HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	温度分布のある平板の乱流熱伝達の研究 ： スポルデイング関数の応用とプロファイル法
Author(s)	石黒, 亮二; 宮本, 喜晟
Citation	北海道大學工學部研究報告, 39, 1-12
Issue Date	1965-12-14
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40777
Type	departmental bulletin paper
File Information	39_1-12.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

温度分布のある平板の乱流熱伝達の研究

—スポルデイング関数の応用とプロファイル法—

石黒亮二
宮本喜晟

A Study of Heat Transfer across a Turbulent Boundary Layer of a Nonisothermal Surface

— An Application of the Spalding Function and the Profile Method —

Ryoji ISHIGURO
Yoshiaki MIYAMOTO

Abstract

Two types of formulas have been proposed up to the present for the local heat transfer coefficients at points on a wall downstream of a sudden discontinuity in wall temperature. The first are the coefficients formulated by the profile method and the second is the Stanton number based on the Spalding function.

The present paper dwells on the merits and demerits of the above two types of formulas when they are used for the heat transfer calculation across a turbulent boundary layer of a nonisothermal surface.

A specified heat flux distribution is taken as the reference for the wall temperature calculations, and the resulting two temperature distributions are used for the heat transfer computations.

Increased accuracies are obtained by the application of the Spalding function, but the procedure of the calculation is much more complicated than the other method.

主要記号

a: 加熱初めの位置

$B_r(p, q)$: 不完全ベータ関数 $\left(\int_0^r z^{p-1}(1-z)^{q-1}dz\right)$

b: 加熱終りの位置

c_p: 等圧比熱

c_f: 摩擦抵抗係数

$g(x, \xi)$: 式 (15) の定義による

$h(x, \xi)$: 局所熱伝達率

k: 熱伝導率

P_r: プラントル数 $(\mu c_p/k)$

q_w: 局所熱流束

R_{ex}: レイノルズ数 $(u_\infty x/\nu)$

S_t: スタントン数 $(h/\rho u_\infty c_p)$

t_w: 平板の壁温度と主流との温度差

t_∞: 主流の温度

u_∞: 主流の速度

x: 平板の流れ方向に測った長さ

x^+: 無次元長さ $\left(\int_\xi^x \sqrt{\tau_w/\rho}/\nu dx\right)$

ν: 動粘性係数

ξ: x と同軸上で不加熱距離を表わす変数

ρ: 密　　度

τ_w: 壁面の剪断力

1. 緒　　言

平板に平行な乱流の熱伝達は，流体の物性値が一定および壁温度が一定の場合について，従来からいくつかの理論的，実験的研究が行なわれている。しかし，工業上では壁温度が流れの方向に沿って変化する場合が多く，任意の壁温度分布が与えられるときの熱伝達が問題となる。

任意の温度分布を有する熱伝達の解析は，境界層のエネルギー式において，流体の物性値が一定とすれば，温度に関して線形となるから，温度についての重ね合せができ，それによって可能となる。

ここで問題となるのは，局所熱伝達率であって，任意壁温度の熱伝達の計算には，平板の途中から等温の加熱が始まる場合の熱伝達率を用いる。しかし，この熱伝達率については，まだ決定的なものがない。実験式は別として，理論的にはその扱いから2つにわけることができる。第1は速度，温度のプロファイルを $1/m$ 乗と仮定して境界層のエネルギ式を積分して求めたものである。第2には，Spalding が一般無次元速度分布の概念によってエネルギ式を変換した結果を用い，Kestin らが等温平板に対して得た数値解，および Smith and Shah が特殊な熱流束をもつ境界条件で得た数値解がある。

本報は，以上2つの異なった方法によって与えられた熱伝達率を用い，それぞれ温度分布を有する平板の近似解に応用し，伝達熱量を算出比較して，その違いを明らかにした。

2. 温 度 分 布

Fig. 1 に示すように流れに平行におかれた平板があって，速度境界層が充分発達した $x=\xi$

の位置から平板の温度が主流温度より t_w だけ異なる場合，プロファイル法によって得られた局所熱伝達率の一般的な形は

$$h(x,\ \xi)=f(x)\ (x^{\delta}-\xi^{\delta})^{-\alpha} \qquad (1)$$

となる[1,2]。ここで $h(x,\ \xi)$ は $x<\xi$ で平板と主流との温度は等しく，$x>\xi$ で平板と主流とが一定の温度差を有するときの局所熱伝達率である。

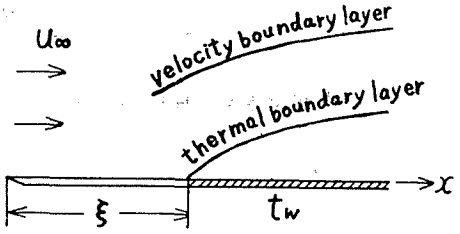

Fig. 1. Flow boundary layer and thermal boundary layer on a flat plate

このように平板先端に非加熱部分を有する平板に対して，従来発表されている $h(x, \xi)$ を表示すれば，Table 1 のようになる。

Table 1. Local heat transfer coefficients[2)]

Author	Flow System	$h\ (x,\ \xi)$	$g\ (x,\ \xi)$
Eckert	Laminar Flow	$\frac{0.33k}{x}P_r^{\frac{1}{3}}R_{ex}^{\frac{1}{2}}\left[1-\left(\frac{\xi}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{-\frac{1}{3}}$	$\frac{P_r^{-\frac{1}{3}}R_{ex}^{-\frac{1}{2}}}{6\left(\frac{1}{3}\right)!\left(\frac{2}{3}\right)!0.33k}\left[1-\left(\frac{\xi}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{-\frac{2}{3}}$
Lighthill	Laminar Flow	$\frac{kP_r^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{1}{3}\right)!}\left(\frac{\rho}{9\mu^2}\right)^{\frac{1}{3}}\sqrt{\tau_w}\left[\int_{\xi}^{x}\sqrt{\tau_w}\,dx\right]^{-\frac{1}{3}}$	
	Turbulent Flowr*	$\frac{0.161k}{x}P_r^{\frac{1}{3}}R_{ex}^{0.6}\left[1-\left(\frac{\xi}{x}\right)^{\frac{9}{10}}\right]^{-\frac{1}{3}}$	$\frac{\left(\frac{1}{5}\right)P_r^{-\frac{1}{3}}R_{ex}^{-0.6}}{\left(\frac{2}{3}\right)!\left(\frac{1}{3}\right)!0.161k}x^{0.6}\left[x^{\frac{9}{10}}-\xi^{\frac{9}{10}}\right]^{-\frac{2}{3}}$
Seban	Turbulent Flow	$\frac{0.0289k}{x}P_r^{\frac{1}{9}}R_{ex}^{0.8}\left[1-\left(\frac{\xi}{x}\right)^{\frac{9}{10}}\right]^{-\frac{1}{9}}$	$\frac{\left(\frac{8}{90}\right)P_r^{-\frac{1}{9}}R_{ex}^{-0.8}}{\left(\frac{8}{9}\right)!\left(\frac{1}{9}\right)!0.0289k}x^{0.8}\left[x^{\frac{8}{10}}-\xi^{\frac{9}{10}}\right]^{-\frac{8}{9}}$
Rubesin	Turbulent Flow	$\frac{0.0288k}{x}P_r^{\frac{1}{3}}R_{ex}^{1.8}\left[1-\left(\frac{\xi}{x}\right)^{\frac{39}{40}}\right]^{-\frac{7}{39}}$	$\frac{\left(\frac{28}{195}\right)P_r^{-\frac{1}{3}}R_{ex}^{-0.8}}{\left(\frac{32}{39}\right)!\left(\frac{7}{39}\right)!0.0288k}x^{0.8}\left[x^{\frac{39}{40}}-\xi^{\frac{39}{40}}\right]^{-\frac{32}{39}}$
Maisel & Sherwood	Turbulent Flow**	$\frac{0.035}{x}R_{ex}^{0.8}\left[1-\left(\frac{\xi}{x}\right)^{0.8}\right]^{-0.11}$	$\frac{\frac{11\times89}{100\times100}\times0.8\xi^{-0.088}R_{ex}^{-0.8}}{\left(\frac{89}{100}\right)!\left(\frac{11}{100}\right)!0.035}x^{0.8}\left[x^{0.8}-\xi^{0.8}\right]^{-0.89}$

Note: * Blasius eq. is used for τ_w of the above eq.
** Experimental eq. for air

今，流れに沿って壁温度が Fig. 2 に示すように階段状に変化しているとする。物性値が一定であれば，境界層のエネルギ式が線形となるから，x における平板と主流の温度差は

$$t_w(x)=\Delta t_{w_1}+\Delta t_{w_2}+\cdots\cdots+\Delta t_{w_n}=\sum_{i=1}^{n}\Delta t_{w_i}$$

で，壁における熱流束は

$$q_w(x) = -k\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_w = -k\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial t_i}{\partial y}\right)_w$$

と表わすことができる。局所熱伝達率との関係

$$-k\left(\frac{\partial t_i}{\partial y}\right)_w = h_i \Delta t_{w_i}$$

を代入すると

$$q_w(x) = \sum_{i=1}^{n} h(x,\ \xi_i)\,\Delta t_{w_i} \qquad (2)$$

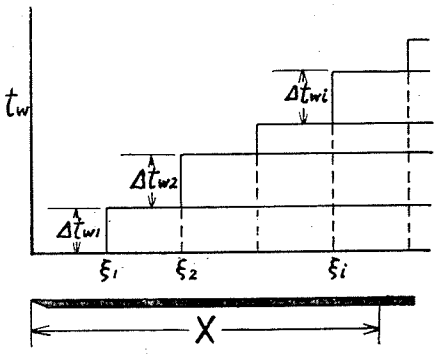

Fig. 2. Stepwise variation of wall temperature

となる。壁温度が連続的に変化した場合の熱流束は，つぎのように表わされる。

$$q_w(x) = \int_0^x h(x,\ \xi)\,dt_w \qquad (3)$$

熱流束が与えられた場合の壁温度を求める方法は Tribus and Klein[2] によって導かれている。式 (1) を式 (3) に代入すると

$$q_w(x) = f(x)\int_0^x (x^\delta - \xi^\delta)^{-\alpha} dt_w(\xi)$$

この式の両辺に $(x^\delta - z^\delta)^{\alpha-1} d(x^\delta)$ を乗じ，$x=0$から $x=z$ まで積分すればつぎのようになる。

$$\int_{x=0}^{x=z} q_w(x)(x^\delta - z^\delta)^{\alpha-1} d(x^\delta) = f(x)\int_{x=0}^{x=z}(x^\delta - z^\delta)^{\alpha-1} d(x^\delta)\int_{\xi=0}^{\xi=x}(x^\delta - \xi^\delta)^{-\alpha} dt_w(\xi)$$

ここで，新らしい変数 $s=(x^\delta-\xi^\delta)/(z^\delta-\xi^\delta)$ を導入して，右辺を変形すれば，上式は

$$t_w(x) = \int_{\xi=0}^{\xi=x} \frac{q_w(\xi)(x^\delta-\xi^\delta)^{\alpha-1} d(\xi^\delta)}{f(x)(-\alpha)!(\alpha-1)!} = \int_{\xi=0}^{\xi=x} q_w(\xi)\, g(x,\ \xi)\, d\xi \qquad (4)$$

となる。ここで

$$g(x,\ \xi) = \frac{(x^\delta-\xi^\delta)\,\delta\cdot\xi^{\delta-1}}{f(\xi)(-\alpha)!(\alpha-1)!} \qquad (5)$$

Table. 1 中の $g(x,\ \xi)$ はこの式を示す。

Spalding[3] は，乱流非圧縮性流体の境界層に対するエネルギ式

$$u\frac{\partial t}{\partial x} + v\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\nu}{P_r}\frac{\partial t}{\partial y} + \varepsilon_h \frac{\partial t}{\partial y}\right] \qquad (6)$$

ただし，　ε_h：　うず温度伝導率

に，von Mises の変換をほどこし，つぎのように無次元化している。

$$\frac{\partial t}{\partial x^+} = \frac{1}{\varepsilon^+ u^+}\frac{\partial}{\partial u^+}\left[\frac{\alpha^+}{\varepsilon^+}\frac{\partial t}{\partial u^+}\right] \qquad (7)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned} x^+ &= \int_\xi^x \sqrt{\tau_w/\rho}/\nu \, dx \\ y^+ &= \sqrt{\tau_w/\rho}\cdot y/\nu \\ u^+ &= u/\sqrt{\tau_w/\rho} \\ \varepsilon^+ &= 1+\varepsilon_h/\nu = dy^+/du^+ \\ \alpha^+ &= 1/P_r + \varepsilon_h/\nu \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Spalding はさらに，一般無次元速度の概念を1つの式で表現し，式 (7) に代入すれば数値的に求められることを示した。

Smith and Shah[4] は

$$d\eta = \frac{\varepsilon^+}{\alpha^+}\, du^+ \tag{9}$$

なる新しい変数 η を導入し，式 (7) を

$$\frac{\partial t}{\partial x^+} = \frac{1}{u^+\alpha^+}\frac{\partial^2 t}{\partial \eta^2} \tag{10}$$

として書きかえ，それに

$$\left.\begin{aligned} &\eta = \infty \text{ で } \quad t = 0 \\ &x^+ \leqq 0 \text{ で } \quad t = 0 \\ &(\partial t/\partial \eta)_{\eta=0} = \text{const.} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

なる境界条件を用いて，$-(\partial t/\partial \eta)_{\eta=0}/t_w$，すなわち，熱伝達率 $S_t/\sqrt{c_f/2}$ を数値的に求めた。式 (8), (9) の条件と

$$q_w = -k\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_{y=0} \tag{12}$$

なることを用うれば

$$t_w(x) = \frac{1}{[S_t/\sqrt{c_f/2}]_{a,x}}\cdot\left[\frac{q_w}{\rho u_\infty c_p\sqrt{c_f/2}}\right]_a \tag{13}$$

で壁温度が求められることになる。この式において，右辺第1項の分母は $x=a$ より $x=x$ までに相当した x^+ に対する $S_t/\sqrt{c_f/2}$ の値であり，Smith and Shah の解をそのまま用うることができるが，この解が式 (11) の境界条件の下でのみ式 (13) は使用可能である。この条件は $c_f/2$ が場所の関数であるので，物性値を一定とすれば，q_w も場所の関数になり，乱流境界層に対しては等熱流束と多少異なった特殊な熱流束分布を与えることになる。

もし，任意な分布の熱流束が与えられると重ね合せによって壁温度はつぎのようになる。

$$t_w(x) = \int_0^x \frac{1}{[S_t/\sqrt{c_f/2}]_{a,x}}\, d\left[\frac{q_w}{\rho u_\infty c_p\sqrt{c_f/2}}\right]_a \tag{14}$$

式 (4), (14) は共に熱流束から壁温度を求める式であるから，同じ熱流束分布に対して，それぞれ壁温度を計算し比較してみる。例えば，熱流束分布を Fig. 3 に示すように仮定する。すなわち，80°F, 100 ft/sec の空気流におかれた平板が，前縁から 1 ft の所で，1000 Btu/hr ft², その後 $1^1/_{12}$ ft まで $x^{-1/10}$ に比例した熱流束を与えるとする。ここで，熱流束を $x^{-1/10}$ に比例させるようにしたのは，式 (4), (14) の積分が解析的に可能になるためである。

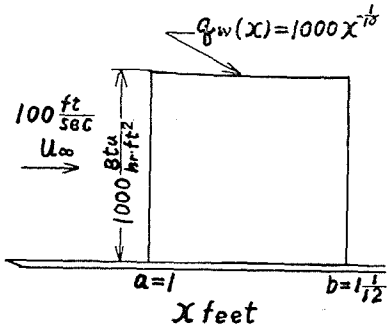

Fig. 3. Example for prescribed heat input

プロファイル法として，Table 1 の Seban の式と式 (14) から

$$t_w(x)=\int_0^x \frac{(8/90)\,P_r^{-1/9}R_{ex}^{-0.8}}{(8/9)!(1/9)!0.0289\,k}\,x^{0.8}(x^{9/10}-\xi^{9/10})^{-8/9}q_w(\xi)\,d\xi$$

となり，$q_w(x)=1000\,x^{-1/10}(a\leqq x\leqq b)$ として上式に代入すれば温度分布はつぎのようになる。

$$t_w(x)=\frac{(8/90)\,P_r^{-1/9}(\nu/u_\infty)^{0.8}}{(8/9)!(1/9)!0.0289\,k}\,1000\int_0^x(x^{9/10}-\xi^{9/10})^{-8/9}\xi^{-1/10}d\xi$$

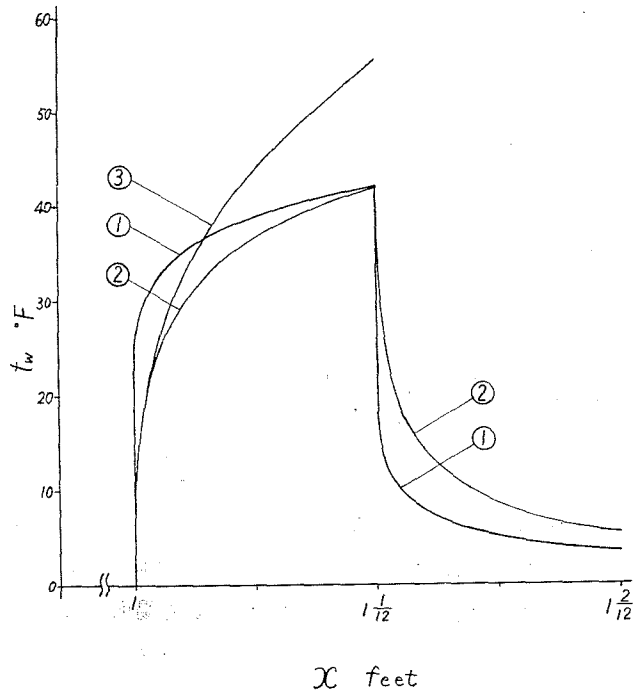

Fig. 4. Example for calculated temperature

したがって，

$a<x\leqq b$

$$t_w(x)=\frac{(8/90)P_r^{-1/9}(\nu/u_\infty)^{0.8}}{(8/9)!(1/9)!\,0.0289\,k}\,1000\,[10\,(x^{9/10}-a^{9/10})^{1/9}] \tag{15-a}$$

$x<b$

$$t_w(x)=\frac{(8/90)P_r^{-1/9}(\nu/u_\infty)^{0.8}}{(8/9)!(1/9)!\,0.0289\,k}\,1000\,[10\,(x^{9/10}-a^{9/10})^{1/9}-10\,(x^{9/10}b^{-9/10})^{1/9}] \tag{15-b}$$

式 (15) にそれぞれの値を代入して計算した結果を Fig. 4, ① に示す。

Smith and Shah の方法では，摩擦抵抗係数 c_f に Blasius の実験式

$$\frac{c_f}{2}=0.0296\left(\frac{u_\infty x}{\nu}\right)^{-0.2}$$

を用い，$q_w(x)=1000\,x^{-1/10}$ の熱流束分布に対しては

$$\frac{q_w(x)}{\rho u_\infty c_p\sqrt{c_f/2}}=\frac{1000}{\rho u_\infty c_p\sqrt{0.0296(\nu/u_\infty)^{0.1}}}=\text{const.}$$

となり，式 (13) から

$$t_w(x)=\frac{1}{[S_t/\sqrt{c_f/2}]_{a,x}}\left[\frac{1000}{\rho u_\infty c_p\sqrt{0.0296(\nu/u_\infty)^{0.1}}}\right] \tag{16}$$

として，Smith and Shah の求めた $[S_t/\sqrt{c_f/2}]$ の値を用い，壁温度 $t_w(x)$ が求められる。その計算結果を Fig. 4, ② に示す。

Table 1 の Lighthill の層流の式は，主流が乱流でも，層流底層内では成立ち，それが厳密解を与えるが，その式と式 (4) から，つぎの式が導かれる

$$t_w(x)=\int_0^x\frac{(1/5)P_r^{-1/3}R_{ex}^{-0.6}}{(2/3)!(1/3)!0.161\,k}\,x^{0.6}[x^{9/10}-\xi^{9/10}]^{-2/3}\,1000\,\xi^{-1/10}d\xi$$

$a<x$ で

$$t_w(x)=\frac{(1/5)P_r^{-1/3}(\nu/u_\infty)^{0.6}}{(2/3)!(1/3)!0.161\,k}\,1000\left[\frac{10}{3}(x^{9/10}-a^{9/10})^{1/3}\right] \tag{17}$$

Fig. 4, ③ は式 (17) による計算結果を示す。

加熱初めでは，温度境界層が充分発達していないために，層流底層内だけを考えればよく式 (17) がその状態をよく示している。x が増加するとともに温度境界層が発達して速度境界層の層流底層より厚くなるため，式 (17) が適用できず，プロファイル法によって得られる式が適することになる。したがって，Fig. 4 に示すように，Smith and Shah によって与えられる温度分布の曲線 ② が，加熱初めから後流までの妥当な仮定を含むため，加熱初めでは Lighthill による式 (17) に，x の増加とともにプロファイル法による温度分布に近づいている。結局，プロファイル法では加熱初め近傍をよく表わし得ないことがわかる。

3. 近似局所熱流束

前節で，ある局所熱流束 ($q_w(x)=1000\,x^{-1/10}$) を与えて壁温度分布を求めたが，その温度分布の曲線を分割して近似し，局所熱流束を求め，先に与えた熱流束と比較してみる。

壁温度分布が任意の曲線で与えられる一般の場合は Fig. 5 のように直線群に分割して近似させ，式 (3) から

$$q_w(x)=\left(\frac{dt_w}{dx}\right)_{0-1}\int_{x_0}^{x_1}h(x,\,\xi)\,d\xi+\left(\frac{dt_w}{dx}\right)_{1-2}\int_{x_1}^{x_2}h(x,\,\xi)\,d\xi+\cdots\cdots+\left(\frac{dt_w}{dx}\right)_{(n-1)-n}\int_{x_{n-1}}^{x_n}h(x,\,\xi)\,d\xi \tag{18}$$

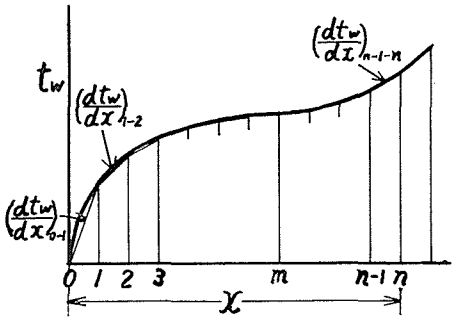

Fig. 5. Approximation of continuously varying wall temperature by straight-line segments

として計算ができる。また，スポルデイング関数 S_p を応用して，同様に温度分布を分割した近似法[5]は，S_p の定義から

$$h(x,\,\xi)=\frac{k}{\nu}\,u_\infty S_p(x^+,\,P_r)\sqrt{\frac{c_f}{2}} \tag{19}$$

であり，式 (3) から

$$q_w(x)=\frac{k}{\nu}\,u_\infty\sqrt{\frac{c_f}{2}}\left[\left(\frac{dt_w}{d\xi}\,\frac{d\xi}{dx^+}\right)_{0-1}\int_{x_0^+}^{x_1^+}S_p dx^+ +\left(\frac{dt_w}{d\xi}\,\frac{d\xi}{dx^+}\right)_{1-2}\int_{x_1^+}^{x_2^+}S_p dx^+ +\cdots\cdots+\left(\frac{dt_w}{d\xi}\,\frac{d\xi}{dx^+}\right)_{(n-1)-n}\int_{x_{n-1}^+}^{x_n^+}S_p dx^+\right] \tag{20}$$

として近似させることができる。式 (18) では温度分布の曲線を直線群に分割したが式 (20) では

$$\frac{dt_w}{d\xi}\,\frac{d\xi}{dx^+}=\text{const.} \tag{21}$$

としている。これは，x^+ の定義から乱流に対して

$$x^+=\int_\xi^x\frac{\sqrt{\tau_w/\rho}}{\nu}\,dx=\sqrt{0.0296}\left(\frac{u_\infty}{\nu}\right)^{0.9}\frac{(x^{0.9}-\xi^{0.9})}{0.9}$$

であるから

$$\frac{d\xi}{dx^+}=\frac{-\xi^{0.1}}{\sqrt{0.0296}\,(u_\infty/\nu)^{0.9}}$$

となり，式 (21) に代入して積分すれば

$$t_w(\xi)=C_1\xi^{0.9}+C_2 \tag{22}$$

で，温度分布の曲線を $x^{0.9}$ の曲線群に近似したことになる。

Fig. 6 は，前節で Seban の熱伝達率を基に求めた壁温度 (Fig. 4, ①) を用い，その温度曲線を 1/16″ に分割して熱流束の近似解法を行なった結果である

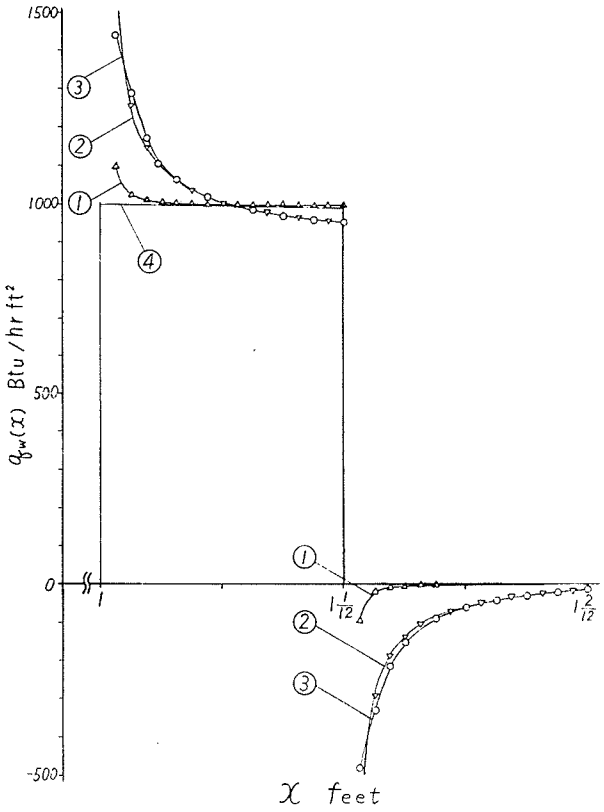

Fig. 6. Example for predicted heat flux using approximate method

曲線 ① は，式 (18) に Seban の熱伝達率を用い

$$q_w(x) = 0.0289\frac{k}{x}P_r^{1/9}R_{ex}^{0.8}\left[\left(\frac{dt_w}{dx}\right)_{0-1}\int_{x_0}^{x_1}x^{1/10}[x^{9/10}-\xi^{9/10}]^{-1/9}d\xi + \left(\frac{dt_w}{dx}\right)_{1-2}\int x^{1/10}[x^{9/10}-\xi^{9/10}]^{-1/9}d\xi + \cdots\cdots + \left(\frac{dt_w}{dx}\right)_{(n-1)-n}\int_{x_{n-1}}^{x_n}x^{1/10}[x^{9/10}-\xi^{9/10}]^{-1/9}d\xi\right] \tag{23}$$

なる計算を行なった結果である。ここで，式 (23) の積分については，直接積分ができないが，新しい変数 $z=1-(\xi/x)^{9/10}$ を導入すれば，不完全ベータ関数* となり，それを用いた。

---

* 不完全ベータ関数の定義は，$B_r(p,q)=\int_0^r z^{p-1}(1-z)^{q-1}dz$, $(0\leqq r\leqq 1)$ で，$r=1$ の場合は，いわゆるベータ関数である。この不完全ベータ関数は超幾何関数と $B_r(p,q)=\frac{r^p}{p}F(p,1-q,p+1;r)$ なる関係[6] がある。

曲線 ② は，式 (20) から

$$q_w(x)=\sqrt{0.0296}\,\frac{k}{x}\,R_{ex}^{0.9}\left[\left(\frac{dt^w}{d\xi}\,\frac{d\xi}{dx^+}\right)_{0-1}\int_{x_0^+}^{x_1^+}S_p dx^+ + \left(\frac{dt_w}{d\xi}\,\frac{d\xi}{dx^+}\right)_{1-2}\int_{x_1^+}^{x_2^+}S_p dx^+ + \cdots\cdots + \left(\frac{dt_w}{d\xi}\,\frac{d\xi}{dx^+}\right)_{(n-1)-n}\int_{x_{n-1}^+}^{x_n^+}S_p dx^+\right] \tag{24}$$

で計算を行なった結果である。上式の積分に対し $\int_0^{x^+}S_p dx^+$ の値を x^+ の広い範囲に求めておく必要があり，Kestin[7,8] らによって求められた $S_p(x^+, P_r)$ にもとづいてなされた積分の値が，筆者の１人によって求められている[9]。その値を式 (24) の計算に用いた。

曲線 ④ は，先に温度分布を求めるために与えた熱流束 ($q_w(x)=1000\,x^{-1/10}$) であって，それと ①，② を比較すると，加熱初めのつぎの分割点 $12^1/_{16}''$ と加熱終りのつぎの分割点 $13^1/_{16}''$ でその隔たりが最大である。これは，与えられた壁温度分布曲線を dt_w/dx，$dt_w/d\xi\cdot d\xi/dx^+$ が一定とすることによって生ずる誤差であり，一定とみなせないほど大きな変化のある所に表われる。

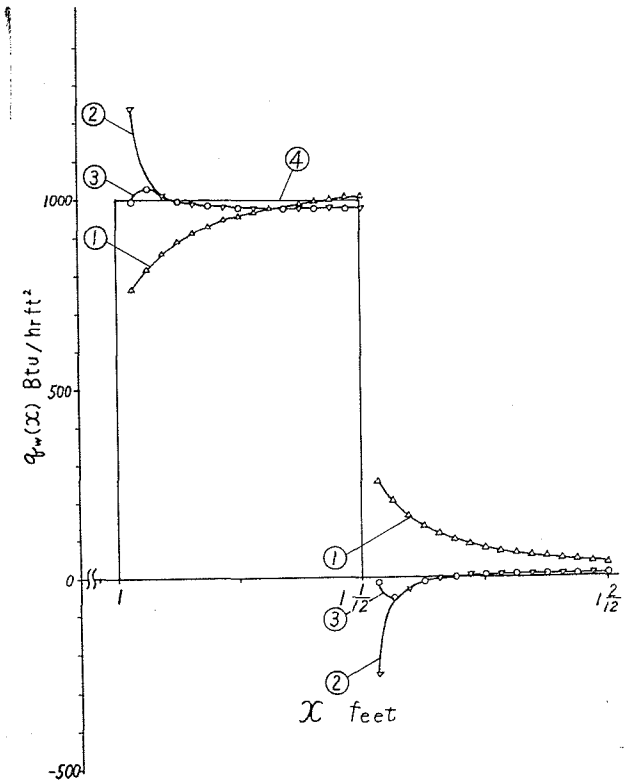

Fig. 7. Example for predicted heat flux using approximate method

Fig. 7 は，前節で Smith and Shah をもとにして求めた壁温度 (Fig. 4, ②) を用い，Fig. 6 と同様，x を 1/16″ に分割して，近似熱流束を求めたものである。曲線 ① は式 (23) によって，曲線 ② は式 (24) から計算した結果である。曲線 ④ は先に温度分布を求めるために与えた熱流束であり，それと比べて，温度変化の急な所，すなわち，加熱初め近傍と加熱終り近傍で大きな誤差が生じた。

Fig. 6 は，Seban の式によって求められた温度分布を用いて計算しているから，Seban の式を用いた式 (23) から求めた近似熱流束が，スポルデイング関数を用いた式 (24) からの値より誤差の程度が小さい。

Fig. 7 に対しては，逆に Smith and Shah の解で温度分布を求めているので，式 (24) の方が与えた熱流束に近い結果を生ずる。前節で明らかになったように，温度分布は Smith and Shah の解が，プロファイル法より広い範囲にわたって正しい値を示すのであるから，精度の点では，式 (24) の方法が式 (23) の方法よりもすぐれていることがわかる。

5. 誤差の検討

熱流束を近似法で求める場合，壁温度分布曲線を dt_w/dx または $dt_w/d\xi \cdot d\xi/dx^+$ が一定として近似させるために誤差が生じ，Fig. 6, 7 でそれを示した。

プロファイル法で，dt_w/dx が一定とすることによって生ずる誤差について検討すれば，式 (4) と式 (23) から，最初の分割点 $x=a+\Delta x$ における熱流束 $q_w(a+\Delta x)$ は

$$q_w(a+\Delta x) = \frac{(8/81)(10/9)}{(8/9)!(1/9)!}\, q_{w_0}\, \frac{x}{\Delta x}\, B_r(1/9,\ 10/9)\cdot B_r(8/9,\ 10/9)$$

となる。ここで，$r=1-[a/(a+\Delta x)]^{9/10}$ である。$B_r(1/9,\ 10/9)\cdot B_r(8/9,\ 10/9)$ を展開し，$r<1$ であるから，r^3 以上の高べきの項を省略すれば

$$\begin{aligned} q_w(a+\Delta x) &\fallingdotseq \frac{(8/81)(10/9)}{(8/9)!(1/9)!}\left(\frac{81}{8}-1\right) q_{w_0} \\ &= 1.10364\, q_{w_0} \end{aligned} \tag{25}$$

となり，右辺は Δx を含まないから，分割数に関係なく初めに与えられた熱流束の約 1.1 倍ということがわかる。このことは，Fig. 6, ① の最初の分割点の値が先に与えた熱流束の約 1.1 倍になっていることに表われている。

スポルデイング関数を用うる方法では，理論的に，この種の誤差を補正することが可能となる。補正式の誘導については，別に発表することを予定しているので省略するが，結局

$$q_w(x)_{\text{corrected}} = \frac{q_w(x)+0.2406\, q_w(x-\Delta x)}{1+0.2406(1-\Delta x/x)^{-0.1}} \tag{26}$$

で与えられる[9]。この方法で求めた補正熱流束を，Fig. 6, ③ および Fig. 7, ③ に示す。Fig.

7, ③ と先に与えられた熱流束 ④ とを比較すれば，その最大誤差は分割数によって変るが，いずれにしても実用上充分な精度が得られている。

6. 結　　言

特定の局所熱流束をもつ平板の熱伝達について，スポルデイング関数を用いる方法とプロファイル法との2つの方式による計算を行ない，その温度分布，近似熱流束を求め，その違いを検討した。加熱初めでは，壁近傍の層流底層，遷移層を考慮する必要があり，スポルデイグ関数はその境界層の全域にわたって考慮がなされているために精度が高い。それに比べるとプロファイル法による局所熱伝達率は乱流域だけしか考えていないため，加熱初め近傍をよく表わしていない。しかし，スポルデイング関数は数値解でのみ与えられているために，使用上はプロファイル法より困難である。したがって，加熱の始まる点より充分離れた所の熱伝達を問題にする場合は，プロファイル法が使い易い。

本研究には，斎藤武教授の御指導，御助言をいただいた。ここに付記して謝意を表する。

参 考 文 献

1) Reynolds, W. C., Kays, W. M., and Kline, S. J.: NASA Memo 12-2-58 W (1958).
2) Tribus, M., and Klein, G.: Heat Transfer Symposium, Univ. of Michigan, 211 (1953).
3) Spalding, D. B.: Int. Develop. Heat Transfer Part II, ASME, 439 (1961).
4) Smith, A, G., and Shah, V. L.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **5**, 1179 (1962).
5) 石黒亮二：機械学会講演前刷集, No. 120, 21 (昭 39).
6) Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., and Tricomi, F. G.: Higher Transcendental Functions, Vol. 1., 87 (1953), McGraw-Hill.
7) Kestin, J., and Persen, L. N.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **5**, 143 (1962).
8) Gardner, G. O., and Kestin, J.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **6**, 289 (1963).
9) 石黒亮二：第2回日本伝熱シンポジウム前刷集, 41 (昭 40).