



Title	遠心力を用いた静電界集束系における電子軌道
Author(s)	桜庭, 一郎; Sakuraba, Ichiro
Citation	北海道大學工學部研究報告, 40, 77-86
Issue Date	1966-03-30
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/40790">https://hdl.handle.net/2115/40790</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	40_77-86.pdf



# 遠心力を用いた静電界集束系における電子軌道

桜庭 一郎\*

(昭和40年11月30日受理)

## Electron Beam Trajectories in CEF-Type Devices

Ichiro SAKURABA

(Received November 30, 1965)

### Abstract

This paper deals with the electron flow properties of ribbon-shaped beams in centrifugal electrostatic focusing systems.

The electron motion in radial and linear tangential perturbations is a combination of circular motion with an angular velocity  $\Omega_0$  and a simple harmonic motion in a radial direction of angular frequency  $\sqrt{2}\Omega_0$ . The spatial angle corresponding to one period in radial and linear tangential perturbing influences is the characteristic rippling angle.

The beam in this system carries four space-charge waves: a positive-energy fast wave, a negative-energy slow wave and two synchronous diocotron waves. Propagation constants of fast and slow waves consist of electronic propagation constant, plasma propagation constant and the ratio of angular frequency of simple harmonic motion in the radial direction to angular velocity of circular motion.

The beam stiffness—i.e., the ability of the beam to remain in its equilibrium trajectory under the influence of lateral disturbing forces—is directly proportional to the equilibrium angular velocity of the electron.

### 目 次

abstract .....	77
1. 緒 言 .....	77
2. 遠心力を用いた静電界集束系の基本方程式 .....	79
3. Radial Perturbing Influences .....	80
4. Linear Tangential Velocity Influences .....	82
5. Beam Stiffness .....	84
6. 結 言 .....	86
参考文献 .....	86

### 1. 緒 言

遠心力を用いた静電界集束電子ビームすなわち CEF 型電子ビームを用いた前進波増幅装置 (Fig. 1 参照) は, 小型軽量でかなりの利得をもつため多くの研究が最近なされている。ま

\* 電子工学科電子管工学講座

た電子ビーム集束用の磁界を用いないため特殊な応用分野とくに space electronics の部門からの開発要求が盛んである<sup>1),2)</sup>。

しかるにこのようなマイクロ波電子装置の設計にあたって、最初に解決しなければならない問題は電子ビームの launching と beam transmission であり、現在まで十分な研究がなされていない。

また CEF 型電子ビームにおける空間電荷波の研究<sup>3)</sup>によれば、電子ビームは azimuthal direction に集束する。この点で O 型電子ビームの特性とよく似ている。つぎに M 型電子ビームで重要な役わりをもつ横方向運動は、CEF 型電子ビームにも存在するが、相互作用の点から重要でない。さらに CEF 型には通常の slow and fast space-charge waves のほかに、growing and declining synchronous diocotron waves が存在し得る。この点で M 型電子ビームと似ている。これらの電子ビームの等価位相定数には係数  $\sqrt{2}$  が含まれており、電子軌道の立場からも議論する必要がある。

したがって本論文では CEF 型電子ビームの radial perturbation と tangential velocity perturbation について基礎的な考察を行ない、さらに beam stiffness について検討する。

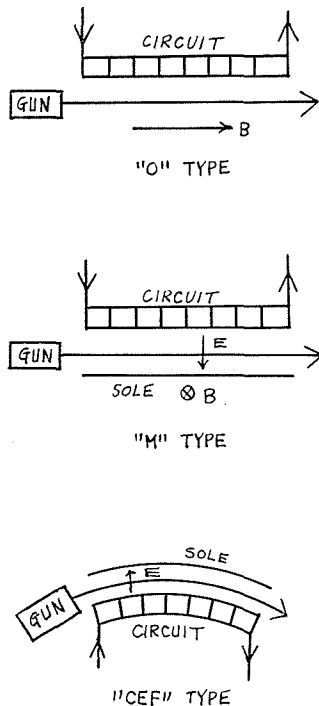


Fig. 1. Schematic representation of three forms of forward-wave amplifiers. In the drawings the symbols  $E$  and  $B$  indicate static electric and magnetic fields respectively.

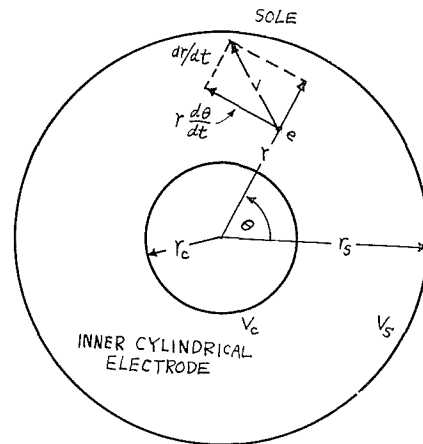


Fig. 2. The centrifugal electrostatic focusing system employing purely radial electric fields.

- $r$  Radius of the electron
- $r_c$  Radius of inner cylindrical electrode
- $r_s$  Radius of sole
- $V_c$  Voltage of inner cylindrical electrode
- $V_s$  Voltage of the sole
- $e$  The electron
- $\theta$  Spatial angle

## 2. 遠心力を用いた静電界集束系の基本方程式

遠心力を用いた静電界集束系 (Fig. 2 参照) において, 1 個の電子に関する運動方程式は次式で示される。

$$mr\dot{\theta}^2 - eE_r = m\ddot{r}, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = -erE_\theta, \quad (2)$$

ここで  $E_r$  は電界の半径方向成分,  $E_\theta$  は電界の角方向成分,  $e/m = \eta$  は電子の比電荷である。 ( $e > 0$ ) しかるにこの集束系の外側電極は, 一般に単純な円筒状となり, 放射状電界のみとなる。それ故角運動量の保存が成立し式 (1) と (2) は

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\eta E_r, \quad (3)$$

$$mr^2\dot{\theta} = M, \quad (4)$$

となる。ここに  $M$  は角運動量である。

つぎに相互作用域に存在する空間電荷を省略すれば, 電位  $V$  は

$$V = V_c - (V_c - V_s) \left[ \frac{\ln(r/r_c)}{\ln(r_s/r_c)} \right]. \quad (5)$$

となり,  $E_r$  は

$$E_r = \frac{1}{r} \left[ \frac{V_c - V_s}{\ln(r_s/r_c)} \right]. \quad (6)$$

で表わされる<sup>4)</sup>。また 1 個の電子の平衡条件は

$$\frac{mv_{\theta e}^2}{r} - eE_r = 0 \quad (7)$$

で示される。すなわち半径  $r$  の点にある電子に求心的に働く電界による力と遠心力とがつりあって円形軌道を描くとき上式が成立つ。 $v_{\theta e}$  は半径  $r$  で半径方向に直角な平衡速度である。式 (6) と (7) より

$$v_{\theta e} = \sqrt{\frac{\eta(V_c - V_s)}{\ln(r_s/r_c)}}, \quad (8)$$

が得られ, したがって  $E_r$  は

$$E_r = \frac{v_{\theta e}^2}{\eta r}. \quad (9)$$

となる。この式 (9) は  $E_r$  が半径に反比例することを示すが, 式 (8) は  $v_{\theta e}$  が相互作用域に打ち上げられた電子の半径に関して独立であることを意味する。それ故電界の半径方向成分は電子の半径によらないこととなる。

もし電子が半径  $r_0$  で, 平衡速度  $v_{\theta e}$  と, ごくわずかの半径方向速度をもち相互作用域に

入るとすれば、角運動量は

$$mr^2\dot{\theta} = mr_0 v_{\theta e}. \quad (10)$$

で与えられる。ここで右辺は初期角運動量を示す。したがって式 (3), (9) および (10) より

$$\ddot{r} = \frac{v_{\theta e}^2}{r} \left[ \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 - 1 \right]. \quad (11)$$

が得られる。これは既に Harman<sup>4)</sup> の示した式であるが、この式の吟味によって安定な軌道に関する多くの性質を知り得る。すなわち、 $r = r_0$  であれば、半径方向加速度が零となり、 $r < r_0$  なら外むきとなり  $r > r_0$  なら求心的な力が働く。したがって電子が  $r = r_0$  の安定な軌道よりいずれの側に出ても、平衡条件をみたすように加速度が働くことを知る。

### 3. Radial Perturbing Influences

半径  $r_0$  の円形軌道がきわめて安定な軌道であることを知ったが、いま半径方向に perturbation がありその大きさが定常状態に比べて非常に小さい場合を調べよう。半径  $r$  と角速度  $\dot{\theta}$  を次のように定義する。

$$r = r_0 + r_1, \quad (12)$$

$$\dot{\theta} = \Omega_0 + \Omega_1, \quad (13)$$

$r_0$  は電子の unperturbed な半径、 $r_1$  は半径の perturbation function である。また  $\Omega_0$  は半径  $r_0$  における unperturbed な角速度で、 $\Omega_1$  は角速度の perturbation function である。式 (12) と (11) とより次の式を得る。

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} = -\frac{v_{\theta e}^2}{r_0} \left[ \frac{2(r_1/r_0) + (r_1/r_0)^2}{(1+r_1/r_0)^3} \right], \quad (14)$$

いま small perturbation つまり  $r_1 \ll r_0$  を仮定すれば、上式は次のようになる。

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} + 2\Omega_0^2 r_1 = 0, \quad (15)$$

ここで  $\Omega_0$  と  $v_{\theta e}$  はつぎの関係で示される。

$$\Omega_0 = \frac{v_{\theta e}}{r_0}. \quad (16)$$

したがって式 (15) の一般解は

$$r_1 = A_1 e^{j\sqrt{2}\Omega_0 t} + A_2 e^{-j\sqrt{2}\Omega_0 t}, \quad (17)$$

ここで  $A_1$  と  $A_2$  は積分定数であり初期条件によりきまる。いまこの初期条件を

$$t = 0 \text{ で } r_1 = r_{10}, \quad \frac{dr}{dt} = \dot{r}_{10} \quad (18)$$

とすれば式 (17) は

$$r_1 = r - r_0 = r_{10} \cos(\sqrt{2} \Omega_0 t) + \frac{\dot{r}_{10}}{\sqrt{2} \Omega_0} \sin(\sqrt{2} \Omega_0 t). \quad (19)$$

したがって相互作用域に半径方向偏向量と半径方向速度成分がないように(つまり  $r_{10} = 0$ ,  $\dot{r}_{10} = 0$ ) 打ち上げられた電子は、半径  $r_0$  の円形軌道を描き平衡条件を満す。もし初期偏向量  $r_{10}$  が存在すれば、半径方向に  $r_0$  を中心に振幅  $r_{10}$  の振動を行なう。また半径方向速度成分  $\dot{r}_{10}$  が存在すれば、振幅  $\dot{r}_{10}/\sqrt{2} \Omega_0$  の同様の振動を生ずる。すなわち電子が平衡軌道にそって打ち上げられた時、わずかの半径方向偏向量か半径方向速度成分、またはそれらの両方が存在すれば、その電子は円運動と単純な振動とをくみあわせた軌道を示す。この半径方向振動の周期  $T$  は式 (19) より

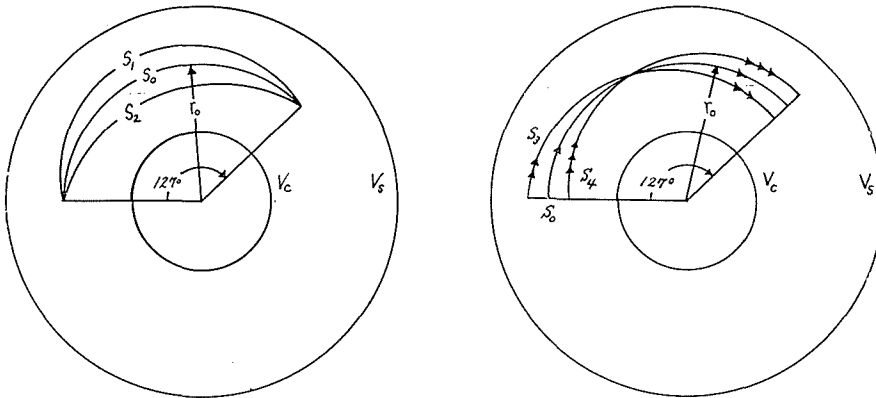
$$T = \sqrt{2} \pi / \Omega_0 \quad (20)$$

で与えられる。

かくして1個の電子が微小な外向きの半径方向速度成分をもって相互作用域に入ってくれば、外向きの半径方向に移動し、やがて遠心力が減少し電界による力のため求心的な半径方向の運動を示す。したがって出発後半周期たつと平衡半径  $r_0$  の円形軌道にもどってくる。この時電子は負方向の半径方向速度成分 ( $\dot{r} < 0$ ) を有する。この半周期は

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2} \Omega_0} \quad (21)$$

で与えられる。半周期に対応する空間の角変位は  $(\pi/\sqrt{2})$  radians (= 127 度) であり、この値は半径方向速度成分の大きさや向きのかんによらず一定である (Fig. 3 参照)。またこの角度



- $S_0$  Trajectory of electron following a circular path with no initial radial velocity component and no initial radial displacement
- $S_1$  Trajectory of an electron with an initial positive radial velocity component
- $S_2$  Trajectory of an electron with an initial negative radial velocity component
- $S_3$  Trajectory of an electron with an initial positive radial displacement
- $S_4$  Trajectory of an electron with an initial negative radial displacement

Fig. 3. Focusing properties of a radial electric field in a CEF-type system.

は Waters<sup>6)</sup> の Characteristic Rippling Angle の半分に相当する。このような特性は、相互作用域を電子ビーム集束系として使用し得ることを示している。

#### 4. Linear Tangential Velocity Influences

つぎに電子が相互作用域へ  $r_0$  点で打ち上げられる際 (つまり  $r_{10} = 0$  および  $\dot{r}_{10} = 0$ )、その接線方向速度が式 (8) で与えられた  $v_{\theta e}$  と異なる速度  $v_0$  をもつ場合を考察する。この時もやはり角運動量の保存が成立して

$$m r^2 \dot{\theta} = m r_0 v_0. \quad (22)$$

式 (9), (22) および (3) より

$$\ddot{r} = \frac{r_0^2 v_0^2}{r^3} - \frac{v_{\theta e}^2}{r}. \quad (23)$$

したがって

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = - \frac{d}{dt} \left[ \frac{r_0^2 v_0^2}{r^2} + 2v_{\theta e}^2 \ln r \right] \quad (24)$$

いま  $r = r_0$  で

$$\frac{dr}{dt} = 0 \quad (25)$$

とすれば式 (24) から

$$\frac{dr}{dt} = \left[ v_{\theta e}^2 \ln \frac{r_0^2}{r^2} + v_0^2 \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \right]^{1/2} \quad (26)$$

を得る。これより  $dr/dt$  を零とする  $r$  の値は二つ存在することを知る。式 (26) の右辺を零とおいて

$$\left( \frac{r_0}{r} \right)^2 = 1 + \left( \frac{v_{\theta e}}{v_0} \right)^2 \ln \left( \frac{r_0}{r} \right)^2. \quad (27)$$

これは transcendental equation であり、 $(r/r_0)$  と  $(v_0/v_{\theta e})$  の関係を Fig. 4 に示した。これらの結果よりつぎの事柄を知る。電子が  $r_0$  点で相互作用域に打ち上げられ、 $v_0 < v_{\theta e}$  であれば、半径方向加速度は負であり (求心的) 半径  $r_0$  の円より内側にまげられ、式 (27) をみたす半径に至って正の半径方向速度成分をもち半径  $r_0$  の円に向う。つぎに  $v_0 > v_{\theta e}$  ならば  $\dot{r}$  を零にする解は  $r = r_0$  と  $r > r_0$  の二つ存在する。すなわちは

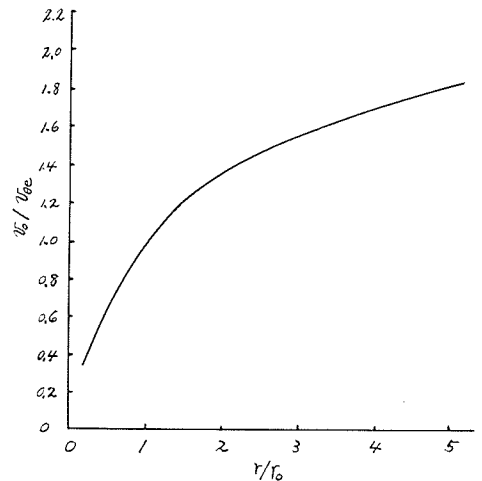


Fig. 4. Relation of  $(v_0/v_{\theta e})$  to  $(r/r_0)$ . This value of  $r$  leads to a vanishing value of  $(dr/dt)$ .

じめ半径方向加速度は正であり、外側にまげられ、ついで式 (27) をみたす半径で負となり半径  $r_0$  の円形軌道にもどるに至りついでこれをくりかえす。

つぎに接線速度  $v_0$  と  $v_{0c}$  との差が非常に小さい場合について、伊東氏<sup>7)</sup> の解析を用いて考察する。前述したように半径  $r$  が  $\theta$  によって変化するから  $\ddot{r}$  はつぎのように示される。

$$\ddot{r} = \frac{r_0^2 v_0^2}{r^4} \frac{d^2 r}{d\theta^2} - \frac{2r_0^2 v_0^2}{r^5} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 \quad (28)$$

いま  $R \equiv (1/r)$  とおけば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= -\frac{1}{R^2} \frac{dR}{d\theta} \cdot \\ \frac{d^2 r}{d\theta^2} &= \frac{2}{R^3} \left( \frac{dR}{d\theta} \right)^2 - \frac{1}{R^2} \frac{d^2 R}{d\theta^2} \cdot \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

したがって式 (28) の右辺は、 $[-R^2 r_0^2 v_0^2 (d^2 R/d\theta^2)]$  となり、式 (23) と上述の結果から

$$\frac{d^2 R}{d\theta^2} + R - \frac{v_{0c}^2}{R r_0^2 v_0^2} = 0, \quad (30)$$

を得る。いま  $v$  を

$$v = v_{0c} + v_1, \quad (31)$$

とおく。ここに  $v_1$  は接線速度の perturbation function である。式 (22) と (31) から  $R$  は

$$R = \frac{v_{0c}}{r_0 v_0} (1 + \varepsilon), \quad (32)$$

$$\varepsilon = \frac{v_1}{v_{0c}}, \quad (33)$$

となる。いま small perturbation つまり  $v_1 \ll v_{0c}$  を仮定すれば式 (30) は

$$\frac{d^2 \varepsilon}{d\theta^2} + 2\varepsilon = 0, \quad (34)$$

となり解は

$$\varepsilon = C_1 \cos \sqrt{2} \theta + C_2 \sin \sqrt{2} \theta \quad (35)$$

となる。いま  $t = 0$ ,  $\theta = 0$  で

$$\dot{r}_1 = 0, \quad \text{namely } (dr/dt)_{\theta=0} = 0, \quad (36)$$

$$\varepsilon(0) = v_{10}/v_{0c}, \quad (37)$$

ここで  $v_{10}$  は  $\theta = 0$  における  $v_1$  の値である。したがって  $r$  は

$$r = \frac{r_0 v_0}{v_{0c}} \left[ 1 + \frac{v_{10}}{v_{0c}} \cos \sqrt{2} \theta \right]^{-1}. \quad (38)$$

となる。軌道の一例を Fig. 5 に示した。

それ故相互作用域に打ち上げられた電子流は出発点より 127 度はなれると、それぞれの接

線速度の初期値に応じて決定される半径方向の分布をもった集団を示すにいたる。

### 5. Beam Stiffness

CEF 型集束系における beam stiffness は、Heffner と Watkins<sup>9)</sup> によつてはじめて議論された。すなわち与えられた半径方向速度によつて生ずる平衡位置よりの半径方向最大偏位を求めて、beam stiffness を考察した。しかしここでは一般的な取扱いをした Palmer と Süsskind<sup>9)</sup> の方法にしたがって定義した Nunn<sup>10)</sup> の beam stiffness factor  $S$  を用いよう。この  $S$  は次式で示される。

$$S^2 = -\left(\frac{\partial \ddot{r}}{\partial r}\right)_{r=r_e} \quad (39)$$

さて式 (3) から

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 + \eta \frac{\partial V}{\partial r} \quad (40)$$

また電子の角運動量は一定であるから、式 (4) の  $M$  はある平衡点における角運動量の値つまり  $mr_e^2\Omega_e$  でおきかえられる。すなわち

$$mr^2\dot{\theta}^2 = M = mr_e^2\Omega_e, \quad (41)$$

$$\dot{\theta} = \Omega_e \left(\frac{r_e}{r}\right)^2, \quad (42)$$

ここで  $\Omega_e$  はある平衡半径  $r_e$  における電子の角速度である。式 (40) と (42) から

$$\ddot{r} = \frac{\Omega_e^2 r_e^4}{r^3} + \eta \frac{\partial V}{\partial r} \quad (43)$$

式 (9) を使って

$$\ddot{r} = \frac{\Omega_e^2 r_e^4}{r^3} - \frac{v_{\theta e}^2}{r} \quad (44)$$

したがって  $S$  を定義した式 (39) と (44) とから

$$S^2 = \frac{4\eta V_e}{r_e^2} \quad (45)$$

ここでエネルギー保存の原理を用いて、 $(2\eta V_e)$  を  $(r_e\Omega_e)^2$  でおきかえると

$$S^2 = 2\Omega_e^2 \quad (46)$$

したがって beam stiffness は半径方向に変化する。つまり  $S$  は平衡角速度  $\Omega_e$  に比例し、

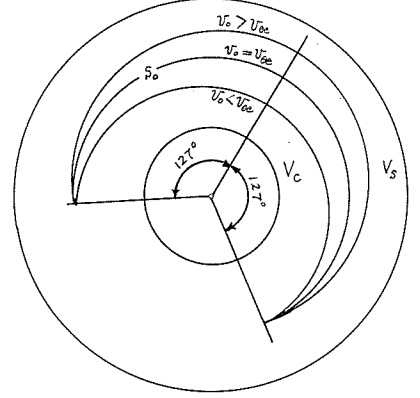


Fig. 5. Paths of electrons in a CEF-type system.  $v_0$  is a linear tangential velocity and  $v_{\theta e}$  is the equilibrium linear tangential velocity at radius  $r_0$ .

$\Omega_e$  はビーム内側に近づくると増大する。それ故リボン状電子ビーム内側における電子の stiffness は外側に存在する電子のそれよりも大となり、ビーム外側に近づくにしたがって  $S$  は減少する。すなわち半径方向に対する beam stiffness の変化をできるだけ少なくするには、きわめて薄いリボン状電子ビームを使う必要がある。

いま平衡半径  $r_e$  と電子ビームの中心部の半径  $r_0$  と対応させて考えれば、前述した式 (19) より同様の結果を得る。つまり

$$S = \frac{\dot{r}_{10}}{r_{1\max}} = \frac{\dot{r}_{10}}{(\dot{r}_{10}/\sqrt{2}\Omega_0)} = \sqrt{2}\Omega_0, \quad (47)$$

ここで  $r_{1\max}$  は半径方向偏向量の最大値である。それ故もし  $r_{10}$  がない場合、電子ビームの境界の振動の振幅は beam stiffness に反比例することを知る。

つぎに O 型電子ビーム装置と M 型電子ビーム装置の beam stiffness とを比較しよう。これらの stiffness は次のように与えられている<sup>8)</sup>。

$$\text{O 型} \quad \frac{v_r}{\Delta r} \approx \Omega_c, \quad (47)$$

$$\text{M 型} \quad \frac{v_y}{\Delta y} \approx \Omega_c, \quad (48)$$

ここで  $\Delta r$  は O 型電子ビーム (円形断面) の半径方向最大偏向量,  $v_r$  は半径方向初速度,  $\Omega_c$  は電子のサイクロトロン角周波数,  $\Delta y$  は M 型電子ビームの横方向最大偏向量,  $v_y$  は横方向初速度である。いま CEF 型集束系における stiffness とこれらの装置のそれと等しくするには

$$\frac{v_r}{\Delta r} = \frac{v_y}{\Delta y} = \frac{\dot{r}_{10}}{r_{1\max}}$$

となり、

$$\Omega_c = \sqrt{2}\Omega_0. \quad (49)$$

が成り立つ必要がある。一般に中出力および高出力の O 型電子ビーム装置と M 型電子ビーム装置においては、信号角周波数  $\omega$  と、電子のサイクロトロン角周波数  $\Omega_c$  とがほぼ等しい状況で使うことが多い。したがって CEF 型電子ビームの等価角方向位相定数  $\beta_e$  を考えると、式 (49) より

$$\beta_e = \omega/\Omega_0 = \sqrt{2} \quad (50)$$

となり甚だ小さな値に制限されることを知る。もちろんこれは O 型, M 型および CEF 型電子ビーム装置の beam stiffness が等しいとした場合であることに留意すべきである。

しかるに CEF 型前進波増幅装置の小信号理論<sup>1),2)</sup>において、gain rate は  $\beta_e$  を大きくする程 O 型のそれに近づくことが示されている。したがって gain rate と beam stiffness との間における conflict は CEF 型集束系の設計上一考を要する問題であり、さらに空間電荷効果もふくめた beam stiffness の解析が必要であろう。

## 6. 結 言

遠心力を用いた静電界集束電子ビームすなわち CEF 型電子ビームの電子軌道を考察した。radial perturbation および linear tangential velocity perturbation はともにいわゆる characteristic rippling angle をもち、静電界集束系として秀れていることが示された。

beam stiffness は平衡角速度に比例する。したがって薄いリボン状電子ビームを使用すべきである。また O 型および M 型の電子ビーム装置の beam stiffness と同程度とすれば、CEF 型電子ビームの等価角方向位相定数は  $\sqrt{2}$  となる。このことは gain rate 増大の点から一考を要する。

また CEF 型電子ビームの空間電荷波の位相定数に含まれる係数  $\sqrt{2}$  の意義も一層明瞭となった。

おわりに CEF 型電子装置の研究を広く支援して下さった The University of Michigan の Professor Joseph E. Rowe および多くの設計資料を教示され有益な御助言いただいた Tulane University の Professor W. M. Nunn に深謝する。

さらに輪講で討論された千田正彦助手、数値計算された小柳幸次郎技官、また接線速度の変化に対する計算法で多くの議論された電子工学科第三期の伊東哲夫君に感謝する。

## 参 考 文 献

- 1) W. M. Nunn, Jr., and J. E. Rowe: "Single-Transit, Large-Radius E-type Devices", Trans. IRE-PPGED, vol. ED-8, pp. 508-520: November, (1961).
- 2) W. M. Nunn, Jr.: "Single-Transit E-Type Traveling-Wave Devices", Journal of Electronics and Control, vol. 15, No. 3, pp. 201-227: September, (1963).
- 3) I. Sakuraba and J. E. Rowe: "Small-Signal Power Theorems and Dispersion in E-type Electron Beams", Technical Report No. 76, Electron Physics Laboratory, Department of Electrical Engineering, The University of Michigan: November, (1964).
- 4) W. W. Harman: Fundamentals of Electronic Motion, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, pp. 41-48: (1955).
- 5) J. R. Pierce: Theory and Design of Electron Beams, Second Edition, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, New Jersey: (1954).
- 6) W. E. Waters: "Rippling of Thin Electron Ribbons", Journal of Applied Physics, Vol. 29, pp. 100-104: January (1958).
- 7) 伊東哲夫: "遠心力を用いた静電界集束電子ビームにおける端効果", 学士論文: March, (1966).
- 8) H. Heffner and D. A. Watkins: "The Practicability of E-Type Traveling-Wave Devices", Proc. IRE, vol. 43, pp. 1007-1008: August, (1955).
- 9) J. L. Palmer and C. Süsskind: "Stiffness of Electron Beams", Journal of Electronics and Control, vol. 10, pp. 365-374: May, (1961).
- 10) W. M. Nunn, Jr., Private Communications.