帯鋸の横およびねじり振動 (第1報)

金内忠彦

Lateral and Torsional Vibrations of Band Saw Blade (I)

Tadahiko KANAUCHI

Abstract

A band saw blade for lumbering is deformed plastically by stretching.

Furthermore, a pull is created between the two wheels of the band saw machine, and the tensile stress in the cross section amounts to 10～15 kgs per mm^2.

Under working conditions the running velocity is as high as 40～50 meters per second.

While the blade is very thin, the free parts between both wheels are comparatively wide.

Thus, vibration problems become exceedingly complicated under these conditions.

Now, since the vibrations form uneven or waved surfaces on the lumber face and result in damage to the band saw blade itself, due considerations must be given.

First, it seems necessary to investigate the frequencies of the band saw blade theoretically and experimentally.

In this paper, formulas for the calculation of lateral and torsional frequencies of free parts of the band saw blade were solved under some conditions, and the calculated values using these formulas were shown to give approximately the same results as obtained in the experiments.

目　　次

1. はしがき …… 36
2. 帯鋸自由部分のモーメントおよび応力 …… 37
2.1 面内曲げモーメント計算式 …… 37
2.2 モーメントの各成分 …… 40
2.3 応力の計算 …… 41
2.4 c_1, C' の計算 …… 42
3. 帯鋸自由部分の横およびねじり振動数 …… 43
3.1 振動方程式 …… 43
3.2 (27) 式中 $P_1=0$, $M_1=0$, xz 面内両端支持の場合 …… 44
3.2.1 $v=0$ (静止) の厳密解 …… 46
3.2.2 $B_1=0$ ($q^2=0$) の厳密解 …… 47
3.2.3 運転時近似計算式 I …… 47
3.2.4 運転時近似計算式 II …… 48
3.3 (27) 式中 $P_1=0$, $M_1=0$, xz 面内両端固定の場合 …… 50
3.3.1 $v=0$ (静止) の近似計算式 …… 50

3.3.2 運転時近似計算式 III …… 51
3.3.3 運転時近似計算式 IV …… 52
3.4 (28) 式中 $P_1=0$, $M_1=0$ の場合 …… 52
3.4.1 $v=0$ (静止) のエネルギ法計算式 …… 53
3.5 (27) 式中 $B_1=0$, $P_1=0$, (28) 式中 $P_1=0$ の場合 …… 54
3.5.1 $v=0$ (静止) の厳密解 …… 55
3.5.2 運転時近似計算式 …… 55
3.6 計算式の検討と計算結果 …… 57
4. 実 験 …… 59
4.1 振動測定方法 …… 59
4.2 実験条件 …… 60
4.3 実験結果および考察 …… 62
5. むすび …… 64

1. はしがき

製材用帯鋸は腰入れと称する加工により，幅方向に異なる塑性変形を受け，帯鋸盤の上下一対の鋸車に掛けられ，分銅とレバーによって 10～15 kg/mm² におよぶ緊張度 (平均緊張応力) が与えられ，走行安定とねじりこわさの増加が計られている。

一方，切削速度はきわめて高く，40～50 m/s にも達する。帯鋸の厚さは一般に 0.5～1.0 mm，上下鋸車の軸間距離は 1.5～2.5 m，切削の際にはこれに切削抵抗の影響が加わり，薄鋸になる程，帯鋸の振動問題が重要視される。帯鋸の振動により，製品精度，作業能率は下り，帯鋸，帯鋸盤に悪影響を及ぼし，しばしば観察される現象として，その切断面に波肌と称する目立った凹凸の模様が現われ，製品精度を害することがある。

移動する帯材 (ベルト)，帯鋸の横振動について解析[1),2),3)] がなされているが，製材用帯鋸のように複雑な因子の入った場合の解析は見当らない。

著者は，理論的研究の基礎として先ず，振動数計算式を誘導し，計算値と測定値との比較を試みた。

本報告では，各種の条件にもとづく帯鋸自由部分の横およびねじり振動について振動数計算式を求め，式の検討を行なうと共に，静止時，空転時における実測値との比較検討を行なった。

本研究は，北海道大学工学部土肥修教授がかねてより切断面の波肌発生時に音響が特に顕著に変化する現象に着目し，音響の面から波肌発生機構の解析を検討されたことが契機となって始められたもので，研究を進めるに際し，同教授の懇切な御指導を仰いだ。また，実験については当学部機械設計学研究室片岡更一助手，機械工作学研究室栃内信男技官，機械力学研究室阿部康弘技官の御協力をいただいた。併せて深謝の意を表する。

2. 帯鋸自由部分のモーメントおよび応力

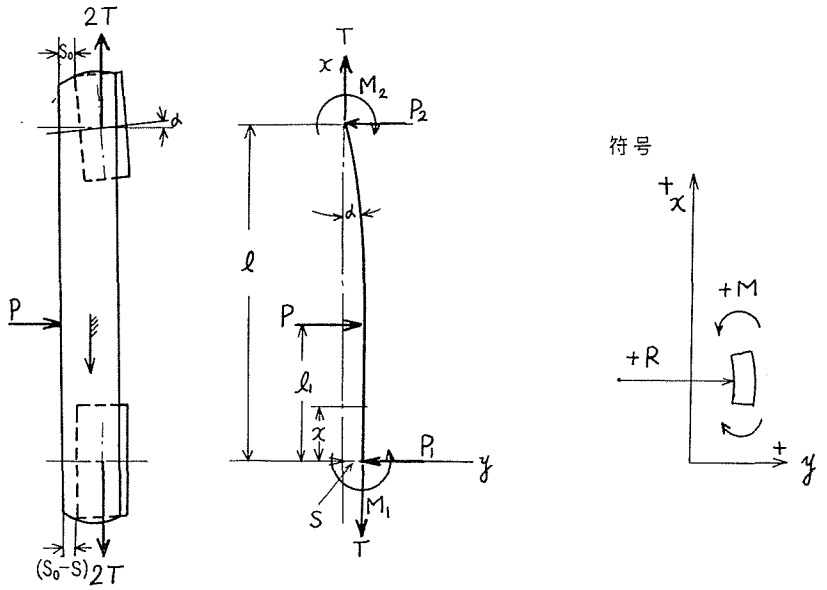
2.1 面内曲げモーメント計算式

帯鋸は普通，片側に等ピッチの歯を有するが，ここでは歯を省略し歯を除いた有効幅を考え，上下鋸車と接触する部分を両端とする自由部分について考慮する。

切削中には切削力と送り力が働くが，緊張力は一般に 1000 kg 程度のオーダであるのに対し，切削力は 10 kg 程度のオーダであるから，これを省略する。

第1図 a に示すごとく，上部鋸車には一般に前傾角 α をもたせて鋸の出 s_0 を調節するが，下部鋸車では s_0 より少ない。

切削側の自由部分について第1図 b のごとき両端固定のはりとして，曲げモーメントを求める[4]。



第 1 図

T = 緊張力，　P = 送り力，　P_1, P_2 = 反　力

M_1, M_2 = 両端におけるモーメント（絶対値）

l = 自由部分の長さ

l_1 = 帯鋸自由部分の下端から送り力作用点までの距離

R = 初曲率半径（バック半径）

E = 縦弾性係数

I = 断面二次モーメント

長さ，幅，厚さ各方向をそれぞれ x, y, z，自由部分の下端から x の距離にある断面にお

ける y 方向のたわみを u, 曲げモーメントを M とすれば

$$\left.\begin{aligned} &0 \leqq x \leqq l_1: \quad M = -M_1 + P_1 x - T(u-s) \\ &l_1 \leqq x \leqq l: \quad M = -M_1 + P_1 x - P(x-l_1) - T(u-s) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

初曲率 $1/R$ が充分小であるから

$$d^2u/dx^2 = -(M/EI) - (1/R)$$

すなわち

$$0 \leqq x \leqq l_1: \quad d^2u/dx^2 = (1/EI)\left\{M_1 - P_1 x + T(u-s)\right\} - (1/R) \tag{2}$$

$$l_1 \leqq x \leqq l: \quad d^2u/dx^2 = (1/EI)\left\{M_1 - P_1 x + P(x-l_1) + T(u-s)\right\} - (1/R) \tag{3}$$

$\kappa^2 = Tl^2/4EI$ とおくと (2), (3) 式の解は次のようになる。

$$0 \leqq x \leqq l_1:$$

$$u_1 = C_1 \sinh(2\kappa x/l) + C_2 \cosh(2\kappa x/l) - (M_1 l^2/4EI\kappa^2) + (P_1 l^2 x/4EI\kappa^2) + s + (l^2/4R\kappa^2) \tag{4}$$

$$l_1 \leqq x \leqq l:$$

$$u_2 = C_3 \sinh(2\kappa x/l) + C_4 \cosh(2\kappa x/l) - (M_1 l^2/4EI\kappa^2) + (P_1 l^2 x/4EI\kappa^2) - \left\{Pl^2(x-l_1)/4EI\kappa^2\right\} + s + (l^2/4R\kappa^2) \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &x = 0: \quad u_1 = s \qquad u_1' = 0 \\ &x = l: \quad u_2 = 0 \qquad u_2' = -\alpha \\ &x = l_1: \quad u_1 = u_2 \qquad u_1' = u_2' \end{aligned}$$

これらの境界条件より定数 $C_1 \sim C_4$ を決定し M_1, P_1 の関係式を求める。

$$0 \leqq x \leqq l_1:$$

$$u_1 = -(P_1 l^3/8EI\kappa^3)\sinh(2\kappa x/l) + \left\{(M_1 l^2/4EI\kappa^2) - (l^2/4R\kappa^2)\right\}\cosh(2\kappa x/l) - \left\{l^2(M_1 - P_1 x)/4EI\kappa^2\right\} + s + (l^2/4R\kappa^2) \tag{6}$$

$$u_2 = \left[\left\{l^3(P-P_1)/8EI\kappa^3\right\} - (\alpha l/2\kappa)\right]\left\{\cosh 2\kappa \sinh(2\kappa x/l) - \sinh 2\kappa \cosh(2\kappa x/l)\right\} + \left[\left\{l^2(M_1 - P_1 l) + Pl^2(l-l_1)\right\}\Big/4EI - s - (l^2/4R\kappa^2)\right]\left\{\cosh 2\kappa \cosh(2\kappa x/l) - \sinh 2\kappa \sinh(2\kappa x/l)\right\} - \left[\left\{l^2(M_1 - P_1 x) + Pl^2(x-l_1)\right\}\Big/4EI\kappa^2 + s + (l^2/4R\kappa^2)\right] \tag{7}$$

$$(M_1 l^2/4EI\kappa^2)\left\{\cosh 2\kappa \cosh(2\kappa l_1/l) - \sinh 2\kappa \sinh(2\kappa l_1/l) - \cosh(2\kappa l_1/l)\right\} + (P_1 l^3/8EI\kappa^3)\left\{\sinh 2\kappa \cosh(2\kappa l_1/l) - \cosh 2\kappa \sinh(2\kappa l_1/l) + 2\kappa \sinh 2\kappa \sinh(2\kappa l_1/l) - 2\kappa \cosh 2\kappa \cosh(2\kappa l_1/l) + \sinh(2\kappa l_1/l)\right\}^*$$

$$
\begin{aligned}
&+(Pl^3/8EI\kappa^3)\Big[\cosh 2\kappa\sinh(2\kappa l_1/l)-\sinh 2\kappa\cosh(2\kappa l_1/l)\\
&\quad+2\kappa\Big\{1-(l_1/l)\Big\}\Big\{\cosh 2\kappa\cosh(2\kappa l_1/l)-\sinh 2\kappa\sinh(2\kappa l_1/l)\Big\}\Big]\\
&+(l^2/4R\kappa^2)\Big\{\sinh 2\kappa\sinh(2\kappa l_1/l)-\cosh 2\kappa\cosh(2\kappa l_1/l)+\cosh(2\kappa l_1/l)\Big\}\\
&+(\alpha l/2\kappa)\Big\{\sinh 2\kappa\cosh(2\kappa l_1/l)-\cosh 2\kappa\sinh(2\kappa l_1/l)\Big\}\\
&+s\Big\{\sinh 2\kappa\sinh(2\kappa l_1/l)-\cosh 2\kappa\cosh(2\kappa l_1/l)\Big\}=0 \qquad (8)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(M_1l^2/4EI\kappa^2)\Big\{\cosh 2\kappa\sinh(2\kappa l_1/l)-\sinh 2\kappa\cosh(2\kappa l_1/l)-\sinh(2\kappa l_1/l)\Big\}\\
&+(P_1l^3/8EI\kappa^3)\Big\{\sinh 2\kappa\sinh(2\kappa l_1/l)-\cosh 2\kappa\cosh(2\kappa l_1/l)\\
&\quad+2\kappa\sinh 2\kappa\cosh(2\kappa l_1/l)-2\kappa\cosh 2\kappa\sinh(2\kappa l_1/l)+\cosh(2\kappa l_1/l)\Big\}\\
&+(Pl^3/8EI\kappa^3)\Big[\cosh 2\kappa\cosh(2\kappa l_1/l)-\sinh 2\kappa\sinh(2\kappa l_1/l)-1\\
&\quad+2\kappa\Big\{1-(l_1/l)\Big\}\Big\{\cosh 2\kappa\sinh(2\kappa l_1/l)-\sinh 2\kappa\cosh(2\kappa l_1/l)\Big\}\Big]\\
&+(l^2/4R\kappa^2)\Big\{\sinh 2\kappa\cosh(2\kappa l_1/l)-\cosh 2\kappa\sinh(2\kappa l_1/l)+\sinh(2\kappa l_1/l)\Big\}\\
&+(\alpha l/2\kappa)\Big\{\sinh 2\kappa\sinh(2\kappa l_1/l)-\cosh 2\kappa\cosh(2\kappa l_1/l)\Big\}\\
&+s\Big\{\sinh 2\kappa\cosh(2\kappa l_1/l)-\cosh 2\kappa\sinh(2\kappa l_1/l)\Big\}=0 \qquad (9)
\end{aligned}
$$

l, l_1, α, s, E, I, T, P, R が与えられると，(8), (9) 式より M_1, P_1 が算出され，(6), (7) 式より u が，(1) 式より曲げモーメント M が求められる。

(1) 式において T を省略した場合，P_1, M_1 は次のようになる。この M_1 は文献[5]に求められている M_2 と同一である。

$$P_1=-(12EI\,s/l^3)+(6EI\,\alpha/l^2)+\Big\{P(l-l_1)^2(2l_1+l)/l^3\Big\} \qquad (10)$$

$$M_1=(EI/R)-(6EI\,s/l^2)+(2EI\,\alpha/l)+\Big\{Pl_1(l-l_1)^2/l^2\Big\} \qquad (11)$$

次のように表わされる。

$0\leqq x\leqq l_1$:

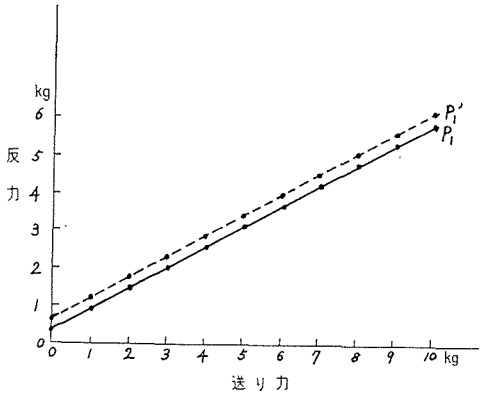
$$
\begin{aligned}
M=&-(EI/R)+(6EI\,s/l^2)-(2EI\,\alpha/l)-\Big\{Pl_1(l-l_1)^2/l^2\Big\}\\
&+\Big[-(12EI\,s/l^3)+(6EI\,\alpha/l^2)+\Big\{P(l-l_1)^2(2l_1+l)/l^3\Big\}\Big]x \qquad (12)
\end{aligned}
$$

$l_1\leqq x\leqq l$:

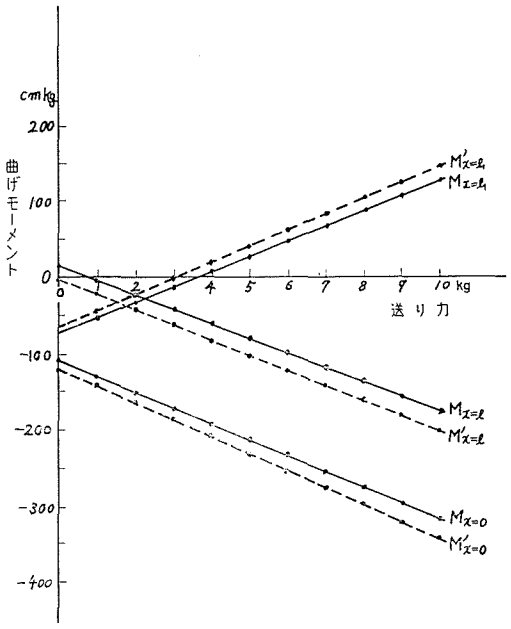
$$
\begin{aligned}
M=&-(EI/R)+(6EI\,s/l^2)-(2EI\,\alpha/l)+\Big\{Pl_1^2(2l-l_1)/l^2\Big\}\\
&+\Big[-(12EI\,s/l^3)+(6EI\,\alpha/l^2)-\Big\{Pl_1^2(3l-2l_1)/l^3\Big\}\Big]x \qquad (13)
\end{aligned}
$$

T を考慮に入れた (1)～(9) 式による反力，曲げモーメントを P, M とし，T を考慮に入れない (10)～(13) 式によるものを P', M' とすると，第2図 a, b に示すような数値になる。

これは $P=1$～10 kg について P_1, P_1', $x=0$, $x=l_1$, $x=l$ における M, M' を求めたもの



第2図 a



第2図 b

である。

ただし，実測値として次の値(諸元 No. 1)をとった。

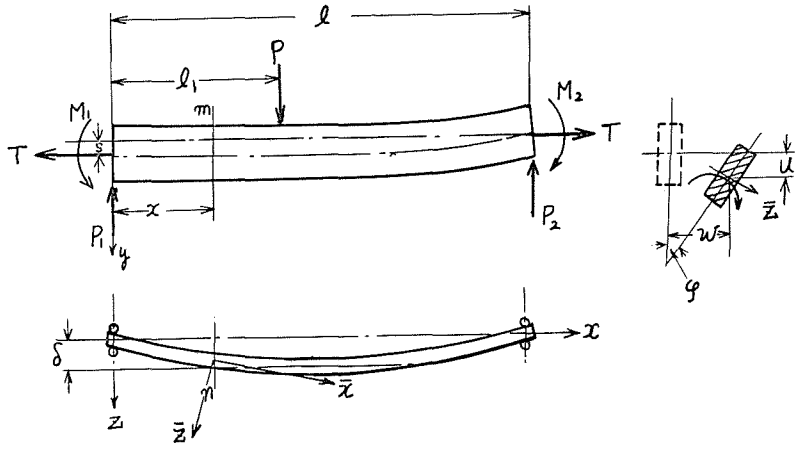
$E = 2.05 \times 10^6\ \mathrm{kg/cm^2}$

$b = 0.85\ \mathrm{mm}$, $h = 78\ \mathrm{mm}$, $l = 170\ \mathrm{cm}$

$R = 600\ \mathrm{m}$, $s = 0.7\ \mathrm{mm}$, $\alpha = 1.3/1000$ さらに $l_1 = 80\ \mathrm{cm}$ $T = 800\ \mathrm{kg}$

2.2 モーメントの各成分

第3図のように z 方向のたわみを w, 断面のねじり角を φ とする。



第 3 図

帯鋸を xy 面については両端固定と仮定し，緊張力，曲げモーメント，送り力が作用した場合，断面 mn における x, y, z 軸のまわりのモーメント M_x, M_y, M_z は，次のようになる。

$$0 \leqq x \leqq l_1 \qquad \left.\begin{aligned} M_z &= -M_1 + P_1 x - T(u-s) \\ M_y &= -Tw \\ M_x &= P_1\left\{\delta + (\varphi_{l_1} h/2) - w\right\} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

ただし　δ, φ_{l_1} は荷重断面における z 方向のたわみおよびねじり角

一方，帯鋸の断面 mn の中心に座標軸 $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ を持つ座標系を考える[6]。$\bar{y}$, $\bar{z}$ は断面の主軸方向に，$\bar{x}$ は帯片の中心線の切線方向にとる。

帯片の中心線の xz および xy 両面内の曲率は d^2w/dx^2 および d^2u/dx^2 であるが，w, u, φ が小であるかぎり $\bar{x}\bar{z}$ および $\bar{x}\bar{y}$ 両面内の曲率も，それぞれ d^2w/dx^2, d^2u/dx^2 に等しいと仮定することができ，中心線の単位長さについてのねじり角は $d\varphi/dx$ である。

座標軸 x, y, z のまわりのモーメントを $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ 軸のまわりのモーメントとして表わし，w, u, φ をきわめて小であるとして高次の微小量を省略すると (15) 式～(17) 式のように記すことができる。

$$B_1(d^2w/dx^2) = -M_{\bar{y}} = T_w + M_1\varphi - P_1 x\varphi \tag{15}$$

$$B_2(d^2u/dx^2) = -M_{\bar{z}} - (B_2/R) = M_1 - P_1 x + T(u-s) - (B_2/R) \tag{16}$$

$$C'(d\varphi/dx) = M_{\bar{x}} = P_1\left\{\delta + (\varphi_{l_1} h/2) - w\right\} - M_1(dw/dx) + P_1 x(dw/dx) \tag{17}$$

ただし，B_1, B_2 は xz および xy 面内の曲げこわさ，幅を h，厚さを b とすれば

$$B_1 = (1/12)hb^3E' \qquad B_2 = (1/12)bh^3E$$

C' はねじりこわさで，横弾性係数を G，横断面の微小面積にかかる引張応力を σ とすると

$$C' = GJ + \int\int_A \sigma(y^2+z^2)\,dy\,dz \tag{18}$$

$$A \quad \begin{cases} y = -h/2 \sim h/2 \\ z = -b/2 \sim b/2 \end{cases}$$

ここで　$GJ = (hb^3/3)\left\{1 - 0.63(b/h)\right\}G$

2.3 応力の計算

文献[7]に，腰入れによるひずみの式 (19) および，腰入れ，緊張力による応力の式 (20), (21) が与えられている。

$$\varepsilon_x^0 = c_1\left\{(h/2)^2 - y^2\right\} + c_2\left\{y + (h/2)\right\} + c_3 \tag{19}$$

c_1 はテンションに関する係数，c_2 はバック半径 R の逆数，c_3 は腰入れに無関係で緊張力できまる。

$$\sigma = (T/bh) + c_1E\left\{y^2 - (h^2/12)\right\} + (12My/bh^3) \tag{20}$$

M としてバックのついた帯鋸を真直ぐにする曲げモーメントのみを考える場合

$$\sigma = (T/bh)+c_1E\left\{y^2-(h^2/12)\right\}+c_2Ey \tag{21}$$

諸元 No. 1, 静止時の緊張力 T_s=800 kg, 鋸速度 $v \leqq 55$ m/s の条件では M は第1表のようになる。

第 1 表

P kg	M cm-kg		
	$M_{x=0}$	$M_{x=l_1}$	$M_{x=l}$
0	−109	−72	14
10	−320	124	−170

(21) 式の各項の数値を第2表に示す。

第 2 表

1 項 (kg/mm²)		12.1	
2 項 (〃)		7.7	
M (cm-kg)	0	114.9	230
3 項 (kg/mm²)	0	1.3	3.7
1+2+3 項 (〃)	19.8	21.1	23.5
比	1.000	1.066	1.187

ただし $T = 800$ kg $(800 \leqq T \leqq 960)$

$c_1 = 3.7\times10^{-5}$ (1/cm²) $y = h/2$. $EI/R = 114.9$ cm-kg

これより緊張力の影響が最も大きく，曲げモーメントの影響は割合少ないことが認められる。

2.4 c_1, C' の計算

テンションの形を測定し，それより c_1 を計算する式については既に求められている[8]。

xz 面内について一定の曲率半径 ρ に曲げたときの $y=0$ における山の高さ $\bar{\varphi}_0$ を測定することにより，次式から c_1 が計算される。

$$c_1 = 4\varepsilon^0_{x_0}/h^2$$

ただし ν = ポアソン比 $D = Eb^3/12(1-\nu^2)$, $12(1-\nu^2)/(\rho^2b^2) = bE/(D\rho^2) = 4c^4$

$$\psi_{ch/2} = e^{-ch/2}\left\{\cos(ch/2)-\sin(ch/2)\right\} \quad \psi_{ch} = e^{-ch}\left\{\cos(ch)-\sin(ch)\right\}$$

$$\bar{\varphi}_0 = \varepsilon^0_{x_0}\left[\rho-\left\{4\rho/(c^2h^2)\right\}(1+\psi_{ch}-2\psi_{ch/2})\right]-\left\{\nu/(2c^2\rho)\right\}(1+\psi_{ch}-2\psi_{ch/2}) \tag{22}$$

実験用帯鋸は ρ=1 m の帯鋸テンション測定記録装置にて測定し，次表の結果を得た。

第 3 表

$\bar{\varphi}_0$ (mm)	$\varepsilon^0_{x_0}$	c_1 (1/cm²)
0.2	0.56×10^{-3}	3.7×10^{-5}

C' の値は (18) 式，(21) 式より

$$C' = GJ+(1/12)\,Th^2\left\{1+(b^2/h^2)\right\}+(1/180)\,c_1 E\,bh^5 \tag{23}$$

$$C' = 1268+4056+1034 = 6358\ \text{kg-cm}^2$$

ただし　　諸元 No. 1,　$G = 8.0\times10^{-5}\ \text{kg/cm}^2$,　$T_s = 800$ kg

第2項，すなわち緊張力の項が最も大きい値になっている。

3. 帯鋸自由部分の横およびねじり振動数

3.1 振動方程式

(15) 式，(16) 式から振動方程式を求めると

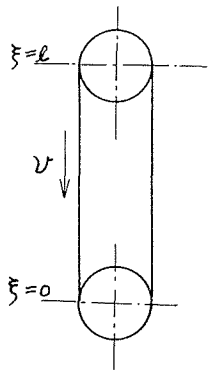
$$B_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-T\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = (M_1-P_1x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-2P_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} \tag{24}$$

$$C'\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\gamma I_p}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -(M_1-P_1x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{25}$$

ここで　　γ = 単位体積の重さ

A = 断 面 積

I_p = 断面二次極モーメント



第 4 図

帯鋸と同時に移動する座標 x に関しては，(24)，(25) 式で表わすことができるが，帯鋸運転時について考える。不動座標 ξ は，帯鋸の速度を v，時間を t とすると，$\xi=x-vt$ で，$(x,\ t)$，$(\xi,\ t)$ なる2個の座標に対し，それぞれ 1, 2 なる記号をつけると (26) 式の関係がある。

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_1 = \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_2 - v\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)_2,\quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)_1 = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)_2$$
$$-2v\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial\xi}\right)_2+v^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\right)_2,\quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_1 = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\right)_2,\quad \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_1 = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_2$$
$$-2v\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial\xi}\right)_2+v^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\right)_2,\quad \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_1 = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\right)_2 \tag{26}$$

(24)，(25) 式に入れると

$$B_1\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^4}+\frac{\gamma A}{g}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-2v\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial\xi}+v^2\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\right)-T\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}$$
$$= (M_1-P_1\xi)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}-2P_1\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} \tag{27}$$

$$C'\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}-\frac{\gamma I_p}{g}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-2v\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial\xi}+v^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\right) = -(M_1-P_1\xi)\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} \tag{28}$$

(27)，(28) 式が帯鋸運転時の $0\leqq x<l_1$ における振動方程式となる。

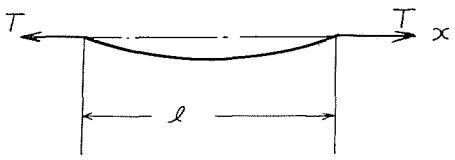
3.2 (27) 式中 $P_1=0$, $M_1=0$, xz 面内両端支持の場合

$P_1=0$ では近似的に $P=0$ と仮定する。

$$B_1\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4}+\frac{\gamma A}{g}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-2v\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial \xi}+v^2\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)-T\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}=0 \tag{29}$$

また，次のようにして求められる。

第5図のごとく，軸方向に緊張力 T を受け静的横荷重のもとでは次式が成立つ[9]



第 5 図

$$B_1(d^2w/dx^2)=-\bar{M}+Tw$$

ただし　$\bar{M}$ は横荷重による曲げモーメント

2度微分し

$$B_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-T\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$$

これを不動座標 ξ について表わすと，(26) 式の関係から (29) 式と同一の方程式を得る。

(29) 式において

$$Tg/\gamma A=p_1^2,\qquad B_1g/\gamma A=q^2\qquad \text{とおく}$$

ただし　$T=T_s+(\gamma A v^2/g)$

$$p_1^2=Tg/\gamma A=(T_sg/\gamma A)+v^2=p_s^2+v^2$$

の関係があり，実験によっても，この関係が確められた。(29) 式から

$$q^2\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4}+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-2v\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial \xi}+v^2\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}-p_1^2\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}=0 \tag{30}$$

この解を

$$w(\xi,\ t)=e^{i\alpha\xi}e^{i\beta t} \tag{31}$$

とおく[2]。ただし　α, β=定数　　(30) 式から

$$q^2\alpha^4+(p_1^2-v^2)\alpha^2+2v\alpha\beta-\beta^2=0 \tag{32}$$

一方，(30) 式の一般解は C_1, C_2, C_3, C_4 を任意定数として

$$w(\xi,\ t)=\left[C_1e^{i\alpha_1\xi}+C_2e^{i\alpha_2\xi}+C_3e^{i\alpha_3\xi}+C_4e^{i\alpha_4\xi}\right]e^{i\beta t} \tag{33}$$

xz 面において両端単純支持の境界条件

$$\xi=0,\quad \xi=l:\quad w=0,\qquad \partial^2w/\partial\xi^2=0,$$

および，あらゆる t について成立し，$C_1\sim C_4$ が同時に0にならない条件から次の行列式が得られる。

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \alpha_4^2 \\ e^{i\alpha_1 l} & e^{i\alpha_2 l} & e^{i\alpha_3 l} & e^{i\alpha_4 l} \\ \alpha_1^2 e^{i\alpha_1 l} & \alpha_2^2 e^{i\alpha_2 l} & \alpha_3^2 e^{i\alpha_3 l} & \alpha_4^2 e^{i\alpha_4 l} \end{vmatrix} = 0 \tag{34}$$

これを展開して

$$\begin{aligned} \Delta = {} & (\alpha_1^2-\alpha_2^2)(\alpha_4^2-\alpha_3^2)\left\{e^{i(\alpha_1+\alpha_2)l}+e^{i(\alpha_3+\alpha_4)l}\right\} + \\ & (\alpha_1^2-\alpha_3^2)(\alpha_2^2-\alpha_4^2)\left\{e^{i(\alpha_1+\alpha_3)l}+e^{i(\alpha_2+\alpha_4)l}\right\} + \\ & (\alpha_2^2-\alpha_3^2)(\alpha_4^2-\alpha_1^2)\left\{e^{i(\alpha_1+\alpha_4)l}+e^{i(\alpha_2+\alpha_3)l}\right\} \quad = 0 \end{aligned} \tag{35}$$

(32) 式を解くため，次の3次方程式

$$y^3+\frac{2(p_1^2-v^2)}{q^2}y^2+\left\{\frac{(p_1^2-v^2)^2}{q^4}+\frac{4\beta^2}{q^2}\right\}y-\frac{4v^2\beta^2}{q^4}=0 \tag{36}$$

において

$$L = -\frac{(p_1^2-v^2)^2}{9q^4}+\frac{4\beta^2}{3q^2}, \qquad N = -\frac{(p_1^2-v^2)^3}{27q^6}-\frac{4\beta^2p_1^2+2\beta^2v^2}{3q^4}$$

$$U = \sqrt[3]{-N+\sqrt{N^2+L^3}}, \qquad V = \sqrt[3]{-N-\sqrt{N^2+L^3}}$$

$$W_1 = -(1/2)(1+i\sqrt{3}), \qquad W_2 = -(1/2)(1-i\sqrt{3})$$

とすれば，(36) 式の根 y_1, y_2, y_3 は

$$y_1 = U+V-\left\{2(p_1^2-v^2)/3q^2\right\}$$

$$y_2 = W_1U+W_2V-\left\{2(p_1^2-v^2)/3q^2\right\}$$

$$y_3 = W_2U+W_1V-\left\{2(p_1^2-v^2)/3q^2\right\}$$

ただし　　$N^2+L^3 \geqq 0$ と仮定する

(32) 式の解は次式より求められる。

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= (1/2)(\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}) \\ \alpha_2 &= (1/2)(\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}-\sqrt{y_3}) \\ \alpha_3 &= (1/2)(-\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}-\sqrt{y_3}) \\ \alpha_4 &= (1/2)(-\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}) \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

次の関係を (35) 式に代入して

$$\alpha_1-\alpha_2 = \sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}, \qquad \alpha_1+\alpha_2 = \sqrt{y_1}$$

$$\alpha_4-\alpha_3 = \sqrt{y_3}-\sqrt{y_2}, \qquad \alpha_4+\alpha_3 = -\sqrt{y_1}$$

$$\alpha_1-\alpha_3 = \sqrt{y_1}+\sqrt{y_3}, \qquad \alpha_1+\alpha_3 = \sqrt{y_2}$$

$$\alpha_2-\alpha_4 = \sqrt{y_1}-\sqrt{y_3}, \qquad \alpha_2+\alpha_4 = -\sqrt{y}$$

$$\alpha_2-\alpha_2=\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2},\qquad \alpha_2+\alpha_3=-\sqrt{y_3}$$
$$\alpha_4-\alpha_1=-\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2},\qquad \alpha_4+\alpha_1=\sqrt{y_3}$$

(38) 式が得られる。

$$y_1(y_2-y_3)\left\{e^{il\sqrt{y_1}}+e^{-il\sqrt{y_1}}\right\}+y_2(y_3-y_1)\left\{e^{il\sqrt{y_2}}+e^{-il\sqrt{y_2}}\right\}$$
$$+y_3(y_1-y_2)\left\{e^{il\sqrt{y_3}}+e^{-il\sqrt{y_3}}\right\}=0 \tag{38}$$

または

$$y_1(y_2-y_3)\cos(l\sqrt{y_1})+y_2(y_3-y_1)\cos(l\sqrt{y_2})+y_3(y_1-y_2)\cos(l\sqrt{y_3})=0 \tag{39}$$

これらの式より円振動数 β の近似式が求まる。

3.2.1 $v=0$ (静止) の厳密解

(32) 式から

$$q^2\alpha^4+p_1^2\alpha^2-\beta^2=0 \tag{40}$$
$$\alpha_{1,2}=\pm\sqrt{(-p_1^2+\sqrt{p_1^4+4q^2\beta^2})/2q^2}\qquad \alpha_{3,4}=\pm\sqrt{(-p_1^2-\sqrt{p_1^4+4q^2\beta^2})/2q^2}$$

(35) 式に直接 α_1, α_2, α_3, α_4 を代入し解く。

$$(\alpha_1^2-\alpha_2^2)(\alpha_4^2-\alpha_3^2)=0$$
$$(\alpha_1^2-\alpha_3^2)(\alpha_2^2-\alpha_4^2)=(p_1^4+4q^2\beta^2)/q^4$$
$$(\alpha_2^2-\alpha_3^2)(\alpha_4^2-\alpha_1^2)=-(p_1^4+4q^2\beta^2)/q^4$$
$$\Delta=\left\{(p_1^4+4q^2\beta^2)/q^4\right\}\left\{e^{i(\alpha_1+\alpha_3)l}+e^{i(\alpha_2+\alpha_4)l}-e^{i(\alpha_1+\alpha_4)l}-e^{i(\alpha_2+\alpha_3)l}\right\}$$
$$=\left\{(p_1^4+4q^2\beta^2)/q^4\right\}(e^{i\alpha_1 l}-e^{i\alpha_2 l})(e^{i\alpha_3 l}-e^{i\alpha_4 l})=0$$

$(p_1^4+4q^2\beta^2)/q^4\neq 0$ とすると

$$(e^{i\alpha_1 l}-e^{i\alpha_2 l})(e^{i\alpha_3 l}-e^{i\alpha_4 l})=(e^{i\alpha_1 l}-e^{-i\alpha_1 l})(e^{i\alpha_3 l}-e^{-i\alpha_3 l})$$
$$=-4(\sin\alpha_1 l)(\sin\alpha_3 l)=0$$

$$\sin\alpha_3 l=i\sinh\sqrt{(p_1^2+\sqrt{p_1^4+4q^2\beta^2})/2q^2}\neq 0$$

$\sin\alpha_1 l=0$ より

$$\alpha_1=\sqrt{(-p_1^2+\sqrt{p_1^4+4q^2\beta^2})/2q^2}=n\pi/l$$

円振動数 $$\beta=(n^2\pi^2/l^2)\sqrt{(B_1g/\gamma A)\left\{1+(l/n\pi)^2(T/B_1)\right\}}\ (\mathrm{rad/s}) \tag{41}$$

振 動 数 $$f=\beta/2\pi=(n^2\pi/2l^2)\sqrt{(B_1g/\gamma A)\left\{1+(l/n\pi)^2(T/B_1)\right\}}\ (\mathrm{c/s}) \tag{42}$$

ただし $n=$ 次 数

この場合，はりの振動を自由振動と仮定し

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sin(n\pi x/l)\right\}(A_n\cos\beta_n t+B_n\sin\beta_n t)$$

ここで　　A_n, B_n = 定　数

から求められる振動数も (42) 式に一致する。

一方，最大ポテンシャルエネルギ（曲げ，緊張力による）が最大運動エネルギに等しいとおいて[10]

$$\frac{1}{2}B_1\int_0^l\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2dx+\frac{1}{2}T\int_0^l\left(\frac{dw}{dx}\right)^2dx=\frac{1}{2}\frac{\gamma A}{g}\beta^2\int_0^l w^2dx \tag{43}$$

たわみ曲線を $w=w_0\sin(n\pi x/l)$ と仮定すると (41), (42) 式と同一の結果を得る。ただし，w_0=定数。

3.2.2　$B_1=0$ ($q^2=0$) の厳密解

$q^2=0$ と仮定すると (30) 式は

$$\frac{\partial^2w}{\partial t^2}-2v\frac{\partial^2w}{\partial t\partial\xi}+v^2\frac{\partial^2w}{\partial\xi^2}-p_1^2\frac{\partial^2w}{\partial\xi^2}=0 \tag{44}$$

$w(\xi,\ t)=e^{i\alpha\xi}e^{i\beta t}$ とおくと

$$-\beta^2+2v\alpha\beta+(p_1^2-v^2)\alpha^2=0$$

$$\alpha=\frac{-v\beta\pm\sqrt{v^2\beta^2+(p_1^2-v^2)\beta^2}}{p_1^2-v^2}=\frac{(-v\pm p_1)\beta}{p_1^2-v^2}$$

(44) 式の一般解を次のように表わす。

$$w(\xi,\ t)=\left[C_1e^{i\alpha_1\xi}+C_2e^{i\alpha_2\xi}\right]e^{i\beta t}\qquad\text{ただし}\qquad C_1,\ C_2=\text{定　数}$$

$\xi=0$, $\xi=l$ ： $w=0$ とおくと。

$$C_1+C_2=0,\ C_1e^{i\alpha_1l}+C_2e^{i\alpha_2l}=0,\ e^{i\alpha_1l}-e^{i\alpha_2l}=0,\ \sin\left\{(1/2)(\alpha_1-\alpha_2)l\right\}=0$$

$\alpha_1-\alpha_2=2p_1\beta/(p_1^2-v^2)=2n\pi/l$

$$\beta=(n\pi\ p_1/l)\left\{1-(v^2/p_1^2)\right\}\ (\text{rad/s}) \tag{45}$$

$$f=(n/2l)\sqrt{Tg/\gamma A}\left\{1-(\gamma A\ v^2/Tg)\right\}\ (\text{c/s}) \tag{46}$$

3.2.3　運転時近似計算式 I

$$N^2+L^3=\frac{4\beta^2p_1^2(p_1^2-v^2)^3}{27q^{10}}\left\{1+\frac{8\beta^2q^2\left(1+\frac{5v^2}{2p_1^2}-\frac{v^4}{8p_1^4}\right)}{p_1^4\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^3}+\frac{16\beta^4q^4}{p_1^8\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^3}\right\} \tag{47}$$

$p_1>v$ では仮定どおり $N^2+L^3\geqq0$ である。諸元 No. 1, $T_s=600$, 800 kg とすれば $p_s^2=1.13\times10^8$, $1.51\times10^8\ \text{cm}^2/\text{s}^2$, $q^2=1.54\times10^8\ \text{cm}^4/\text{s}^2$, (45) 式による β は $n=1$ で約 170～230 rad/s である。$v\leqq55$ m/s から中かっこ内の第2項，3項は1に較べて充分小さいので

$$\frac{U}{V} \fallingdotseq \frac{p_1^2\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)}{3q^2} \times \sqrt[3]{1+\frac{36\beta^2q^2\left(1+\frac{v^2}{2p_1^2}\right)}{p_1^4\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^3} \pm \frac{6\sqrt{3}\,\beta q}{p_1^2\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \pm \frac{24\sqrt{3}\,\beta^3q^3\left(1+\frac{5v^2}{2p_1^2}-\frac{v^4}{8p_1^4}\right)}{p_1^6\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^{\frac{9}{2}}} \pm \frac{48\sqrt{3}\,\beta^5q^5}{p_1^{10}\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^{\frac{9}{2}}}} \tag{48}$$

$\beta q/p_1^2 \ll 1$, $v/p_1 < 1$ であり 3 乗根号内の第 2 項, 4 項, 5 項を省略して近似計算をする。

$$\frac{U}{V} \fallingdotseq \left\{p_1^2\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right) 3q^2\right\}\left\{1 \pm 2\sqrt{3}\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{\beta q}{p_1^2}\right\} \tag{49}$$

とおけば

$$y_1 = 0 \qquad \begin{matrix} y_2 \\ y_3 \end{matrix} \fallingdotseq \left\{p_1^2\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)\Big/q^2\right\}\left\{1 \pm 2\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{\beta q}{p_1^2}\,i\right\}$$

$$\begin{matrix} il\sqrt{y_2} \\ il\sqrt{y_3} \end{matrix} \fallingdotseq C \pm Di$$

ただし $\quad C = \left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{p_1 l}{q} \qquad D = \left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^{-1}\frac{\beta l}{p_1}$

(38) 式に代入すると

$$y_2 y_3 (\sinh C)(\sin D) = 0, \qquad D = n\pi$$

$$\beta = (n\pi\, p_1/l)\left\{1-(v^2/p_1^2)\right\} \text{ (rad/s)} \tag{50}$$

$$f = (n/2l)\sqrt{Tg/\gamma A}\left\{1-(\gamma A\, v^2/Tg)\right\} \text{ (c/s)} \tag{51}$$

3.2.4 運転時近似計算式 II

運転時について, 項数を増しさらに正確な近似計算を行なう。

(48) 式において, 3 乗根号内の分母の p_1 の次数が 6 より大なるものの省略を検討する。

$$p_s^2 = 1.13\times10^8\ \text{cm}^2/\text{s}^2, \qquad q^2 = 1.54\times10^8\ \text{cm}^4/\text{s}^2$$

$$\beta \fallingdotseq (\pi p_1/l)\left\{1-(v^2/p_1^2)\right\} \text{ rad/s}, \qquad v = 55\ \text{m/s}$$

とすると $\quad p_1^2 \fallingdotseq 1.43\times10^8\ \text{cm}^2/\text{s}^2, \qquad \beta^3q^3/p_1^6 = 3.44\times10^{-6}$

p の次数が 6 より大なる項を省略しても結果は充分で, 次のような近似計算 II を行なう。

$$\frac{U'}{V'} = \frac{p_1^2\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)}{3q^2}\sqrt[3]{1 \pm \frac{6\sqrt{3}\,\beta q}{p_1^2\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left\{1+\frac{2\sqrt{3}\left(1+\frac{v^2}{2p_1^2}\right)\beta q}{p_1^2\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{4\beta^2q^2}{p_1^4\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^3}\right\}}$$

$$\fallingdotseq \frac{p_1^2\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)}{3q^2}\left\{1 \pm 2\sqrt{3}\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{\beta q}{p_1^2}+6\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^{-3}v^2\frac{\beta^2q^2}{p_1^6}\right\} \tag{52}$$

$U' = U+a \qquad V' = V+a \qquad a = 2\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^{-2}\frac{v^2\beta^2}{p_1^4}$ とおく

$$y_1 = 2a$$

$$\begin{matrix} y_2 \\ y_3 \end{matrix} = (G-a) \pm Hi$$

ただし $\quad G = -\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)\frac{p_1^2}{q^2} \qquad H = -2\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^{-1/2}\frac{\beta}{q}$

$$il\sqrt{y_1} = il\sqrt{2a}$$

$$\begin{matrix} il\sqrt{y_2} \\ il\sqrt{y_3} \end{matrix} = il\sqrt{(G \pm a)Hi} = C' \pm D'i$$

(38) 式に代入すると

$$2aH\cos(l\sqrt{2a}) - 2aH(\cosh C')(\cos D') + (G^2-4aG+3a^2+H^2)(\sinh C')(\sin D') = 0 \tag{53}$$

諸元 No. 1, $T_s=600$ kg, $v=55$ m/s について $C=146$,

$\sinh C=(1/2)(e^C-e^{-C})$, $\cosh C=(1/2)(e^C+e^{-C})$, $e^C=e^{146}$ は 10^{63} のオーダであり，$e^{-C}\fallingdotseq 0$。

したがって $\sinh C \fallingdotseq \cosh C$,

$C \fallingdotseq C'$ より $\sinh C' \fallingdotseq \cosh C'$

$$aH \fallingdotseq -4\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^{-5/2}\frac{v^2\beta^3}{p_1^4 q} \quad \text{より} \quad |aH|<1$$

$2aH\cos(l\sqrt{2a})/\sinh C' \fallingdotseq 0$ から

$$2aH\cos D' = (G^2-4aG+3a^2+H^2)\sin D'$$

$$\tan D' = \frac{2aH}{G^2-4aG+3a^3+H^2} \tag{54}$$

$$\frac{2aH}{G^2-4aG+3a^2+H^2} \fallingdotseq 8\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^{-9/2}\frac{v^2\beta^3 q^3}{p_1^8}$$

この値は v が大であれば大となるが，$v=55$ m/s, 諸元 No. 1, $T_s=600$ kg で $1.7\times10^{-5}\fallingdotseq 0$ となる。

$\tan D'=0 \qquad D'=n\pi$ である。

D' は $il\sqrt{y_2}$ の虚数部分であり

$$D' \fallingdotseq -l(a-G)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{H}{2(a-G)} - \frac{H^3}{16(a-G)^3}\right\}$$

$$\fallingdotseq \left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^{-1}\left\{1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^{-3}\frac{\beta^2 q^2}{p_1^4}\right\}\frac{\beta l}{p_1}$$

したがって振動数は

$$\beta = \frac{n\pi p_1\left\{1-(v^2/p_1^2)\right\}}{l\left[1-(\beta^2 q^2/2p_1^4)\left\{1-(v^2/p_1^2)\right\}^{-3}\right]} \text{ (rad/s)} \tag{55}$$

$$f = \frac{n\sqrt{Tg/\gamma A}\left\{1-(\gamma A v^2/Tg)\right\}}{2l\left[1-(2\pi^2 f^2 B_1 \gamma A/T^2 g)\left\{1-(\gamma A v^2/Tg)\right\}^{-3}\right]} \text{ (c/s)} \tag{56}$$

3.3 (27) 式中 $P_1=0$, $M_1=0$, xz 面内両端固定の場合

xz 面において両端固定の境界条件, $\xi=0$, $\xi=l$: $w=0$, $\partial w/\partial\xi=0$ を (33) 式に代入し, あらゆる t について成立し, C_1〜C_4 が同時に 0 にならないとして次の行列式が得られる。

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ e^{i\alpha_1 l} & e^{i\alpha_2 l} & e^{i\alpha_3 l} & e^{i\alpha_4 l} \\ \alpha_1 e^{i\alpha_1 l} & \alpha_2 e^{i\alpha_2 l} & \alpha_3 e^{i\alpha_3 l} & \alpha_4 e^{i\alpha_4 l} \end{vmatrix}=0 \tag{57}$$

これを展開して

$$\begin{aligned}\Delta=&(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)\left\{e^{i(\alpha_1+\alpha_2)l}+e^{i(\alpha_3+\alpha_4)l}\right\}+\\&(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)\left\{e^{i(\alpha_1+\alpha_3)l}+e^{i(\alpha_2+\alpha_4)l}\right\}+\\&(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_1)\left\{e^{i(\alpha_1+\alpha_4)l}+e^{i(\alpha_2+\alpha_3)l}\right\}=0\end{aligned} \tag{58}$$

(38) 式のように α_1〜α_4 を y_1〜y_4 に書きかえると (58) 式は

$$\begin{aligned}&(y_3-y_2)\left\{e^{il\sqrt{y_1}}+e^{-il\sqrt{y_1}}\right\}+(y_1-y_3)\left\{e^{il\sqrt{y_2}}+e^{-il\sqrt{y_2}}\right\}\\&+(y_2-y_1)\left\{e^{il\sqrt{y_3}}+e^{-il\sqrt{y_3}}\right\}=0\end{aligned} \tag{59}$$

または

$$(y_3-y_2)\cos(l\sqrt{y_1})+(y_1-y_3)\cos(l\sqrt{y_2})+(y_2-y_1)\cos(l\sqrt{y_3})=0 \tag{60}$$

3.3.1 $v=0$ (静止) の近似計算式

(58) 式に直接 α_1〜α_4 を代入し解くと

$$(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)=-4\beta\, i/q$$
$$(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)=(p_1^2/q^2)+(2\beta\, i/q)$$
$$(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_1)=-(p_1^2/q^2)+(2\beta\, i/q)$$

$\alpha'_{3,4}=i\alpha_{3,4}$, とおき

$$\begin{aligned}\Delta=&-(p_1^2/q^2)\left\{e^{(i\alpha_1 l+\alpha'_3 l)}+e^{(-i\alpha_1 l-\alpha'_3 l)}-e^{(i\alpha_1 l-\alpha'_3 l)}-e^{(-i\alpha_1 l+\alpha'_3 l)}\right\}\\&+(2\beta i/q)\left\{e^{(i\alpha_1 l+\alpha'_3 l)}+e^{(-i\alpha_1 l-\alpha'_3 l)}+e^{(-i\alpha_1 l-\alpha'_3 l)}+e^{(-i\alpha_1 l+\alpha'_3 l)}-4\right\}=0\end{aligned}$$

これより

$$-(p_1^2 i/q^2)(\sin\alpha_1 l)(\sinh\alpha'_3 l)+(2\beta\, i/q)\left\{(\cos\alpha_1 l)(\cosh\alpha'_3 l)-1\right\}=0 \tag{61}$$

ここで, $\alpha_1 l\fallingdotseq(\beta l/p_1)-(q^2\beta^3 l/2p_1^5)$, 諸元 No. 1, $T_s=600$ kg について計算する。

$$\alpha_1 l\fallingdotseq 1.01\, n\pi,\qquad |\cos\alpha_1 l|\fallingdotseq 1.0$$
$$\alpha'_3 l\fallingdotseq 146,\qquad \sinh 146\fallingdotseq\cosh 146\fallingdotseq\frac{1}{2}e^{146}$$

e^{146} は 10^{63} のオーダで $|(\cos\alpha_1 l)(\cosh\alpha'_3 l)|\gg 1$.

したがって，(61) 式は

$$-(p_1^2/q^2)\sin\alpha_1 l+(2\beta/q)\cos\alpha_1 l \fallingdotseq 0$$

さらに

$$\alpha_1 \fallingdotseq (\beta/p_1)-(q^2\beta^3/2p_1^5),\quad \tan^{-1}(2\beta q/p_1^2)\fallingdotseq(2\beta q/p_1^2)-(8\beta^3q^3/3p_1^6)$$

とおけるので

$$\alpha_1 l \fallingdotseq (\beta l/p)-(q^2\beta^3 l/2p_1^5)\fallingdotseq n\pi+\tan^{-1}(2\beta q/p_1^2)\fallingdotseq n\pi+(2\beta q/p_1^2)-(8\beta^3q^3/3p_1^6)$$

$$\beta=\frac{n\pi p_1}{l\left\{1-(2q/p_1 l)-(\beta^2q^2/2p_1^4)+(8\beta^2q^3/3p_1^5 l)\right\}}\ (\mathrm{rad/s}) \tag{62}$$

$$f=\frac{n\sqrt{Tg/\gamma A}}{2l\left\{1-(2/l)\sqrt{B_1/T}-(2\pi^2f^2B_1\gamma A/T^2g)+(32\pi^2f^2B_1^{3/2}\gamma A/3T^{5/2}gl)\right\}}\ (\mathrm{c/s}) \tag{63}$$

$\tan^{-1}(2\beta q/p_1^2)\fallingdotseq 2\beta q/p_1^2$ とおくと

$$\beta=\frac{n\pi p_1}{l\left\{1-(2q/p_1 l)-(\beta^2q^2/2p_1^4)\right\}}\ (\mathrm{rad/s}) \tag{64}$$

3.3.2 運転時近似計算式 III

3.2.3 の近似計算 I と同様に，$y_{1,2,3}$，$il\sqrt{y_{2,3}}$　C，D をおき，(59) 式から

$$\frac{2\beta q}{p_1^2}\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^{-3/2}\left\{1-(\cosh C)(\cos D)\right\}+(\sinh C)(\sin D)=0$$

$\cosh C \fallingdotseq \sinh C$ から

$$\sin(D-\bar{D})=\frac{-2\beta q}{p_1^2}\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^{-3/2}\left\{(\sinh C)\sqrt{\frac{4\beta^2q^2}{p_1^4}\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^{-3}+1}\right\}^{-1} \tag{65}$$

ただし　$\tan\bar{D}=\dfrac{2\beta q}{p_1^2}\left(1-\dfrac{v^2}{p_1^2}\right)^{-3/2}$

(65) 式の右辺を近似的に 0 とおくと

$$\sin(D-\bar{D})=0,\qquad D=n\pi+\bar{D}$$

$$\tan^{-1}\frac{2\beta q}{p_1^2}\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^{-3/2}\fallingdotseq\frac{2\beta q}{p_1^2}\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^{-3/2}-\frac{3}{8}\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^{-9/2}\frac{\beta^3q^3}{p_1^6}$$

$$\beta=\frac{n\pi p_1\left\{1-(v^2/p_1^2)\right\}}{l\left[1-(2q/p_1 l)\left\{1-(v^2/p_1^2)\right\}^{-1/2}+(8\beta^2q^3/3p_1^5 l)\left\{1-(v^2/p_1^2)\right\}^{-7/2}\right]}\ (\mathrm{rad/s}) \tag{66}$$

$$f=\frac{n\sqrt{Tg/\gamma A}\left\{1-(\gamma A\,v^2/Tg)\right\}}{2l\left[1-(2/l)\sqrt{B_1/T}\left\{1-(\gamma Av^2/Tg)\right\}^{-1/2}+(32\pi^2f^2B_1^{3/2}\gamma A/3T^{5/2}gl)\left\{1-(\gamma A\,v^2/Tg)\right\}^{-7/2}\right]}\ (\mathrm{c/s}) \tag{67}$$

3.3.3 運転時近似計算式 IV

3.2.4 近似計算 II と同様に，$y_{1,2,3}$，$il\sqrt{y_{1,2,3}}$，a，G，H，C'，D'，をおき，(59) 式から

$$-H\cos(l\sqrt{2a})+(3a-G)(\sinh C')(\sin D')+H(\cosh C')(\cos D')=0 \tag{68}$$

$\cosh C'\fallingdotseq\sinh C'$，　$H\cos(l\sqrt{2a})/\sinh C'\fallingdotseq 0$　から

$$(3a-G)\sin D'=-H\cos D'$$

$$\tan D'=\frac{H}{G-3a}$$　　となる。

$$\frac{H}{G-3a}\fallingdotseq 2\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^{-3/2}\frac{\beta q}{p_1^2}$$

$$D'=n\pi+\tan^{-1}\left\{2\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^{-3/2}\frac{\beta q}{p_1^2}\right\}$$

$$D'\fallingdotseq\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^{-1}\left\{1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^{-3}\frac{\beta^2q^2}{p_1^4}\right\}\frac{\beta l}{p_1}\fallingdotseq n\pi+2\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^{-3/2}\frac{\beta q}{p_1^2}$$
$$-\frac{8}{3}\left(1-\frac{v^2}{p_1^2}\right)^{-9/2}\frac{\beta^3q^3}{p_1^6}$$

$$\beta=\frac{n\pi p_1\left\{1-(v^2/p_1^2)\right\}}{l\left[1-(2q/p_1l)\left\{1-(v^2/p_1^2)\right\}^{-1/2}-(\beta^2q^2/2p_1^4)\left\{1-(v^2/p_1^2)\right\}^{-3}+(8\beta^2q^3/3p_1^5l)\left\{1-(v^2/p_1^2)\right\}^{-7/2}\right]}\ \text{(rad/s)} \tag{69}$$

$$f=\frac{n\sqrt{Tg/\gamma A}\left\{1-(\gamma A\,v^2/Tg)\right\}}{2l\left[1-(2/l)\sqrt{B_1/T}\left\{1-(\gamma A\,v^2/Tg)\right\}^{-1/2}-(2\pi^2f^2B_1\gamma A/T^2g)\left\{1-(\gamma A\,v^2/Tg)\right\}^{-3}\right.}_{\left.*\ +(32\pi^2f^2B_1^{3/2}\gamma A/3T^{5/2}gl)\left\{1-(\gamma A\,v^2/Tg)\right\}^{-7/2}\right]}\ \text{(c/s)} \tag{70}$$

3.4 (28) 式中 $P_1=0$，$M_1=0$ の場合

$$C'\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}-\frac{\gamma I_p}{g}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-2v\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial\xi}+v^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\right)=0 \tag{71}$$

これは，次のようにして求めたねじり振動の方程式と一致する。

$$C'\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\gamma I_p}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

これを不動座標 ξ について表わせば，(26) 式の関係から (71) 式になる。

$a_1^2=C'g/\gamma I_p$ とおけば

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-2v\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial\xi}+v^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}-a_1^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}=0 \tag{72}$$

この解として　$\varphi(\xi,\ t)=e^{i\alpha\xi}e^{i\beta t}$

ただし　　α，β＝定　数

$$-\beta^2+2v\,\alpha\beta-v^2\alpha^2+a_1^2\,\alpha^2=0$$

$$\alpha=\frac{-v\beta\pm\sqrt{v^2\beta^2+(a_1^2-v^2)\,\beta^2}}{a_1^2-v^2}=\frac{-v\beta\pm a_1\beta}{v_1^2-a^2}$$

(72) 式の解を

$$\varphi(\xi,\ t)=\left[C_1e^{i\alpha_1\xi}+C_2e^{i\alpha_2\xi}\right]e^{i\beta t},$$

$\xi=0,\quad \xi=l:\quad \varphi=0$ とおくと

$$C_1+C_2=0\qquad C_1e^{i\alpha_1 l}+C_2e^{i\alpha_2 l}=0$$

これより $\quad \sin\left\{(1/2)\,(\alpha_1-\alpha_2)\,l\right\}=0$

$$\beta=(n\pi\,a_1/l)\left\{1-(v^2/a_1^2)\right\}\ (\mathrm{rad/s}) \tag{73}$$

$$f=(n/2l)\sqrt{C'g/\gamma I_p}\left\{1-(\gamma I_p v^2/C'g)\right\}\ (\mathrm{c/s}) \tag{74}$$

3.4.1 $v=0$（静止）のエネルギ法計算式

(73), (74) 式において $v=0$ とおくと

$$\beta=n\pi\,a_1/l\ (\mathrm{rad/s}) \tag{75}$$

$$f=(n/2l)\sqrt{C'g/\gamma I_p}$$

$$=(n/2l)\sqrt{(g/\gamma I_p)\left[GJ+(1/12)\,Th^2\left\{1+(b^2/h^2)\right\}+(1/180)\,c_1Ebh^5\right]}\ (\mathrm{c/s}) \tag{76}$$

一方，エネルギ法により静止時におけるねじり振動数計算式を求める[11]。

ねじりのポテンシャルエネルギ U_1 は

$$U_1=\frac{1}{2}\int_0^l GJ\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2dx$$

緊張力および腰入れにもとづくポテンシャルエネルギ U_2 は

x 方向の伸びを e，応力を σ とすると

$$U_2=\int_{-h/2}^{h/2}b\sigma e\,dy\qquad e\fallingdotseq\int_0^l\frac{1}{2}\,y^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2dx$$

から

$$U_2\fallingdotseq\frac{b}{2}\iint_s\sigma y^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2dx\,dy\qquad s\begin{pmatrix}x=0\sim l\\ y=-h/2\sim h/2\end{pmatrix}$$

運動のエネルギ U_κ は

$$U_\kappa=\frac{1}{2}\int_0^l\frac{\gamma I_p}{g}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2dx$$

$\varphi=\theta\sin\beta t$ とおく。　ただし　θ は振動の形を定める位置の函数。

最大ポテンシャルエネルギ $(U_{1\max}+U_{2\max})$ が最大運動エネルギ $U_{\kappa\max}$ に等しいとおき，円振動数 β，振動数 f の計算式を求める。

σ として (21) 式を用いると

$$U_{1\max} = \frac{1}{2}\int_0^l GJ\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 dx$$

$$U_{2\max} = \frac{b}{2}\iint_s \left\{\frac{T}{bh}+c_1E\left(y^2-\frac{1}{12}h^2\right)+c_2Ey\right\} y^2\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 dx\,dy$$

$$U_{\kappa\max} = \frac{1}{2}\beta^2\int_0^l \frac{\gamma I_p}{g}\theta^2\,dx$$

したがって　$U_{1\max}+U_{2\max} = U_{\kappa\max}$　より

$$\beta^2 = \frac{2g}{\gamma I_p}\cdot\frac{U_{1\max}+U_{2\max}}{\int_0^l \theta^2\,dx} \tag{77}$$

θ_1=定数とし，$\theta=\theta_1\sin(n\pi x/l)$ とおくと

$$\beta^2 = (g/\gamma I_p)\left[(n\pi/l)^2GJ+(n\pi/l)^2\left\{(1/12)\,Th^2+(1/180)\,c_1Eb\,h^5\right\}\right]$$

$$\beta = (n\pi/l)\sqrt{(g/\gamma I_p)\left\{GJ+(1/12)\,Th^2+(1/180)\,c_1Eb\,h^5\right\}}\ \text{(rad/s)} \tag{78}$$

$$f = (n/2l)\sqrt{(g/\gamma I_p)\left\{GJ+(1/12)\,Th^2+(1/180)\,c_1Eb\,h^5\right\}}\ \text{(c/s)} \tag{79}$$

または

$$f = \frac{n}{l}\sqrt{\frac{Gg}{\gamma}\left\{\frac{1-0.63\,(b/h)}{1+(h^2/b^2)}\right\}\left[1+\frac{Th}{4Gb^3\left\{1-0.63\,(b/h)\right\}}+\frac{c_1Eh^4}{60Gb^2\left\{1-0.63\,(b/h)\right\}}\right]}\text{(c/s)} \tag{80}$$

3.5　(27) 式中 $B_1=0$, $P_1=0$, (28) 式中 $P_1=0$ の場合

製材用帯鋸では $B_1=EI=0$ としても誤差が少ないと考え，(27) 式の B_1 の項を無視し，さらに，(27), (28) 式中 $P_1=0$ とおいた場合について解く。

$$p_1^2 = Tg/\gamma A,\quad p_3^2 = M_1g/\gamma A,\quad a_1^2 = C'g/\gamma I_p,\quad a_3^2 = M_1g/\gamma I_p$$

とおくと

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-2v\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial\xi}+v^2\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}-p_1^2\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} = p_3^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} \tag{81}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-2v\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial\xi}+v^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}-a_1^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} = a_3^2\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} \tag{82}$$

これらの解として

$$w(\xi,\ t) = C_1e^{i\alpha\xi}e^{i\beta t}$$

$$\varphi(\xi,\ t) = C_2e^{im\xi}e^{i\beta t}$$

ただし　C_1, C_2, α, β, m は定数

これらを (81), (82) 式に代入し

$$C_1(-\beta^2+2v\,\alpha\beta-v^2\alpha^2+p_1^2\alpha)\,e^{i\alpha\xi}e^{i\beta t} = C_2(-p_3^2m^2)\,e^{im\xi}e^{i\beta t} \tag{83}$$

$$C_2(-\beta^2+2v m\beta-v^2m^2+a_1^2m^2)\,e^{i m\xi}\,e^{i\beta t}=C_1(-a_3^2\alpha^2)\,e^{i\alpha\xi}\,e^{i\beta t} \tag{84}$$

一方，根を α_1，α_2，m_1，m_2 とし，C_3〜C_6 を定数とすると，解は

$$w(\xi,\ t)=\left[C_3e^{i\alpha_1\xi}+C_4e^{i\alpha_2\xi}\right]e^{i\beta t}$$

$$\varphi(\xi,\ t)=\left[C_5e^{im_1\xi}+C_6e^{im_2\xi}\right]e^{i\beta t}$$

境界条件

$\xi=0,\quad \xi=l:\quad w=0\quad \varphi=0$　とおくと

$$C_3+C_4=0\qquad C_5+C_6=0$$

$$C_3e^{i\alpha_1 l}+C_4e^{i\alpha_2 l}=C_3(e^{i\alpha_1 l}-e^{i\alpha_2 l})=0$$

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_1-\alpha_2=2n\pi/l\\ &\text{同様に}\quad m_1-m_2=2n'\pi/l\end{aligned}\right\} \tag{85}$$

3.5.1　$v=0$（静止）の厳密解

(83)，(84) 式において $v=0$ とおくと

$$C_1(-\beta^2+p_1^2\alpha^2)\,e^{i\alpha\xi}\,e^{i\beta t}=C_2(-p_3^2m^2)\,e^{im\xi}\,e^{i\beta t}$$

$$C_2(-\beta^2+a_1^2m^2)\,e^{im\xi}\,e^{i\beta t}=C_1(-a_3^2\alpha^2)\,e^{i\alpha\xi}\,e^{i\beta t}$$

$$\beta^4-\beta^2a_1^2m^2-\beta^2p_1^2\alpha^2+p_1^2\alpha^2a_1^2m^2-p_3^2m^2a_3^2\alpha^2=0$$

$$\beta^4-\beta^2\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}\,p_1^2+\frac{n'^2\pi^2}{l^2}\,a_1^2\right)+\frac{n^2n'^2\pi^4}{l^4}\,p_1^2a_1^2-\frac{n^2n'^2\pi^4}{l^4}\,p_3^2a_3^2=0$$

$$\beta^2=(\pi^2/2l^2)\left\{(n^2p_1^2+n'^2a_1^2)\pm\sqrt{(n^2p_1^2-n'^2a_1^2)^2+4n^2n'^2p_3^2a_3^2}\right\} \tag{86}$$

これより β，f の厳密解を求めることができる。

3.5.2　運転時近似計算式

(83)，(84) 式より

$$\frac{C_1}{C_2}=\frac{-p_3^2m^2e^{im\xi}}{(-\beta^2+2v\,\alpha\beta-v^2\alpha^2+p_1^2\alpha^2)\,e^{i\alpha\xi}}=\frac{(-\beta^2+2v\,m\beta-v^2m^2+a_1^2m^2)\,e^{im\xi}}{-a_3^2\alpha^2e^{i\alpha\xi}}$$

$$\begin{aligned}&(v^2\beta^2-p_1^2\beta^2-2v^3m\beta+2p_1^2vm\,\beta+v^4m^2-p_1^2v^2m^2+p_1^2a_1^2m^2-p_3^2a_3^2m^2\\ &-a_1^2v^2m^2)\,\alpha^2+(-2v\,\beta^3+4v^2m\beta^2-2v^3m^2\beta+2a_1^2vm^2\beta)\,\alpha\\ &+(\beta^4-2v\,m\beta^3+v^2m^2\beta^2-a_1^2m^2\beta^2)=0\end{aligned}$$

m の次数で整理し，次のようにおくと，(87) 式が得られる。

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=(4p_1^2a_1^4-4p_3^2a_1^2a_3^2-8p_1^2a_1^2v^2+4p_1^2v^4+4p_3^2a_3^2v^2)\,\beta^2\\ \mathrm{B}&=(16p_1^2a_1^2v-8p_3^2a_3^2v-16p_1^2v^3)\,\beta^3\\ \mathrm{C}&=(-8p_1^2a_1^2+4p_3^2a_3^2+24p_1^2v^2)\,\beta^4\\ \mathrm{D}&=-16p_1^2v\,\beta^5\\ \mathrm{E}&=4p_1^2\beta^6\\ \mathrm{F}&=p_1^2a_1^2-p_3^2a_3^2-(p_1^2+a_1^2)\,v^2+v^4\end{aligned}$$

$$G = (2p_1^2v - 2v^3)\beta$$
$$H = (-p_1^2 + v^2)\beta^2$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\sqrt{Am^4+Bm^3+Cm^2+Dm+E}}{Fm^2+Gm+H} = \frac{2n\pi}{l} \tag{87}$$

ここで，近似計算をするため諸元 No. 1 について数値を算出して検討する。

$v=55$ m/s，$c_1=3.7\times10^{-5}$ 1/cm^2 に対し，第 4 表のようになる。

第 4 表

T_s kg	600		800	
A の項	M_1 cm-kg			
	100	500	100	500
1	3.00×10^{25}	3.00×10^{25}	5.14×10^{25}	5.14×10^{25}
2	6.39×10^{22}	1.60×10^{24}	7.44×10^{22}	1.86×10^{24}
3	7.93×10^{24}	7.93×10^{24}	1.17×10^{25}	1.17×10^{25}
4	5.25×10^{23}	5.25×10^{23}	6.63×10^{23}	6.63×10^{23}
5	8.46×10^{21}	2.11×10^{23}	8.46×10^{21}	2.11×10^{23}

したがって，A の第 4，5 項を省略し

$$a = \sqrt{A} \fallingdotseq 2p_1a_1^2\beta\sqrt{1-(p_3^2a_3^2/p_1^2a_1^2)-(2v^2/a_1^2)}$$ とおく。

諸元 No. 1，$v=55$ m/s，$M_1=500$ cm-kg とし，$T_s=600$，800 kg で根号内第 2，3 項の和は 0.318，0.264。

$$a \fallingdotseq \left\{2p_1a_1^2-(p_3^2a_3^2/p_1)-2p_1v^2\right\}\beta$$

$$c = -\sqrt{E} = -2p_1\beta^3, \quad b = D/2c = 4p_1v\beta^2$$

とおけば，近似的に

$$Am^4+Bm^3+Cm^2+Dm+E = (am^2+bm+c)^2$$

(87) 式は

$$\frac{am^2+bm+c}{Fm^2+Gm+H} = \frac{2n\pi}{l} \tag{88}$$

$$\left\{b-(2n\pi G/l)\right\}^2-4\left\{a-2n\pi F/l\right\}\left\{c-2n\pi H/l\right\}$$
$$= (4n'^2\pi^2/l^2)\left\{a^2-(4n\pi Fa/l)+(4n^2\pi^2F^2/l^2)\right\} \tag{89}$$

(89) 式を β の次数で整理すると，

$$8(2p_1^2a_1^2-p_3^2a_3^2)\beta^4+(8n\pi/l)\left[3p_1p_3^2a_3^2-4p_1^3a_1^2-\left\{(p_3^2a_3^2/p_1)-4p_1a_1^2\right\}v^2\right]\beta^3$$
$$+\left[(16n^2\pi^2/l^2)\left\{p_1^4a_1^2-p_1^2p_3^2a_3^2-(2p_1^2a_1^2-p_3^2a_3^2)v^2+a_1^2v^4\right\}\right.$$
$$\left.-(4n'^2\pi^2/l^2)\left\{4p_1^2a_1^4-4p_3^2a_1^2a_3^2+(p_3^4a_3^4/p_1^2)-(8p_1^2a_1^2-4p_3^2a_3^2)v^2+4p_1^2v^4\right\}\right]\beta^2 \quad *$$

$$
\begin{aligned}
&+(16n\,n'^2\pi^3/l^3)\left[2p_1^3a_1^4-3p_1p_3^2a_1^2a_3^2+(p_3^4a_3^4/p_1)\right.\\
&\left.-\left\{4p_1^3a_1^2+2p_1a_1^4-3p_1p_3^2a_3^2-(p_3^3a_1^2a_3^2/p_1)\right\}v^2+\left\{4p_1a_1^2+2p_1^3-(p_3^2a_3^2/p_1)\right\}v^4-2p_1v^6\right]\beta\\
&+(16n^2n'^2\pi^4/l^4)\left\{-(p_1^2a_1^2-p_3^2a_3^2)^2+(2p_1^4a_1^2+2p_1^2a_1^4-2p_1^2p_3^2a_3^2-2p_3^2a_1^2a_3^2)\,v^2\right.\\
&\left.-(p_1^4+a_1^4+4p_1^2a_1^2-2p_3^2a_3^2)\,v^4+(2p_1^2+2a_1^2)\,v^6-v^8\right\}=0 \qquad (90)
\end{aligned}
$$

ここで $a=\sqrt{A}$ として，A の第4，5項も含めた場合にも $Am^4+Bm^3+Cm^2+Dm+E\fallingdotseq(am^2+bm+c)^2$ であるとして計算すると

$$
\begin{aligned}
&16p_1\left(p_1v^2+\sqrt{p_1^2a_1^4-p_3^2a_1^2a_3^2-2p_1^2a_1^2v^2+p_1^2v^4+p_3^2a_3^2v^2}\right)\beta^4\\
&-(16n\,\pi/l)\left\{(p_1^2-v^2)\sqrt{p_1^2a_1^4-p_3^2a_1^2a_3^2-2p_1^2a_1^2v^2+p_1^2v^4+p_3^2a_3^2v^2}\right.\\
&\left.+p_1\left(p_1^2a_1^2-p_3^2a_3^2-p_1^2v^2-a_1^2v^2+v^4\right)+2p_1v^2\left(p_1^2-v^2\right)\right\}\beta^3\\
&+\left[(16n^2\pi^2/l^2)\left\{v^2\left(p_1^2-v^2\right)^2+\left(p_1^2-v^2\right)\left(p_1^2a_1^2-p_3^2a_3^2-p_1^2v^2-a_1^2v^2+v^4\right)\right\}\right.\\
&\left.-(16n'^2\pi^2/l^2)\left(p_1^2a_1^4-p_3^2a_1^2a_3^2-2p_1^2a_1^2v^2+p_1^2v^4+p_3^2a_3^2v^2\right)\right]\beta^2\\
&+(32n\,n'^2\pi^3/l^3)\left\{\left(p_1^2a_1^2-p_3^2a_3^2-p_1^2v^2-a_1^2v^2+v^4\right)\sqrt{p_1^2a_1^4-p_3^2a_1^2a_3^2-2p_1^2a_1^2v^2+p_1^2v^4+p_3^2a_3^2v^2}\right\}\beta\\
&-(16n^2n'^2\pi^4/l^4)\left(p_1^2a_1^2-p_3^2a_3^2-p_1^2v^2-a_1^2v^2+v^4\right)^2=0 \qquad (91)
\end{aligned}
$$

(90) 式，または (91) 式の p_1，p_3，a_1，a_3，v，l，n，n' に数値を与えれば，円振動数 β を求めることができる。

3.6　計算式の検討と計算結果

(46) 式，(51) 式は一致するが，これらの式で $v=0$ とおくと

$f=(n/2l)\sqrt{Tg/\gamma A}$ となり，(42) 式の根号内 $\left\{1+(l/n\pi)^2(T/B_1)\right\}$ の1を省略したものと同一の式になる。諸元 No. 1，$n=1$ について $T_s=400$，600，800 kg における (46)，(51) 式と，(42) 式の厳密解による f の差を計算するとそれぞれ 3.50×10^{-4}，2.33×10^{-4}，1.75×10^{-4} となり前者がわずか少ない。

(55) 式において β の近似値として (45) 式を用い，$v=0$ の場合について書きなおすと

$$
\beta=n\pi\,p_1\Big/\left[\,l\left\{1-(\beta^2q^2/2p_1^4)\right\}\right],\quad \beta^2q^2/2p_1^4\ll1 \quad \text{とすると}
$$

$$
\beta\fallingdotseq(n\pi\,p_1/l)\left\{1+(\beta^2q^2/2p_1^4)\right\}=(n\pi/l)\sqrt{Tg/\gamma A}\left\{1+(1/2)\,(n\pi/l)^2(B_1/T)\right\}
$$

一方，(41) 式（厳密解）は次のように表わされる。

$$
\beta=(n\pi/l)\sqrt{(Tg/\gamma A)\left\{1+(n\pi/l)^2(B_1/T)\right\}}
$$

両者は略々等しい結果を示し，諸元 No. 1，$n=1$，$T_s=400$，600，800 kg において，誤差はそれぞれ 6.2×10^{-8}，2.8×10^{-8}，1.6×10^{-8} の程度で，きわめて微小である。

(69) 式において $v=0$ とおくと，(62) 式と一致する。

また，(69) 式中分母の $(\beta^2q^2/2p_1^4)\left\{1-(v^2/p_1^2)\right\}^{-3}$ の項を省略すると (66) 式と同一になる。

$\tan^{-1}(2\beta q/p_1^2)\fallingdotseq(2\beta q/p_1^2)$ とおくと (62) 式は (64) 式になり，(62) 式の分母の $8\beta^2q^3/3p_1^5l$ を省略したことになるが，この値は諸元 No. 1，$n=1$，$T_s=600$ kg に対し，6.13×10^{-5} である。

$T_s=0$，$v=0$ の場合については次のようになる。

両端支持では，(41) 式より

$$\beta = (n^2\pi^2/l^2)\sqrt{B_1g/\gamma A}$$

両端固定では，(61) 式より

$$(2\beta i/q)\left\{(\cos\alpha_1 l)(\cosh\alpha_3' l)-1\right\} = 0$$

$$(\cos\alpha_1 l)(\cosh\alpha_3' l) = 1$$

$\alpha_1 = \alpha_3' = \sqrt{\beta/q}$ から，$\cos\left(l\sqrt{\beta/q}\right)\cosh\left(l\sqrt{\beta/q}\right)=1$

$$\beta = \lambda_n^2 q/l^2 = (\lambda_n^2/l^2)\sqrt{B_1g/\gamma A}$$

とおくと

$$\lambda_1 = 4.730, \quad \lambda_2 = 7.853, \quad \lambda_3 = 10.996$$

両者とも，緊張力の働かないはりの横円振動数の式に一致する。

この場合，1次で後者は前者の約 2.27 倍になる。しかし，帯鋸の諸元 No. 1，$T_s=400$～800 kg では 1～2% 後者が多い程度であるが，これは緊張力の影響が非常に大きく働き，両端支持と両端固定と仮定した場合における振動数の差が少なくなるからである。

ねじり振動数について，(76) 式と (79) 式は略々一致する。

(86) 式において，$M_1=0$ とすると

$$\beta = n\pi p_1/l \quad \text{または} \quad \beta=n'\pi a_1/l$$

となり，それぞれ，$B_1=0$，$v=0$ とおいた時の横円振動数とねじり円振動数と同一である。

(90) 式と (91) 式によって算出した値は略々一致する。両式において，$M_1=0$，$v=0$ とおくと，次式が得られる。

$$16p_1^2a_1^2\beta^4-(32n\pi/l)\,p_1^3a_1^2\beta^3+\left\{(16n^2\pi^2/l^2)\,p_1^4a_1^2-(16n'^2\pi^2/l^2)\,p_1^2a_1^4\right\}\beta^2$$
$$+(32n\,n'^2\pi^3/l^3)\,p_1^3a_1^4\beta-(16n^2n'^2\pi^4/l^4)\,p_1^4a_1^4 = 0 \qquad (92)$$

$\beta=n\pi p_1/l$，$\beta=n'\pi a/l$ をそれぞれ (92) 式に代入すると，ともに 0 となる。すなわち，これら β は (92) 式の根である。

(90)，(91) 式によって諸元 No. 1 の振動数を計算し，第 6 図～第 8 図に示す。両式による値は略々一致する。第 6 図は $T_s=400$～800 kg，$M_1=0$～500 cm-kg について v と f との関係を図示したもので，$M_1=0$ の計算値は (56)，(74) 式によって計算した値と略々等しく，同一線上に重なる。また，$M_1=100$ cm-kg の場合も近似しており，第 6 図 a と略々等しくなる。いずれも v の増加と共に f は減少する傾向にある。

第7図は $M_1=0$〜500 cm-kg，$v=0$〜55.0 m/s における T_s と f との関係を図示したもので，$v=0$ では (86) 式による計算値と略々一致する。いずれにおいても，T_s の増加にしたがい f は増加する。第8図には $v=0$〜55.0 m/s，$T_s=400$〜800 kg における M_1 と f との関係を示す。この場合は M_1 の増加により，f の高い方は増し，低い方は減少する傾向にある。

$M_1=0$（ここでは同時に $P_1=0$）では，高い方はねじり振動数に，低い方は横振動数に相当する。なお，(90)，(91) 式で $M_1=0$，$v=0$ に対する値は，(45)，(73) 式で $v=0$ とおいた値に一致する。

ただし，(56) 式においては，右辺分母の f^2 の項を無視して f の値を算出し，次に f^2 の項も含めて補正した値を用いた。

(90)，(91) 式においては，β の4根が求まり，絶対値の等しい2組の値か，それぞれ絶対値が近似している2組の値が算出される。

それぞれの値に若干差のある場合は，特殊な場合の厳密解より推定し妥当と考えられる方の値を用いた。

4. 実　　験

4.1 振動測定方法

帯鋸の振動測定は次の各種の方法によった[12),13)]。

(1) 帯鋸にストレンゲージをはり，振動時の歪の変化をストレンメータを介し，ビジグラフに記録させる。

(2) 小型ミラーを帯鋸につけ，光像の動きを光学的に記録させる。

(3) 非接触型 FM 容量偏位振動計のピックアップを帯鋸と対置させ，振動計，ビジグラフによって記録させる。

(4) 単一指向性マイクロホンを通じ，音響をテープレコーダに録音し，その後，セレクタ，によって周波数分析を行なう。

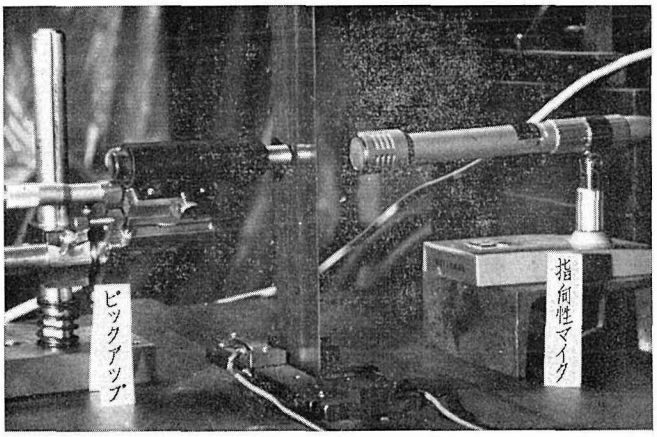


写真 1

(1), (2) で静止時は帯鋸自由部分上端附近と中央部を打って測定し，(3), (4) では，さらに運転時においても測定した。

写真1は (3), (4) の方法による実験を示す。

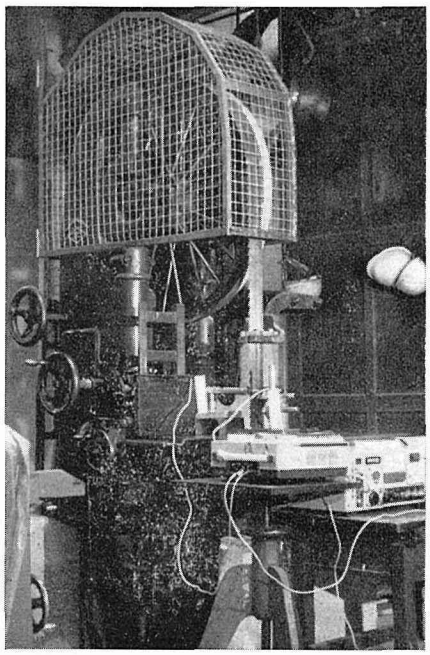


写真 2

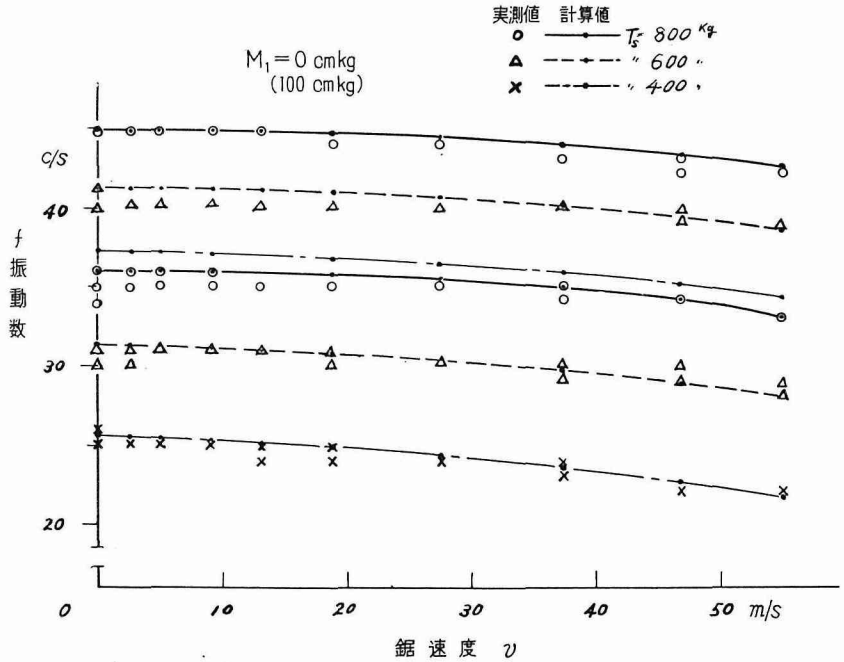
4.2 実験条件

帯鋸盤は写真2に示す鋸車直径 1050 mm の富士製作所製，帯鋸は，Test 1 は $l=188$ cm, $b=0.90$ mm, $h=127$ mm で腰入れしない無歯のもの，Test 2 は諸元 No. 1, 歯高 11 mm, ピッチ 35 mm のもので行なった。

なお，種々の鋸速度を与えるために，可変速モータを使用した。

Test 1 では緊張力 (緊張度) を 200 (1.75), 400 (3.50), 600 (5.25), 800 kg (7.00 kg/mm²) に変え，(1)〜(4) の方法によって $v=0$ の場合について振動数を測定，比較した。

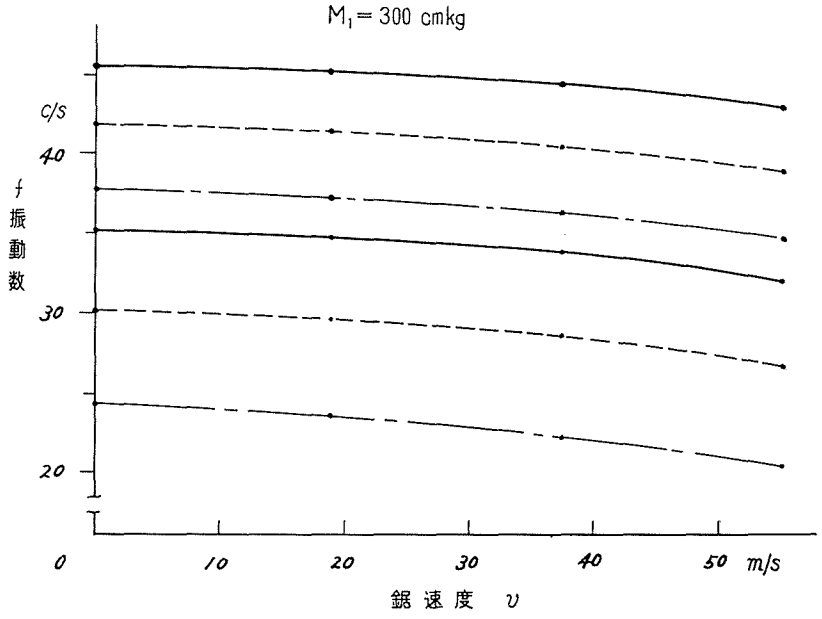
Test 2 では (3), (4) の方法によって振動数測定を行なった。静止時の緊張力 (緊張度) を 400 (6.04), 600 (9.06), 800 kg (12.1 kg/mm²), 鋸速度を 2.75, 4.95, 9.35, 13.2, 18.7, 27.5,



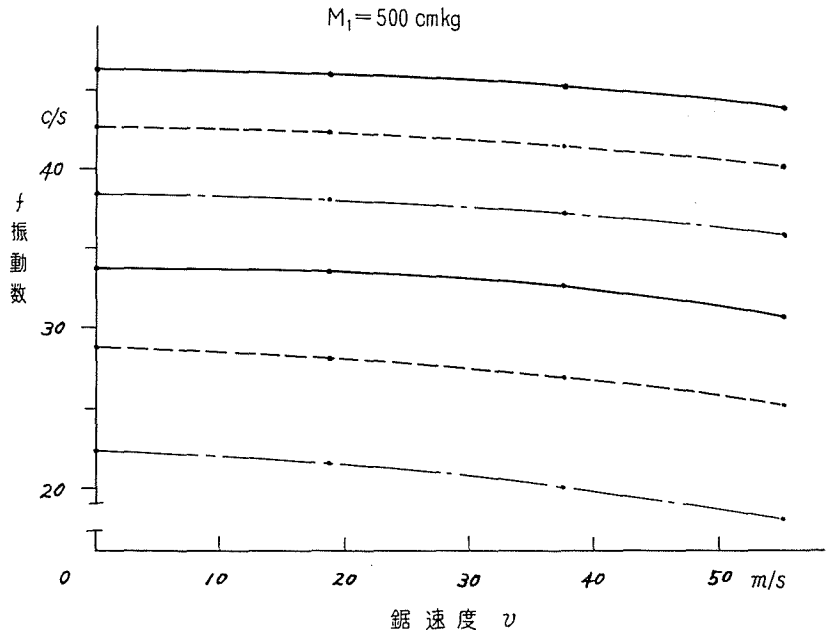
第6図 a

37.4, 46.7, 55.0 m/s とした。

なお，測定個所は，(1), (3) では歯側（歯底または前縁），腹部（中央），背側（背縁），(2) では腹部（中央）であり，(4) ではマイクを帯鋸中央より 10 cm 程度はなし，長さの略々 1/2 の位置においた。



第6図 b



第6図 c

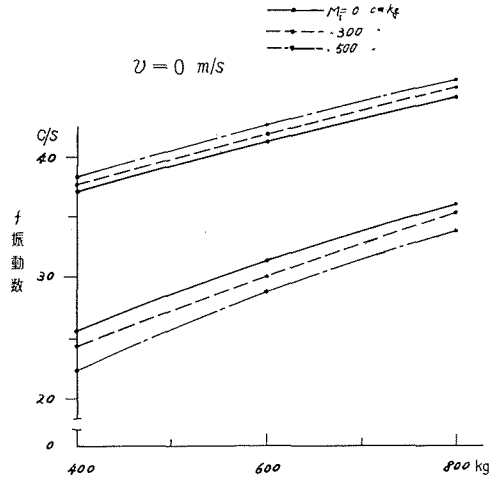
4.3 実験結果および考察

Test 1 の結果を第 9 図に示したが，(1)，(2)，(3) の方法とも近似した値が測定され，(42) 式による計算値と略々一致している。

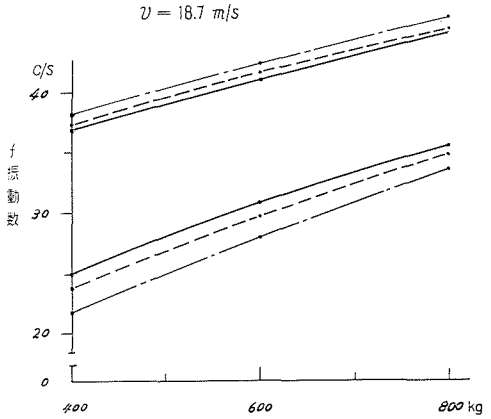
Test 1，2 ともに，(4) の方法による測定値もそれぞれ他の方法と近似しているが，ここで比較している範囲の値では，(1)～(3) の方法による方が，さらに安定した値を求められたので (1)～(3) を図に示す。

自由部分上端附近と中央部を打った場合，および測定個所による振動数の差は殆んど認められなかった。

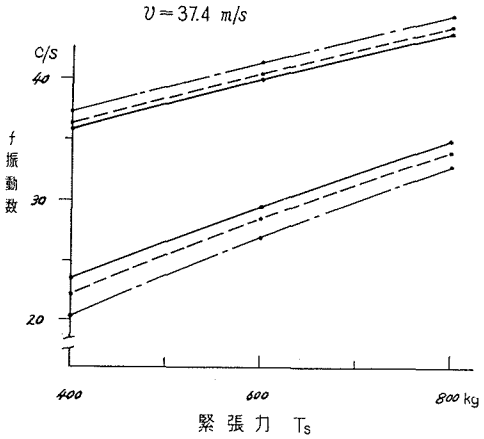
Test 2 の実験結果は第 6 図 a に示されているが，この条件に略々近いと考えられる同図の計算値と近似している。



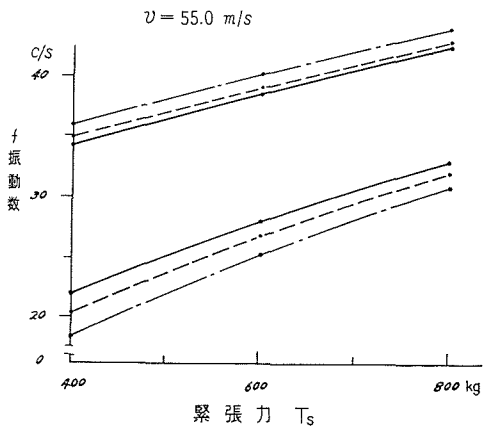
第7図 a



第7図 b

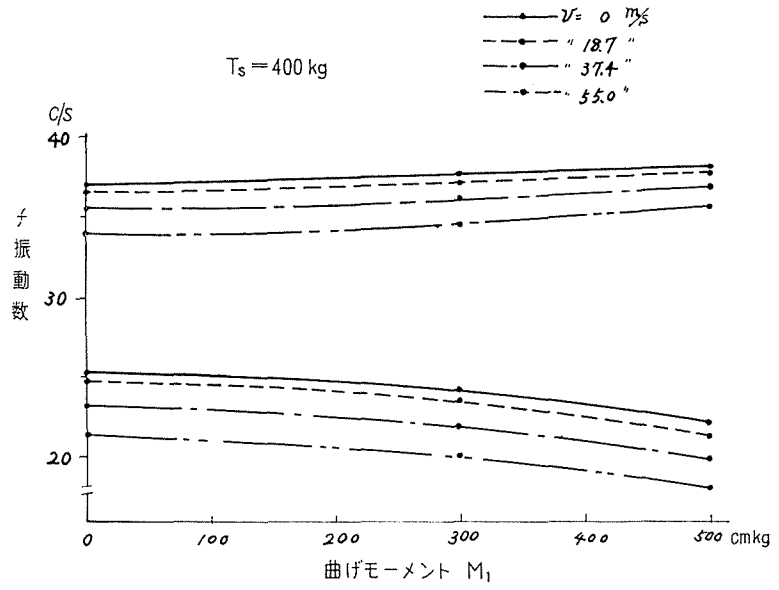


第7図 c

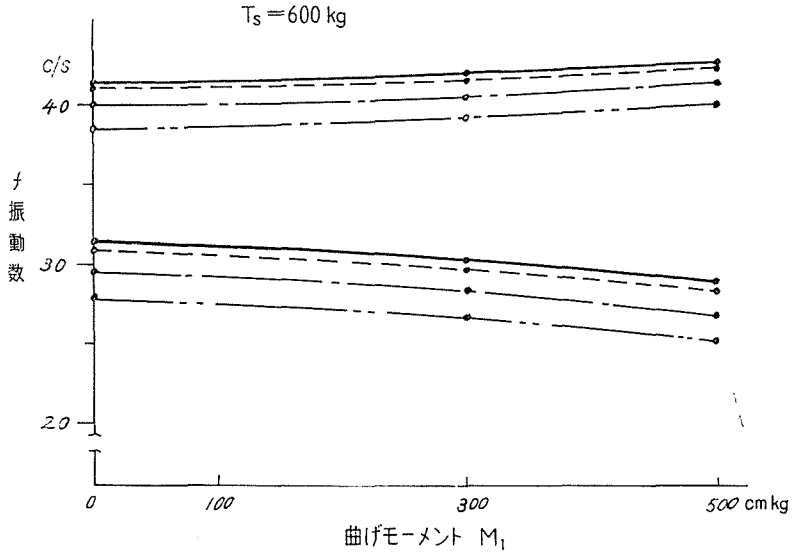


第7図 d

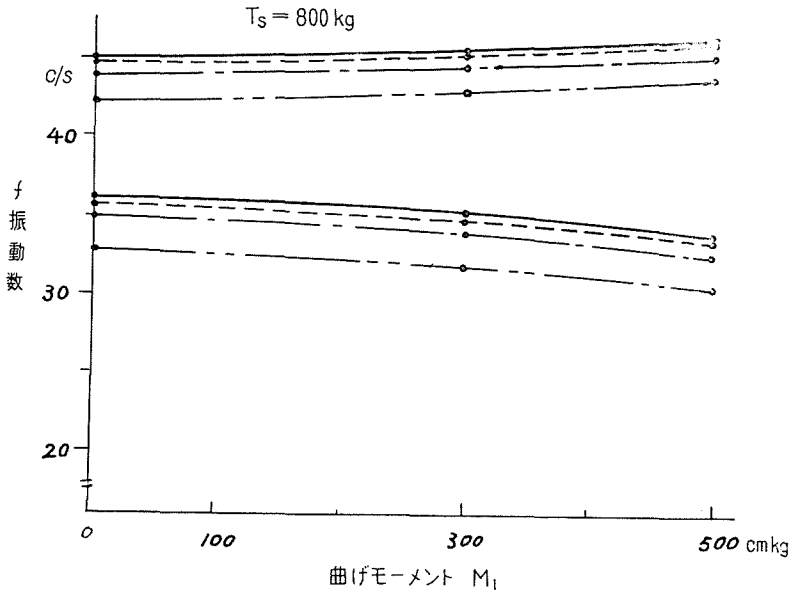
したがって，緊張力の増加に伴い振動数も増し，鋸速度の増加によって振動数の減少する傾向が，実測値でも計算値と同様に認められる。



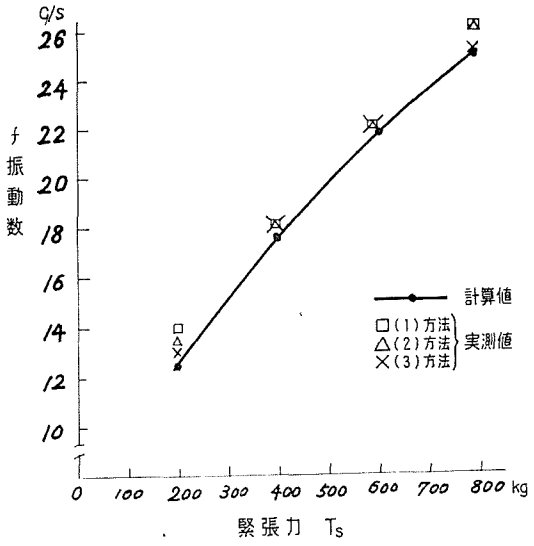
第8図 a



第8図 b



第8図 c



第9図

5. む す び

帯鋸の振動問題解析に必要な帯鋸自由部分の振動数計算式を求めたが，自由部分両端の条件としては両端支持，両端固定と仮定した。多くの因子が影響し合って式は複雑になるので，特殊な場合についての式と照合しながら解析を進めた。問題によっては，特殊な場合についての式で充分満足されることも少なくない。例として，帯鋸の場合は緊張力の影響が非常に大で

あるので，鋸面内の曲げモーメント，送り力（切削力）があまり大でない範囲では，(46) (74) 式で正確な値にかなり近い値が計算できる。しかし，緊張力の影響が減り，曲げこわさが増してくると (46) 式の代りに (56) 式からさらに正確な値を求め得る。

一方，鋸面内の曲げモーメントの影響が無視できない場合には，(90) 式または (91) 式によって求めることが望ましい。

さらに，両端支持と両端固定との振動数の差は，一般の帯鋸のような諸元では少ないが，緊張力と曲げこわさの値によっては，その差が増してくる。

種々複雑な影響を受けることは前述の通りであるが，実験による静止時，運転時（空転）の実測値は，ここで誘導した計算式による計算値と全般的に良く一致することが認められた。

文　献

1) 松永省吾： ENGINEERING, 38-3 (昭 26), 82.
2) 中鉢竜雄・永井欣一： 日本機械学会論文集, 21-103 (昭 30), 193.
3) 中鉢竜雄： 日本機械学会論文集, 23-127 (昭 32. 3). 199.
4) 金内忠彦： 日本機械学会北海道支部, 第 10 回講演会前刷集 (昭 40. 10), 83
5) 久野陸夫・土肥　修： 北大工学部研究報告, 第 10 号 (昭 29. 5), 6.
6) S. チモシエンコ (仲・澤川・久田 訳)： 挫屈理論, コロナ社 (昭 35), 162.
7) 久野陸夫・土肥　修・山下良雄： 北大工学部研究報告, 第 17 号 (昭 32. 12), 2.
8) 久野陸夫・土肥　修： 北大工学部研究報告, 第 14 号 (昭 31. 4). 71.
9) S. チモシエンコ (谷下・渡辺 訳)： 工業振動学, 東京図書 (1962, 9), 343,
10) ジェコブセン・エーア (後藤・金多 訳)： 振動工学, 丸善, (1961, 5) 90.
11) 金内忠彦： 日本機械学会 42 期全国大会前刷集 (昭 39. 10), 203.
12) 土肥　修・金内忠彦・栃内信男： 日本機械学会北海道支部, 第 9 回講演会前刷集 (昭 38. 10), 77.
13) 土肥　修・金内忠彦・片岡更一・阿部康弘： 日本機械学会 42 期全国大会前刷集 (昭 39. 10), 199.