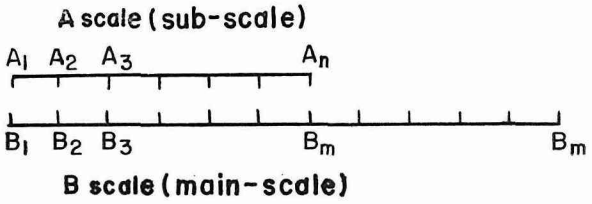

Fig. 14. Model scale

ダクタンス変換形の場合もソレノイドとねじスケールにそれぞれ対応する。ここで主スケールが m ケの単位目盛を持ち，副スケールが n ケの単位目盛を持つ $(m>n)$ とすると測長範囲は $m-n$ になる。これらのスケールの組合せについて，次に示す3つの場合を考えて考察を行なった。

4-1 副スケールに誤差がない場合

今主スケール上を副スケールが移動してゆき，副スケール上の目盛が主スケール上の目盛の対応目盛に最も近ずいた時 (Fig. 15) からさらに副スケールを移動して，次に副スケールの

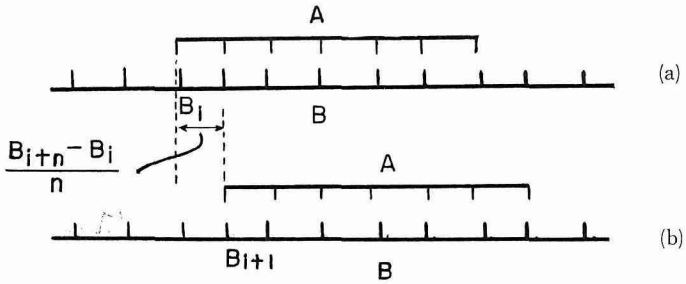

Fig. 15. Pitch of model scale

の目盛が相対する主スケールの目盛に最も近ずくまでの距離を求める。主スケールの i 番目の単位目盛のある位置を B_i と表わすと，最初に副スケールの停止する位置 (Fig. 15(a)) は

$$\frac{B_i+B_{i+1}+\cdots+B_{i+n-1}}{n}$$

で代表させることができ，さらに副スケールを移動して次に同一状態になる点 (Fig. 15(b)) は

$$\frac{B_{i+1}+B_{i+2}+\cdots+B_{i+n}}{n}$$

で表わせる。したがってこの間に副スケールの進んだ距離は $(B_{i+n}-B_i)/n$ となる。主スケールが i 番目に ΔB_i の工作誤差をもっているとすると，副スケールが対応位置 B_i から次の同一対応位置 B_{i+1} に移ったときに表われる誤差は $(\Delta B_{i+n}-\Delta B_i)/n$ となる。すなわち主スケールのねじ山の持つ誤差は ΔB_i がガウス分布している場合副スケールの目盛数 n に比例して緩和されることがわかる。すなわち n が大きい程その緩和のしかたは大きくなるが，実際には分散を等しくして主スケールを無限に長くすることはねじの工作上不可能であり，また n をあまり大

きくすることは測長範囲を小さくすることになって必ずしも有利な条件だけを与えることにはならない。さらに今は副スケールに工作誤差のない場合を論じてきたが実際は副スケールにも工作誤差が伴うのは製作上避けられないことであるから，副スケールをむやみに長くすることは常に有利であるとは限らない。以下この点を考慮しながら，前述のインダクタンス形位置決め装置について出力誤差がどの程度緩和されているかを考察してみた。

Fig. 11 に示した目盛単一誤差をもつ副スケールが，Fig. 7～10 に示した主スケールの上を移動したときの出力誤差を Fig. 13 に示した。このときの副スケールと主スケール，および出力のそれぞれの誤差の大きさを全体的に表わすためには，それぞれの分散を用いて比較するのが適当と考えられる。上の実験から得られた副スケール，主スケールおよび出力の誤差の分散値を求めると，それぞれ 28.6 μ^2, 9.1 μ^2, 2.8 μ^2 であった。今同一の主スケールを用いて副スケールに誤差がない場合の出力誤差分散を上記の方法から求めると 0.13 μ^2 になる。この二つの出力誤差分散を比較することにより，副スケールの誤差を無視して平均化を論じることが誤りであり，出力精度は副スケール，主スケールの相互関係から決定されなければならないことが明らかである。両スケールがともに誤差をもつ場合，上に述べたような簡単な計算からは出力精度を算出することができない。以下順次副スケールに誤差を導入した場合について検討を加える。

4-2 副スケールに定常偏差のある場合

主として誘導変換形，自己インダクタンス変換形のように二条巻コイルを副スケールとして使用する場合，二つのコイルは独立しているため，二条コイルの製作上 Fig. 16 (a) に示すように二つの単一誤差に独立な偏りを伴うことがある。この偏りが出力精度におよぼす影響を考えてみる。Fig. 16 (b) の位置ではコイル L_1 と L_2 との間にインダクタンスの差がなく，出力は零点を示すと考える。この点から副スケールすなわちコイル L_1, L_2 を右方に移動させ Fig. 16 (c) の位置にきた場合を考えると，この間に副スケールの移動量は主スケールのピッチと一致するはずである。したがって出力誤差は主スケールの誤差の大きさのみに左右され，副スケール誤差 (偏り) は無視されることになる。ただしこのときピッチ間での出力は副スケールの移動と共に L_1, L_2 に対する主スケールの相対位置が変化することを考えれば出力信号は Fig. 17 のようになり，零点の判定位置が最大勾配点にならないため判定誤差の大きくなることが考えられる。

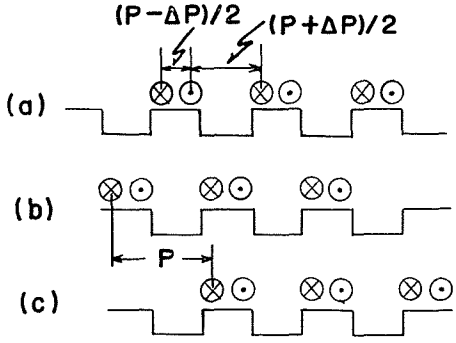

Fig. 16. Out put pitch when the coils have constant deviation.

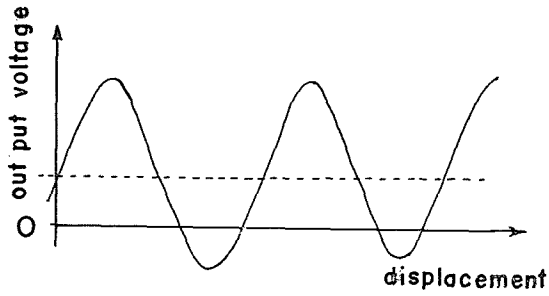

Fig. 17. Out put signal when the coils have constant deviation.

4-3 副スケールにランダムな誤差のある場合

副スケールにガウス分布をする誤差がある場合の副スケールの影響を直感的，解析的に考えることは難しい。こうした場合の副スケール精度が出力精度に及ぼす影響を調べるために著者らは単純なスケール模型を用いた数値的な実験を行なった。実験の原理は二次モーメントが最小になるように最確値を定める統計学的な最小二乗法と同一である。Fig. 14 に示したスケール A (副スケール) とスケール B (主スケール) を適当な位置でかみあわせ，スケール A の各

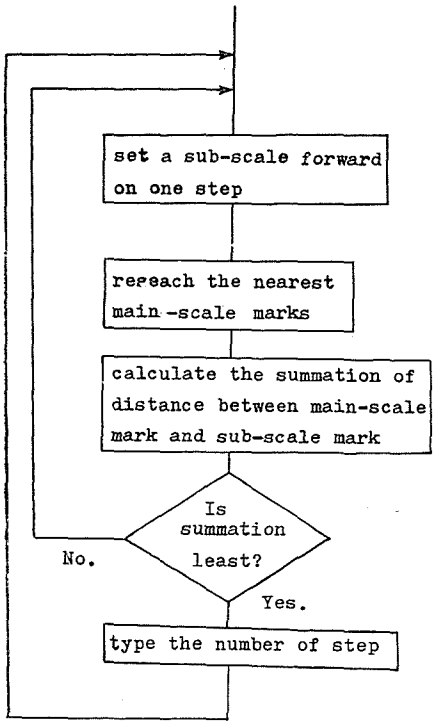

Fig. 18. The flow chart of numerical experiment.

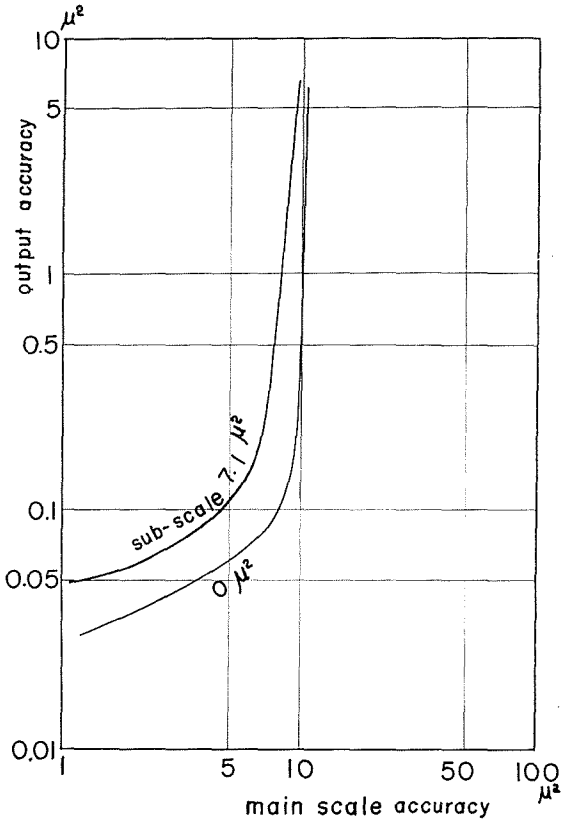

Fig. 19. Relation between main-ccale accuracy and output acuracy.

目盛から，それぞれ相対するスケール B 目盛を見た時の距離の二乗をスケール A の各目盛について加え，これが最小になるスケール A の位置（スケール A の中央位置が絶対座標上でとる位置）を零点とし，この零点をスケール A を移動しながら探索するのである。数値実験にはディジタル形電子計算機 NEAC-2203 G を用い，使用プログラムのフローチャートを Fig. 18 に示した。Fig. 7 に示したピッチ誤差をもつスケール B と Fig. 11 に示したピッチ誤差をもつスケール A を用いて数値実験を行ない，出力誤差分散を求めると 2.61 μ^2 となり，測定実験で求めた出力誤差分散 2.8 μ^2 と良く一致することがわかった。したがって，スケール A，スケール B の誤差がおのおの出力精度に及ぼす影響を以下このプログラムから検討した。出力精度に及ぼすスケール B（主スケール）の精度の影響について，その計算結果を Fig. 19 に示した。出力誤差の分散は主スケール誤差が大きくなるにしたがって大きくなり，主スケールの誤差分散が 8 μ^2 を越えると急激に増加しているのがわかる。副スケールの誤差分散が大きくなると出力誤差も大きくなり，特に主スケール誤差分散（7～10 μ^2）における副スケールの精度への影響を見のがすことはできない。

いっぽう，副スケールの出力精度への影響を示したのが Fig. 20 である。出力誤差は副スケールの誤差の増加で，同じく一様な増加を示すが，主スケールの誤差分散 9.1 μ^2 の場合，出力の分散値 2.8 μ^2 あたりで一定値をとるようになる。すなわち，副スケールの精度がこれ以上低下しても，出力誤差にはほとんど影響を及ぼさないことを示している。出力誤差が一定値を示す範囲は主スケールの誤差が小さくなるにしたがって広くなり，かつ出力誤差も小さくなとことがわかった。例えば 2.8 μ^2 の出力誤差分散を持つ位置決め装置で誤差分散を 0.5 μ^2 に改良しようとするとき，副スケールではその誤差分散を 23 μ^2 から 4.5 μ^2 になるよう工作精度をあげなければならないのに対し，主スケールでは誤差分散を 9.1 μ^2 から 2.5 μ^2 にあげればよいわけである。また二条ねじ用のボビンや巻線の工作よりもねじスケールの工作の方が容易に工作精度を向上させることができる。

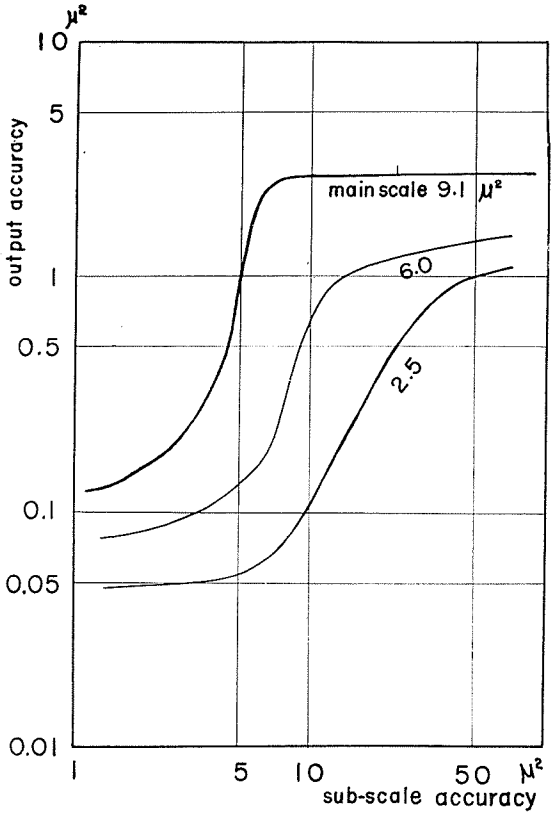

Fig. 20. Relation between sub-scale accuracy and output accuracy.

すなわち平均化による出力精度の向上を計るためには主スケールの工作精度を高めることがまず第一であり，副スケールの工作精度は主スケールの誤差の大きさとのかね合いから比較的低いところを選ぶことができるわけである。

5. 結　　論

広い測定範囲をもつアナログ-ディジタル形位置決め装置の平均化精度について，実験し解析を行なった結果，次のことがわかった。

(1) 主スケールの単ピッチ誤差は，副スケスルの巻き数 n によって平均化され，理想的には $1/n$ に緩和することができる。この場合，出力誤差は副スケールの両端における主スケール単一ピッチ誤差の差 $\Delta B_{i+n}-\Delta B_i$ に支配される。

(2) 主スケール（期待ピッチ 2.000 mm）の誤差分散を $7\,\mu^2$ より小さくすることによって出力精度を向上することができる。

(3) 副スケールの精度を高めても，出力精度の改善にならない場合がある。

6. 総　　括

アナログーディジタル位置検出素子製作上，標準スケールとなるべきものの工作精度と電気的出力精度に関連した問題をあつかってきた。機械的な工作精度には限界があり，また非常に高精度な加工には多大な費用を伴う。ここに述べた平均化の効果はこうした工作誤差としてスケールに残された誤差を宿命的誤差としてみなす必要のないことを示すものである。本実験から位置決め装置への一つの設計基準が与えられるものと思う。さらに変換素子としてみた場合，工作誤差に加えて電磁気的誤差，電子回路的誤差の入り得る要素があり，こうした面からの追求も加えてなされなければならない。

終りに本実験を行なうにあたり，いろいろ御指導いただいた職業訓練大学校中村常郎教授に厚くお礼申し上げます。また実験装置の便宣をはかって下さった K.K. 東京精密，さらに測定器具および恒温室の使用を快く承諾下さいました道立工業試験所の矢崎部長はじめ精密測定室の皆様に謝意を表します。

文　　献

1) Mynall, D. J.: Control Engineering 4-6 pp. 125-126 (1957-6).
2) 下田靖雄・亀井明敏: 計測と制御 2-7 pp. 525-533 (1963-7).
3) Cox, A. and M. F. Royston: The Maufacture of Precision Aspheric Surface, Habell. K. J. and A. Cox, Eds., Engineering optics, Sir Issac Pitman, London pp. 335～ (1958).