HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	操作機が飽和特性をもつ場合の最短時間制御
Author(s)	河内, 政隆; 小山, 昭一; 田川, 遼三郎 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 40, 67-76
Issue Date	1966-03-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40786
Type	departmental bulletin paper
File Information	40_67-76.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

操作機が飽和特性をもつ場合の最短時間制御

河内政隆* 小山昭一*
田川遼三郎* 三浦良一*

Time Optimal Problem with the Actuator Saturated in its Magnitude

Masataka KAWAUCHI, Shoichi KOYAMA, Ryozaburo TAGAWA,
and Ryoichi MIURA

Abstract

Optimal control signals are often of the Bang-Bang type in such cases where the admissible control variables are limited in their magnitudes. Practical actuators used to an optimal control are subject to some other restrictions. In such a case, the problem must be treated as a problem having a restriction in the phase space, and the analysis becomes considerably difficult.

A method to decide the optimal switching condition for a third-order system having a restriction was investigated. And success in synthesizing the optimal switching condition was obtained as follows; as a first step, the difference between the characteristics of the idealized second-order system and the practical third-order system was clarified. Then the characteristics of the considering actuator was separated from the system. Thereafter the system was analized as a second-order system, and as a final step the switching condition for the second-order system was modified in accordance with the characteristics of the actuator.

1. 序　　言

最近，多くの関心を集めている最短時間制御に関する問題の最適制御信号は，Pontryaginの最大原理を適用することにより時間領域に於ける補助関数として表現される場合と，時間を消去した形で状態空間内に記述される関数で表わされる場合とがある。著者等の検討によれば最大原理に従って補助関数から解を求めるとすれば，その初期値の決定に伴う2点境界値問題のほかに，状態変数の飽和に伴う特異な条件を解決する必要があって，現段階では厳密な解が得られるに至っていない。一方，状態空間に表現される軌道群に注目して最適信号の決定の問題を取扱う方法は，状態変数の比較的少ない時には明解な解を与えるものである。

著者等は，本論文に於いて3次元の制御対象に対する最短時間問題を取扱い，これに対して位相空間による方法の適用を容易にするために，問題を2次元の制御問題とみなし，その最

* 精密工学科

適切換線を修正することによって，状態変数に飽和のある3次元問題を解くことに成功した。

解析は，先ず船舶の操舵，飛行体のロール・コントロールのような純積分系を対象とし，一定飽和値内でその出力が時間に比例するような特性の操作機を考える。このような系に，状態変数に拘束条件がある場合の最大原理を適用することによって，最適解は Bang-Bang 制御であることが判かる。そこで操作機に理想的 Bang-Bang 制御動作の操作機を仮定し，この仮定によって簡単化された2次元慣性系の最適切換線を，実際の非線形操作機特性で修正して最適切換線を求めた。これによって，同一の系に対して Stout 等によって導かれた切換線[1] とは異った正しい最適切換線を求めることが出来た。

なお，このような問題は，一般に Bang-Bang 制御系になることは，直観的にも容易に推察されるが，後に述べるように Stout 等のおかしたような誤りを生ずることがある。そこで著者等は最大原理によってこの点をより明確にし，且つ，この方法によって厳密解を求めることの困難性を上述の解法によって回避して，実用的な厳密解を得ることに成功したのである。

2. 最大原理による考察

制御は，位相点を任意の初期位相点から，最短時間で原点に到達させることを目的とし，制御対象は考察を簡単にするために純慣性系を考える。しかし，このような問題の設定は，序言にも述べたように船の操舵などについては十分に実際的である。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & x_3 = u/u_s \\ \dot{x}_2 = x_3 & |x_3| \leq 1 \\ \dot{x}_3 = v & |v| \leq 1 \end{cases} \tag{1}$$

ここで，x_3 は基準化された操作機出力，u は実際の操作機出力，u_s は操作機出力の飽和値，v は制御信号を表わす。

問題とする操作機は，Fig. 2 に示すようにその出力 x_3 が入力 (v) に比例する速度で動作

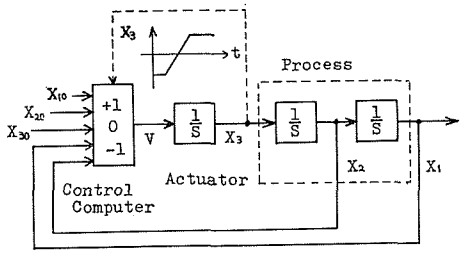

Fig. 1. Control System

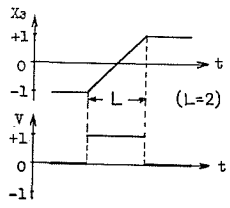

Fig. 2. Relation between X_3 and V

し，且つ，大きさに飽和をもつようなものを解析の対象とする。これも，また実際の操舵機などとして，十分正確な仮定と考えてよい。制御系は，Fig. 1 のように構成され，制御計算機は x_1, x_2 の情報から最適な制御信号 v を決定する。v は基準化された形で最大値±1，及び0を取り得る。操作機出力 x_3 を計算機に帰還する破線のループは，操作機特性を Fig. 2 のように

するためのもので，リミット・スイッチのような作用を行なわせる。

ここで，最大原理によってこの問題を考察してみる。

Pontryagin の最大原理[2] によれば，最適制御は

$$\frac{dx}{dt} = f(x,\ v) \tag{2-a}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial \mathscr{H}(\psi, x, v)}{\partial x} + \lambda(t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g(x)}{\partial x},\ f(x, v)\right) \tag{2-b}$$

$$\mathscr{H}(\psi(t),\ x(t),\ v(t)) = m(\psi(t),\ x(t)) = 0 \tag{2-c}$$

x: 状態ベクトル，v: 制御ベクトル

ψ: 補助ベクトル，$\lambda(t)$: スカラー関数

$g(x)$: 拘束面のベクトル表示

で表わされる 3 個の方程式から決定される。

(1) 式が，x_3 に関する拘束条件に影響されない場合には，拘束に関する項，即ち，(2-b) 式の右辺第 2 項を 0 とした (2) 式を満足するような，(1) 式の系に対する $\varphi(t)$ を求めることにより，最適制御信号として次式を得る。

$$v = \operatorname{sign}\psi_3 = \operatorname{sign}\left(\frac{1}{2}C_1 t^2 + C_2 t + C_3\right) \tag{3}$$

即ち，$v = \pm 1$ という Bang-Bang 制御が最適解であることが厳密に証明される。

(1) 式の系のような，拘束条件の影響をうける場合，即ち，拘束面上に軌道の一部がある時には，最大原理により拘束面にはさまれた無拘束空間 $(-1 < x_3 < 1)$ にある部分と，拘束面 $(x_3 = \pm 1)$ の上にある部分とをそれぞれ分離して考えることが出来る。

従って，前者の場合には原則的に (3) 式で論ぜられ，制御信号 v は ± 1 の Bang-Bang 形が最適解である。

後者の場合には，軌道が拘束面上にあるための条件，即ち拘束面を $g(x) = x_3^2 - 1$ とするとき，

$$g(x(t)) = 0 \tag{4}$$

$$P(x, v) = \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x},\ f(x, v)\right) = 2x_3 v = 0 \tag{5}$$

から，明らかに $v = 0$ を得ることが出来る。ただ実際には，制御用操作機にストッパがついていれば，制御信号をことさらに $v = 0$ に切換える必要はない。

拘束条件の影響をうける場合，省略のない (2) 式と，更に $\psi_0(t)$, $\psi(t_0)$ 及び $\lambda(t)$ に関する若干の条件を満足するような $\psi(t)$, $\lambda(t)$ を求めることによって解が求まるはずである。この問題に対する著者等の考察では，制御信号の値は上に述べたように最大原理から明確に決定され

るが，しかし軌道が拘束面上から離れる時点が決定されない*。しかし，次節で述べる著者等の方法はこのような問題の場合の最適解を求めるために極めて有効な方法であると思われる。

3. 位相空間法を用いた著者等の方法

この種の問題を解くのに，他の方法として位相空間法があるが，著者等は，これを簡単に適用すれば誤った解が得られることを知って，正しい解を得る修正法を見出した。

本節ではこの方法について詳細な説明を試みる。

前節で述べたように，最適制御信号 v が Bang-Bang であることは，最大原理によって証明された。しかし，操作機は Fig. 2 のような特性を持っているので，操作機出力 x_3 は Bang-Bang 形にはならない。そこで著者等は，先ず Fig. 2 に示す操作機の過渡時間 L を無視した場合の軌道を考え，これをどのように修正すべきか検討することにした。

$L=0$ の場合の (1) 式の系は，(6) 式のように 2 次の系に書き直される。周知のごとく，このような系の最適解は Bang-Bang 制御となり，原点に収斂する軌道は Fig. 3 のように放物線

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ x_3 = v \\ |v| \leq 1 \end{cases} \tag{6}$$

となる。原点で位相点が静止するためには，x_3 を 0 にしなければならないから，3 位置 (+1, 0, −1) のスイッチを使用することによって最適制御を実現出来る。

しかし，本問題のように操作機が Bang-Bang 動作を示さない時には様子が変わってくる。例えば，最終段の制御で原点に到達し，且つ，原点で位相点が静止するためには，Fig. 3 (c) 又は，Fig. 4 から明らかなように，x_3 の値は AO 或は A′O の直線部を通って，制御完了時点で 0 にならなければならない。これは操作機の積分特性 ($L \neq 0$) のためであることは云うまでもない。

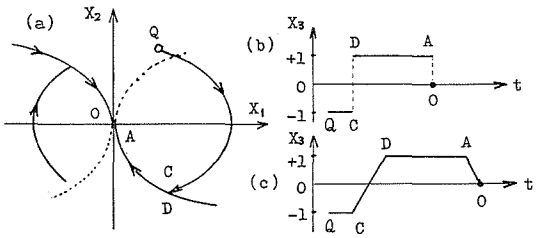

Fig. 3.
(a) Trajectories of eq. (6)
(b) Idealized Actutor
(c) Considering Actuator

この AO, A′O という操作機出力 x_3 の過渡状態に於ける制御信号は，(6) 式の系と同様に Bang-Bang 形であることは，すでに前節で示した。従って最終段の制御として，AO 直線上に

---

* 解のこのような不定性に関しては，本論文の口答発表[3] の際の市川氏の質問に対して，著者等のもう少したちいった見解を明らかにしておいた。なお，この問題における特異解については，極めて最近に市川氏[6] が研究の結果を発表されておられ，詳細は不明ながら一段の進展が期待される。

x_3 がその値をもてば $v=-1$, A′O 直線上にもてば $v=+1$ の最大制御信号をもって原点に向い，原点に到達した時に $v=0$ とすればよいことになる。

先に述べたように，$L=0$ とすれば(6)式のような2次系に置換わり Fig. 3 (a) の最適軌道となって切換点は C, A の2点となる。そして Fig. 3 (b) より明らかなように，A 点は原点 O と C 点は D 点と軌道上でそれぞれ同一の点となる。しかし，$L\neq 0$ の場合には，Fig. 3 (c) に示されるように A 点は O 点を離れ，D 点は C 点を離れてそれぞれ新らしい切換点とならねばならない。このようにして修正された軌道を，Fig. 4 及び Fig. 5 を用いて具体的に求めてみよう。

なお，最適制御信号が $+1$，及び -1 のときの解析結果から，その軌道及び切換点が原点に関して対称であることが知られるから，解析は最終段制御信号 $v=-1$ のときについてのみ求める。

[1] 最終段の軌道

(1) 式の一般解は

$$\begin{cases} x_3 = vt + x_{30} \\ x_2 = \dfrac{1}{2}vt^2 + x_{30}t + x_{20} \\ x_1 = \dfrac{1}{6}vt^3 + \dfrac{1}{2}x_{30}t^2 + x_{20}t + x_{10} \end{cases} \tag{7}$$

ここで，x_3 の初期値 $x_{30}=a$ (Fig. 4 の M 点) $v=-1$ とすると，

$$\begin{cases} x_3 = -t + a \\ x_2 = -\dfrac{1}{2}t^2 + at + x_{20} \\ x_1 = -\dfrac{1}{6}t^3 + \dfrac{1}{2}at^2 + x_{20}t + x_{10} \end{cases} \tag{8}$$

x_3 が a から 0 になるまでに要する時間 $t=a$ であるから，$x_3=0$ の時の境界条件 $x_2=0$ $x_1=0$ から x_{10}, x_{20} を求める。

$$x_{20} = -\frac{a^2}{2}, \quad x_{10} = \frac{a^3}{6} \tag{9}$$

a を消去して $x_{10} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}(-x_{20})^{3/2}$ (10)

(8) 式から t を消去して AO 曲線の方程式を得る。

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}(-x_2)^{3/2} \tag{11}$$

(10), (11) 式は同じ曲線を表わしている。従って，Fig. 5 の AO 曲線上に位相点がある時のみ，軌道はこの曲線に沿って原点に到達することが出来る。但し，この曲線は後で述べるように立体的な真の軌道の x_1-x_2 平面に対する投影である。

[2] x_3 の値が Fig. 4 の DA 直線部にある時の軌道

$x_3 = +1$, $v = 0$, v の 0 から -1 への最終段制御の切換えは A 点で起ると云う境界条件から，放物線軌道 (12) 式，Fig. 5 の AD 曲線を得る。

$$\text{A 点座標}\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{2},\ 1\right)$$

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{24} \tag{12}$$

以下，計算過程は同様であるのでこれを省略し，Fig. 5 と対応させて説明してゆくことにする。

[3] x_3 の値が Fig. 4 の CD 直線部分にある時の軌道

この軌道は，[1] に於ける計算と同様にして (13) 式のように求められるが，これもまた真の立体軌道の投影である。

$$x_1 = \frac{1}{6}\left(1+2x_2-2x_{20}\right)^{3/2} + \left(x_{20}-\frac{1}{2}\right)\left(1+2x_2-2x_{20}\right)^{1/2} + x_{10}+x_{20}-\frac{1}{3} \tag{13}$$

この 3 次曲線を CD 曲線とする。

但し，その時の境界条件は，任意の初期位相点 x_{30} (CD 直線間) から出発して，ある時間を経過して後 D 点に到達することである。又，さらにこの D 点は，[2] で求めた AD 放物線を代表する任意の点 x_{10}, x_{20} を表わしている。

[4] x_3 の値が Fig. 4 の CQ 直線部にある時の軌道

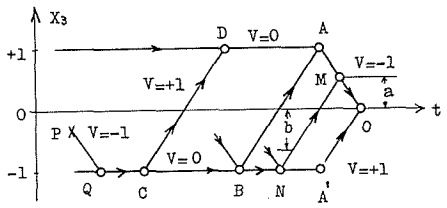

Fig. 4. Characteristics of Actuator

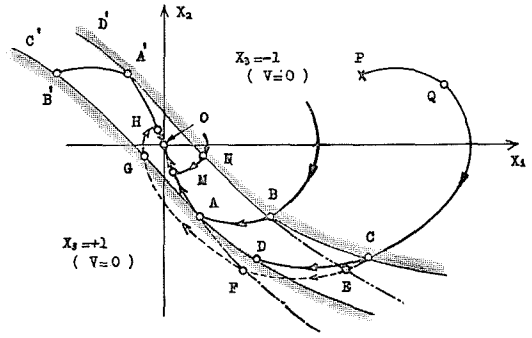

Fig. 5. Trajectories projected into X_1-X_2 plane

$x_3 = -1$, $v = 0$ であるから軌道は放物線である。この放物線は，BC 直線 ($x_3 = -1$) のどこかで起る $v = 0$ から $+1$ への切換えによって CD 曲線に軌道が切換わる。その切換え時点を表わす切換線は，$x_{30} = -1$ とし，$v = +1$ の信号のもとで L 時間後 ($L = 2$) に AD 曲線に到達するような初期位相点を求めることにより得られる。即ち，これは [3] で求めた CD 曲線が $x_{30} = -1$ なる初期値をもつ時の位相点群であって，次式で表わされる。

$$x_1=\frac{1}{2}\left(x_2-2\right)^2-\frac{31}{24} \tag{14}$$

この切換線を BC 曲線とする。

[5] x_3 が NM 直線部を通る軌道

これまでの説明で，x_3 の値が Fig. 4 の A 点を通って原点に収斂する軌道が求められた。しかしなお，x_3 が Fig. 4 に於ける B 点と A′ 点との中間の任意の点 N 点から始って，NM 直線部を通り，M 点で v が $+1$ から -1 に切換わって原点に収斂する軌道，即ち，Fig. 5 の AO 曲線を切換線とする軌道を更に考察しなければならない。

NM 直線上の x_3 の任意の値 $x_{30}=-b$，(7) 式の $v=+1$ とする。$t=t_b$ の時，x_3 の値は AO 直線上で a となり，同時に軌道は AO 曲線に到達すると考える。この境界条件と $t_b=(a+b)$ なる関係を利用して x_{10}, x_{20} を求めると

$$x_{20}=\left(-a^2+\frac{b^2}{2}\right),\quad x_{10}=\frac{1}{6}(6a^3-b^3+6a^2b) \tag{15}$$

a を消去して

$$x_{10}=\left(\frac{b^2}{2}-x_{20}\right)^{3/2}-x_{20}+\frac{1}{3} \tag{16}$$

従って，[4] の BC 切換線に対応するものは，$b=-1$ 即ち $x_{30}=-1$ として

$$x_1=\left(\frac{1}{2}-x_2\right)^{3/2}-x_2+\frac{1}{3} \tag{17}$$

で表わされる A′B 曲線となる。

以上のようにして求めた軌道及び切換線を整理すれば

(a) AO 曲線（軌道，切換線） $x_1=\frac{\sqrt{2}}{3}(-x_2)^{3/2}$ (11)

(b) AD 曲線（軌道，切換線） $x_1=\frac{1}{2}x_2^2+\frac{1}{24}$ (12)

(c) CD 曲線（軌道）

$$x_1=\frac{1}{6}\left(1+2x_2-2x_{20}\right)^{3/2}+\left(x_{20}-\frac{1}{2}\right)\left(1+2x_2-2x_{20}\right)^{1/2}+x_{10}+x_{20}-\frac{1}{3} \tag{13}$$

(d) BC 曲線（切換線） $x_1=\frac{1}{2}(x_2-2)^2-\frac{31}{24}$ (14)

(e) A′B 曲線（切換線） $x_1=\left(\frac{1}{2}-x_2\right)^{3/2}-x_2+\frac{1}{3}$ (17)

これらが Fig. 5 に示されているものである。

さて，x_3 の初期値が与えられた場合の最初の制御信号を決定する問題は，x_3 の初期値だけで解決されるものでなく，x_1, x_2, x_3 のそれぞれの初期値の組合わさり方から決まるもので

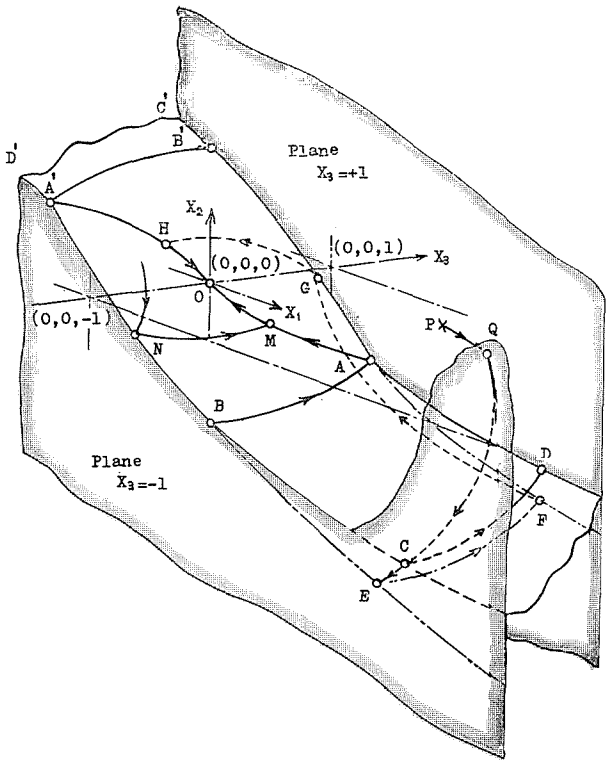

Fig. 6. Trajectories into X_1-X_2-X_3 space

あるため，2 次元的に投影された Fig. 5 の観察からは，その判断が不明瞭とならざるを得ない。そこで Fig. 5 の 3 次元的構成を Fig. 6 に示す。

Fig. 5 の帯状部分 ABA′O に対応する Fig. 6 の曲面 ABA′O の方程式は次式に示され

$$x_1 = \left(\frac{x_3^2}{2} - x_2\right)^{3/2} - \frac{1}{3}x_3^3 + x_2 x_3 \tag{18}$$

又，Fig. 5 の ABCD に対応する曲面の方程式は次式で表わされる。

$$x_1 = \frac{1}{2}\left\{x_2 - \frac{(1-x_3)^2}{2}\right\}^2 + \frac{1}{6}(x_3-1)^3 + \frac{1}{24} \tag{19}$$

Fig. 6 から明らかなように，今迄考えていた操作機の飽和特性は，位相空間に制限を与えることを意味し，理想的 Bang-Bang 動作を仮定した時の軌道及び切換線は，$x_3 = \pm 1$ の 2 平面上に於ける軌道である。(18), (19) 式の示す相接続する 2 つの曲面は，拘束面間の空間を上下

に2分するものである。

上に問題にした最初の制御信号の決定は，軌道が発散してはならないという条件から容易に定めることが出来る。

即ち，初期位相点が，2分された空間の上半分にあれば $v=-1$，下半分にあれば $v=+1$。又，この面上にある時は，AOA′ 曲線を境に，Fig. 6 中，右にあれば $v=+1$，左にあれば $v=-1$。 $x_3=\pm 1$ の拘束面上にある時には，$x_3=+1$ の面上の場合，C′ B′ AD 曲線の上方にあれば $v=-1$，下方にあれば $v=0$，$x_3=-1$ の面上の場合，D′ A′ BC 曲線の上方にあれば $v=0$，下方にあれば $v=+1$ として制御を始めれば，絶対安定な最適制御が，許される全空間に対して可能となる。

このようにして求めた軌道群及び切換線は，原点に到達する軌道が AO 又は A′ O の2つしか存在しないことに注目して，操作機の可能な全ての状態を尽し，位相点が原点に到達するように求めたものであり，Fig. 6 の面 C B A′ D′ C′ B′ AD が最適な切換条件を与える切換面であると云える。

最後に，Stout 等の求めた切換条件が最適でないことを，Fig. 5 及び Fig. 6 について考察する。

図に於ける BE 曲線は，A′ B の延長であり，AF と共に，x_3 に拘束がない制御問題の場合に，最大原理の解が与える切換面 (AO A′ B の延長) と $x_3=\pm 1$ の面との交線である。BE を切換線[1] としても原点に到達することは図から明らかであり，切換面 A B C D がもう一つの切換面 A B E F と比較して，所要時間が短かいことを確かめれば，著者等の求めた解が最適であることを示すことが出来る。

原点に到達するのに要する時間 T を，初期位相点 P から出発した場合について比較してみる。T の添字は推移の過程を示す。

T_{PQ}，T_{QC} は両者について共通である。

$T_{CD}=T_{EF}$

$T_{GHO}=T_{AO}+2T_{OH}$

上の2つの関係は，Fig. 4 によれば一層明らかである。

又，$x_3=\pm 1$ の面上では，$x_2=t+x_{20}$ であることから，$|t_1-t_2|=|x_{21}-x_{22}|$。ここで $x_{21}=[x_2]_{t=t_1}$，$x_{22}=[x_2]_{t=t_2}$ を意味する。

F 点で $v=0$ とすれば，FG なる放物線軌道をとり，$T_{DA}=T_{FG}$ になるのは，D, F 又は C, E がそれぞれ一致した時である。従って，$T_{DA}\leq T_{FG}$ となり，BC を切換線とした方が，$\Delta T=(T_{CE}+T_{FG}+2T_{OH}-T_{DA})$ だけ所要時間が小さい。

このように著者等の方法によって，最適軌道が，許される全空間を覆い得るような切換条件を求めることが出来た。

4. 結　　言

以上の検討によって，著者等の対象とした問題のように，操作機の特性を考慮する必要のある場合，この特性を制御対象に含めれば高次の位相空間となって，位相空間法による取扱いは著しく困難になるが，先ず，操作機と制御対象とを分離して考え，更に位相空間内の軌道の2次元的投影 (Fig. 5) を基にして，その操作機の特性に見合った切換線の修正を行って最適切換線を決定する方法は，実際の最適切換線の決定を容易にすることが明らかとなった。しかもPontryagin の最大原理は，制御形式を見出すのに有効に利用することが出来た。

一般に，位相空間に拘束条件がある問題に対して，Chang[4),5)] 氏は最大原理に修正を加えた論文を発表されているが，著者等の問題に直接適用することは現段階では困難である。しかし，この種の問題は極めて重要且つ興味あるものであって，なお今後の課題としたい。

いずれにしても，実際の制御過程を明らかにするには，著者等の方法は実用的意義を失うものではない。

参 考 文 献

1) Doll H. G. and Stout T. M.: Trans. ASME pp. 513–525, April. (1957).
2) Pontryagin L. S.: The Mathematical Theory of Optimal Processes. (1962). John-Willey & Sons.
3) 河内・小山・田川・三浦: 第4回計測自動制御学会予稿集.
4) Chang S. S. L.: Automatica. vol. 1, No. 1, pp. 55–67. (1963).
5) Chang S. S. L.: Automatic and Remote Control. (I.F.A.C.), (1963).
6) 市川邦彦: 第八回自動制御連合講演会