



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	非均質を考慮した原子炉の安定性
Author(s)	小川, 雄一; Ogawa, Yuichi; 小沢, 保知 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 41, 293-308
Issue Date	1966-08-20
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40795
Type	departmental bulletin paper
File Information	41_293-308.pdf



非均質を考慮した原子炉の安定性

小川 雄一*

小沢 保知*

(昭和41年4月28日受理)

Stability of the Functionally Heterogeneous Reactor

Yuichi OGAWA

Yasutomo OZAWA

Abstract

A practical and concrete method for analysing the reactor stability is derived. The discrimination of the stability, the region of its existence and also the start-up characteristics are determined by considering the effect of the functional heterogeneity of the reactor system. For this purpose, non-linear integral kinetic equations containing the effects of the delayed neutrons, and of two internal feedbacks of quick and slow responses toward the reactivity are set up and analysed by considering the effects of heat exchange between the heterogeneous structural elements and of the coolant speed which were ignored in V. N. Andreiev's treatment.

The integral equations are transformed into four non-linear simultaneous ordinary differential equations of the first order from which two important singular points are produced, one corresponds to zero out-put and the other corresponds to a certain definite out-put. Assuming the linear approximation in the vicinity of these singular points, one obtains the quadratic algebraic equations at both points. These equations allow us to discuss the stability of the reactor both at the starting point and the operating out-put point.

These algebraic equations can be simplified in great deal under the condition of $C_m \gg C_f \gg C_c$, where C_m , C_f and C_c are the heat capacities of the moderator, fuel and the coolant of the reactor respectively. Applying the condition of the Hurwitz's polynomial to the simplified algebraic equation we can obtain four crossing hyperbolas and one cubic curve which determine the stable region of the reactor at the singular point which corresponds to the definite out-put.

This theory was applied to a Calder Hall type reactor as an example. The results of the numerical calculation are presented in the form of diagrams.

The treatment may be useful for the rapid evaluation of the stability of the heterogeneous reactor at any operating condition.

* 原子力教室

1. 緒 言

原子炉の安定性に関して、内外に報ぜられた諸研究の中で、V. N. Andreiev らの研究は、原子炉の出力の変動が反応度に及ぼす影響として、出力の変化に際して比較的瞬時に表われるものと、緩慢に表われるものとの2種類の自己帰還性を考慮し、さらに、遅発中性子の効果をも考慮に入れて、出力の広範囲にわたって位相面解析の方法で原子炉の挙動を追跡している点でかなり具体性の高い研究と云える。しかしながら、この研究においては、非均質型原子炉の特質であるところの、非均質構成要素、すなわち、燃料、減速材および冷却材の3体間の過渡的熱交換の現象や、冷却材流速の効果が、上記の自己帰還性に影響を与えることが陽に考慮されておらず、今一步の実用に則した取扱いが望まれる。

したがって、本研究では、まず、非均質構成要素間の熱交換に関する方程式を設け、この方程式の解である3つの熱時定数によって表される減速材温度を非直線積分方程式型の原子炉動特性方程式に含ましめ、つぎに、これらを4元の実直線連立微分方程式に変換し、その特異点の近傍において系の安定、不安定性を解析し、さらに、安定領域を求めることを試みた。

上記の解析によって求めた安定領域は V. N. Andreiev らのそれを拡張した型で表され、具体的な原子炉の構成より求まる熱および核定数と運転出力の値から比較的容易に安定領域を求め得る特徴を有するものと考えられる。

2. 一般理論

非均質原子炉の等価的1チャンネルの単位長についての熱方程式は

$$\left. \begin{aligned} C_m \frac{dT_m}{dt} &= \mu_m w(t) + H_3(T_c - T_m) \\ C_f \frac{dT_f}{dt} &= \mu_f w(t) + H_2(T_c - T_f) \\ C_c \frac{dT_c}{dt} &= H_2(T_f - T_c) + H_3(T_m - T_c) - \frac{u}{L} C_c(T_{c.out} - T_{c.in}) \\ T_c &\approx \frac{1}{2}(T_{c.out} + T_{c.in}) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

で与えられる。

- ただし T_m : 減速材空間平均温度
 T_f : 燃料体空間平均温度
 $T_{c.in}$: 冷却材入口温度
 $T_{c.out}$: 冷却材出口温度
 C_m : 減速材比熱
 C_f : 燃料体比熱

- C_c : 冷却材比熱
 $w(t)$: 原子炉出力
 u : 冷却材流速
 μ_m : 減速材内発熱比
 μ_f : 燃料体内発熱比
 H_2 : 燃料体—冷却材間熱伝達係数
 H_3 : 減速材—冷却材間熱伝達係数
 L : チャネル長

でチャネル長 L を除くほかはすべて等価的 1 チャネルの単位長当りの値である。

(1) 式を解き、冷却材入口温度 $T_{c.in}$ を基準温度 0 として、減速材空間平均温度 T_m を求めると次式を得る。

$$T_m = \sum_{i=1}^3 \left\{ A_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} + B_i \int_0^t w(t') e^{-\frac{t-t'}{\tau_i}} dt' \right\} \quad (2)$$

ただし、熱時定数 τ_i および常数 A_i, B_i はすべて非均質原子炉の熱時定数のみから決定されるものである。(2) 式において、初期時刻 $t=0$ において体系のすべての箇所は冷却材入口温度と熱平衡状態にあると仮定すると、減速材温度は

$$T_m = \sum_{i=1}^3 B_i \int_0^t w(t') e^{-\frac{t-t'}{\tau_i}} dt' \quad (3)$$

で表される。

つぎに原子炉の遅発中性子の発生確率は、平均発生時間 τ_0 による指数減衰型の発生確率であるものと仮定し、また、原子炉出力は時間に対し甚しく急激な変化を行なわないと仮定すると、原子炉出力の動特性方程式として次式を得る。

$$w(t) = \frac{\beta}{\tau_0 [\beta - \rho(t)]} \int_0^t w(t') e^{-\frac{t-t'}{\tau_0}} dt' \quad (4)$$

$$\rho(t) = \rho_0 + P w(t) + K \int_0^t \sum_{i=1}^3 B_i w(t') e^{-\frac{t-t'}{\tau_i}} dt' \quad (5)$$

- ただし $\rho(t)$: 原子炉反応度
 ρ_0 : 冷原子炉反応度
 β : 遅発中性子発生比率
 P : 瞬時的自己帰還を表わす係数
 K : 緩慢な自己帰還を表わす係数

である。

(4) および (5) 式は次の置換、

$$\left. \begin{aligned} w(t) &= x \\ \dot{w}(t) &= y \\ \ddot{w}(t) &= z \\ \dddot{w}(t) &= v \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

によって、つぎの非直線型連立微分方程式に帰することができる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{f(x, y, z, v)}{g(x, y, z, v)} = h(x, y, z, v) \\ \frac{dz}{dt} &= v \\ \frac{dy}{dt} &= z \\ \frac{dx}{dt} &= y \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここで、 $f(x, y, z, v)$ および $g(x, y, z, v)$ は Appendix A に示す。すなわち、 $f(x, y, z, v)$ は x, y, z および v に関して最高6次の多項式であり、また、 $g(x, y, z, v)$ は x, y, z および v に関して最高5次の多項式であり、これらの多項式の各項の係数は与えられた原子炉の熱および核定数、ならびに、冷原子炉反応度によって定まる常数である事が示されている。

さて(7)式で記述される原子炉出力の時間的挙動は、特異点の性質によって強く支配される。系の特異点は(7)式において、

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dz}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} = 0 \quad (8)$$

とおくことにより次の二つの特異点が得られる。

零出力特異点

$$(x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad v=0)$$

出力特異点

$$(x=x_0=-\alpha_5/\alpha_1, \quad y=0, \quad z=0, \quad v=0)$$

ただし、 α_1 および α_5 は Appendix A に示されることく、それぞれ、多項式 $f(x, y, z, v)$ の x^6 および x^5 の項に関する係数である。

以下に、上の2つの特異点の近傍の系の挙動について、それぞれ、考察を進める。

(i) 零出力特異点近傍

零出力特異点の近傍において、系の挙動は次の直線的関係

$$y = \frac{dx}{dt} = kx \quad (9)$$

によって近似できると仮定すると、(7)式より次の(10)式の関係、

$$\left. \begin{aligned} y &= kx \\ z &= k^2x \\ v &= k^3x \\ \frac{dv}{dt} &= k^4x \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

が求まり、この関係を(7)式の第1式に代入すると、つぎの k に関する4次の代数方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \left[\left\{ [\tau]_1 - 10 \frac{[\tau]_2}{\tau_0} \right\} \beta - [\tau]_1 \rho_0 \right] k^4 \\ & + \left[\left\{ \frac{3}{\tau_0} [\tau]_1 + \frac{4}{\tau_0^2} [\tau]_2 - [S]_{12} \right\} \beta + \left\{ -\frac{4}{\tau_0} [\tau]_1 + [S]_{12} \right\} \rho_0 \right] k^3 \\ & + \left[\left\{ \frac{3}{\tau_0^2} [\tau]_1 - \frac{2}{\tau_0} [S]_{12} + [S]_{13} \right\} \beta + \left\{ -\frac{6}{\tau_0^2} [\tau]_1 + \frac{3}{\tau_0} [S]_{12} - [S]_{13} \right\} \rho_0 \right] k^2 \\ & + \left[\left\{ \frac{1}{\tau_0^3} [\tau]_1 - \frac{1}{\tau_0^2} [S]_{12} + \frac{1}{\tau_0} [S]_{13} - [S]_{23} \right\} \beta \right. \\ & \left. + \left\{ -\frac{4}{\tau_0^3} [\tau]_1 + \frac{3}{\tau_0^2} [S]_{12} - \frac{2}{\tau_0} [S]_{12} + [S]_{23} \right\} \rho_0 \right] k \\ & + \left[-\frac{1}{\tau_0^4} [\tau]_1 + \frac{1}{\tau_0^3} [S]_{12} - \frac{1}{\tau_0^2} [S]_{13} + \frac{1}{\tau_0} [S]_{23} \right] \rho_0 = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

ただし、ここで、 $[\tau]_1$, $[\tau]_2$, $[S]_{12}$, $[S]_{23}$ および $[S]_{31}$ は Appendix A に与えられるものである。すなわち、(11)式における k に関する各項の係数は原子炉の熱および核定数ならびに冷原子炉反応度より求められるものであるので k の正確な値を求めることができる。 k の値を求めることにより、零出力特異点近傍の系の挙動は(9)式の関係より、

$$x = \sum_{i=1}^4 x_{i0} e^{k_i t} \quad (12)$$

ただし

$$\sum_{i=1}^4 x_{i0} = 0 \quad (13)$$

として求まる。零出力特異点は安定論的には鞍部点的な不安定の特異点であることがわかり、(12)式で示される立上り特性で出力特異点に向うことが予想される。零出力特異点の不安定性に関する明確な説明は次節の簡略化の方法において示される。

(ii) 出力特異点近傍

出力特異点は解析的な特異点であることがわかり、位相面の原点をこの特異点に移した上で、この特異点の近傍で(7)式を Taylor 展開し、高次の項を無視することにより、つぎの線形の原子炉動特性方程式に近似することを得る。

$$\begin{pmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dx^*}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_1 & -r_2 & -r_3 & -r_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ z \\ y \\ x^* \end{pmatrix} \quad (14)$$

ただし,

$$x^* = x - x_0 \quad (15)$$

でまた,

$$\left. \begin{aligned} -r_1 &= \frac{\alpha_4 x_0 + \alpha_{14}}{\beta_1 x_0 + \beta_4} \\ -r_2 &= \frac{\alpha_3 x_0 + \alpha_{12}}{\beta_1 x_0 + \beta_4} \\ -r_3 &= \frac{\alpha_2 x_0 + \alpha_9}{\beta_1 x_0 + \beta_4} \\ -r_4 &= \frac{-\alpha_5}{\beta_1 x_0 + \beta_4} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

である。(16)式における $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_9, \alpha_{12}$ および α_{14} はAppendix Aに示されるごとく、それぞれ、 $f(x, y, z, v)$ の $x^5 y, x^5 z, x^5 v, x^4 y, x^4 z$ および $x^4 v$ の項の係数であり、また、 β_1 と β_4 は、それぞれ、 $g(x, y, z, v)$ の x^5 と x^4 の項の係数である。

(14)式で記述される系の安定性は系の特性根、すなわち、

$$\lambda^4 + r_1 \lambda^3 + r_2 \lambda^2 + r_3 \lambda + r_4 = 0 \quad (17)$$

の根がすべて負の実数部を有することで判定できる。

しかし、(17)式の根がすべて負の実数部を有することは、必ずしも、根を求めなくとも、(17)式がHurwitzの多項式の条件を満足することで判定できる。したがって(17)式がHurwitzの多項式であるための必要十分な条件より、

$$\left. \begin{aligned} r_1 &> 0 & (a) \\ r_2 &> 0 & (b) \\ r_3 &> 0 & (c) \\ r_4 &> 0 & (d) \\ r_2^2 - 4r_4 &> 0 & (e) \\ r_1 r_2 r_3 - r_3^2 - r_1^2 r_4 &> 0 & (f) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

を満足することによって比較的容易に原子炉系の安定性を判定できる。(18)式の r はすべて原

子炉の熱および核定数，ならびに，特異点出力値によって決定される常数であるので，与えられた原子炉に対して，具体的に安定性の判定を行なうことが可能である。

3. 簡略化と安定領域ダイアグラム

(17) 式の r_1, r_2, r_3 および r_4 は非均質原子炉の熱および核定数ならびに特異点出力値に関するやや複雑な関係として与えられるものであり，したがって，非均質型原子炉の安定領域を上記のパラメータに関して直視し得るためには簡略化を行なうことが望まれる。

すなわち，一般に，多くの原子炉においては，(1) 式の熱方程式における非均質構成要素の熱容量間に著しい差異が存在する（特にガス冷却型原子炉においてこの傾向は激しい）ので，この仮定のもとにおいて，前記の熱時定数 τ_1, τ_2 および τ_3 は近似的につぎのように求まる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &\approx C_c \cdot \frac{1}{H_2 + H_3} \cdot \frac{1}{1 + 2 \frac{u}{L} \cdot \frac{C_c}{H_2 + H_3}} \\ \tau_2 &\approx C_f \cdot \frac{1}{H_2} \cdot \left(1 + \frac{1}{1 + 2 \frac{u}{L} \cdot \frac{C_c}{H_3}} \right) \\ \tau_3 &\approx C_m \cdot \frac{1}{H_3} \cdot \left(1 + \frac{L}{2u} \cdot \frac{H_3}{C_c} \right) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

上式において，熱伝達係数 H_2 と H_3 との間にオーダー的な著しい差異は生ぜず，また，通常の原子炉においては一般に，

$$2 \frac{u}{L} \cdot \frac{C_c}{H_3} \leq 1 \quad (20)$$

が成立するので，

$$C_m \gg C_f \gg C_c \quad (21)$$

の場合には

$$\tau_3 \gg \tau_2 \gg \tau_1 \quad (22)$$

と仮定することができる。つぎにガス冷却型原子炉の場合は勿論，その他の多くの原子炉において，

$$\tau_0 \gg \tau_1, \quad \tau_0 \leq \tau_3 \quad (23)$$

が満足されることが現存する諸種の原子炉についての検討の結果たしかめられる。

以上の仮定が成立する原子炉においては，安定条件(18)は極めて簡略化され，条件(a), (b), (c), (d), (e)のうち，(c)と(e)は同一の条件に帰し，結局これらのはつぎの単純な4本の双曲線で示される安定領域境界線を与える。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho_0}{\beta} &= -\frac{1}{S} & (a) \\ \frac{\rho_0}{\beta} &= -\frac{1}{IS+J} & (b) \\ \frac{\rho_0}{\beta} &= -\frac{1}{GS+H} & (c), (e) \\ \frac{\rho_0}{\beta} &= -\frac{1}{LS+M} & (d) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

ただし、 S は自己帰還性に関するパラメーターで

$$S = \frac{P}{P + \sum_{i=1}^3 B_i \tau_i K} \quad (25)$$

で与えられ、また、 J, I, H, G, M, L はそれぞれ(26)で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} J &= \frac{\tau_3}{\sum_{i=1}^3 \tau_i B_i} \left\{ \frac{8\tau_2^2}{\tau_0(\tau_2 - \tau_0)} B_1 + \frac{\tau_2}{\tau_0} B_2 + \frac{2\tau_0^2 + \tau_2^2}{(\tau_2 - \tau_0)\tau_0} B_3 \right\} \\ I &= \frac{\tau_3}{\tau_0} - J \\ H &= \frac{\tau_2}{\sum_{i=1}^3 \tau_i B_i} \left\{ \frac{2\tau_2}{\tau_2 - \tau_0} \cdot \frac{\tau_0}{\tau_1} B_1 + \frac{3\tau_2 - \tau_0}{\tau_2 - \tau_0} B_2 + \frac{-2\tau_0^2 + \tau_0\tau_2 - \tau_2^2}{\tau_2(\tau_2 - \tau_0)} B_3 \right\} \\ G &= 1 + \frac{\tau_2}{\tau_0} H \\ M &= \frac{1}{\sum_{i=1}^3 \tau_i B_i} \left\{ \tau_1 B_1 + \left(\tau_1 + \frac{2\tau_2}{\tau_2 - \tau_0} \cdot \frac{\tau_0^2}{\tau_3} \right) B_2 + \frac{2\tau_0^2}{\tau_2 - \tau_0} B_3 \right\} \\ L &= 1 + M \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

この場合、出力特異点の x の値、すなわち、特異点出力値 x_0 は、

$$x_0 = -\frac{\alpha_5}{\alpha_1} \approx \frac{-\rho_0}{P + \sum_{i=1}^3 \tau_i B_i K} \quad (27)$$

となり、V. N. Andreiev らの論文における

$$x_0 = \frac{-\rho_0}{P+K} \quad (28)$$

の拡張形式で表されていることがわかる。

つぎに、(18)式の (f) の条件に対する安定領域境界線は次式の解として得られる。

$$\begin{aligned} a_1 \left[\frac{\beta}{\rho_0} \cdot \frac{1}{S} \right]^3 + \left(a_2 + \frac{b_2}{S} \right) \left[\frac{\beta}{\rho_0} \cdot \frac{1}{S} \right]^2 \\ + \left(a_3 + \frac{b_3}{S} + \frac{c_3}{S^2} \right) \left[\frac{\beta}{\rho_0} \cdot \frac{1}{S} \right] + \left(a_4 + \frac{b_4}{S} + \frac{c_4}{S^2} + \frac{d_4}{S^3} \right) = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
 H_2 &= 0.424 && \text{cal/cm/sec } ^\circ\text{C} \\
 H_3 &= 0.16 && \text{cal/cm/sec } ^\circ\text{C} \\
 C_c &= 0.0982 && \text{cal/cm}^\circ\text{C} \\
 C_f &= 4.03 && \text{cal/cm}^\circ\text{C} \\
 C_m &= 167.5 && \text{cal/cm}^\circ\text{C} \\
 u &= 1850 && \text{cm/sec} \\
 L &= 610 && \text{cm} \\
 \tau_0 &= 14.1 && \text{sec}
 \end{aligned}$$

を採用すると、熱時定数とそれに関する係数は、

$$\begin{aligned}
 \tau_1 &= 0.0825 && \text{sec} \\
 \tau_2 &= 14.79 && \text{sec} \\
 \tau_3 &= 1345 && \text{sec} \\
 B_1 &= 0.0000083 \\
 B_2 &= -0.0012 \\
 B_3 &= 0.00149
 \end{aligned}$$

のごとく求めた。

これらの値は(22)および(23)の仮定を満足することがわかる。したがって、これらの値を(27)式に代入することにより、4本の双曲線型安定領域境界線は

$$\begin{aligned}
 \frac{\rho_0}{\beta} &= \frac{-1}{S} \\
 \frac{\rho_0}{\beta} &= \frac{-1}{33.5S+61.9} \\
 \frac{\rho_0}{\beta} &= \frac{-1}{1.65S+0.403} \\
 \frac{\rho_0}{\beta} &= \frac{-1}{0.96S+0.0395}
 \end{aligned}$$

として求まる。さらに5本目の安定領域境界線を求めるために、常数、 a, b, c, d を計算し、つぎのごとく求まる。

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 2.175 \times 10^{-7} \\
 a_2 &= -3.444 \times 10^{-4} \\
 a_3 &= 1.465 \times 10^{-4} \\
 a_4 &= 4.410 \times 10^{-9} \\
 b_2 &= -6.922 \times 10^{-4} \\
 b_3 &= 5.886 \times 10^{-4}
 \end{aligned}$$

$$b_4 = 4.413 \times 10^{-6}$$

$$c_3 = 5.810 \times 10^{-4}$$

$$c_4 = 8.608 \times 10^{-6}$$

$$d_4 = 5.772 \times 10^{-6}$$

以上の数値を(29)あるいは(30)の式へ代入して境界線が求まる。

Fig. 2はこれらの5本の境界線を示す。安定領域は図の(a), (b), (c), (e), (d), (f)のすべての安定側にある斜線で示す領域である。V. N. Andreievらの研究においては安定領域境界は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho_0}{\beta} &= -\frac{1}{S} \\ \frac{\rho_0}{\beta} &= \frac{-1}{\frac{\tau}{\tau_0} S + 1} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

なる2本の双曲線で示されるに対し、本研究においては5本の線で示されることは、本研究に

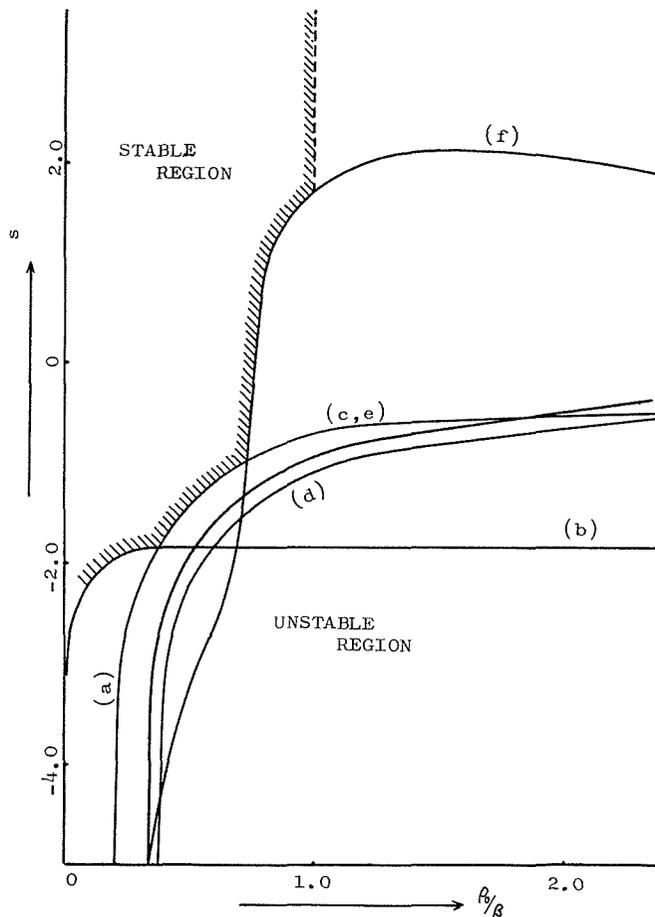


Fig. 2. Stability Region of the Reactor which has only the Internal Feedbacks.

おいては、非均質構成要素間の熱授受の影響を原子炉の動特性方程式に陽に含ませこれを、V. N Andreiev らの方法を拡張した方法で解いた故に外ならず、したがって、本方法は、より具体的に原子炉の安定性を解析し、安定領域を求めることのできるより実際的に有用な方法であると考えられる。

Fig. 2における S は2つの自己帰還係数の P と K との関数として求められるものであるが、これには P と K が共に正の値を有する場合が除外される。 P と K が共に正の値を有する場合が不安定であることは直観的にもうなづけ得ることであるが、(30)あるいは(31)式において特異点出力値が正の有限な値を有し得ないことから判定される。

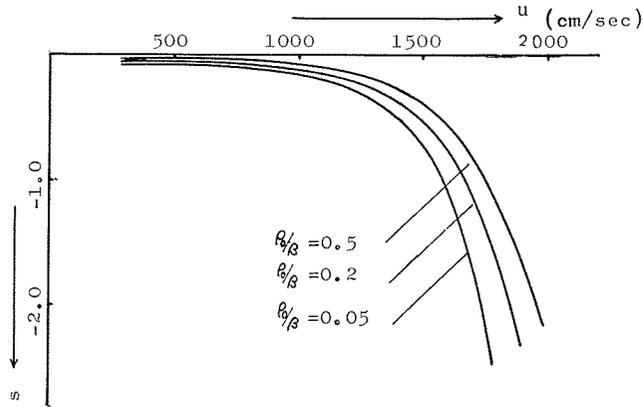


Fig. 3. Effect of the Coolant Speed upon the Reactor Stability

つぎに、冷却体流速が安定領域の深さに与える影響を Fig. 3 に示す。ここでは冷却流速の変化が熱伝達係数に与える影響を無視してあるので、厳密な意味での流速特性曲線とは云えないが、流速の安定性に寄与する傾向は知ることができる。Fig. 3によれば冷却流速が増加するにしたがって、系の安定性が增大することが見られる。

最後に本研究に適切な御助言、御援助を下さった加地郁夫氏に対して深甚な感謝の意を表します。

Appendix A

(7) 式の $f(x, y, z, v)$ と $g(x, y, z, v)$ は次式で示される。

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z, v) = & \alpha_1 x^6 + \alpha_2 x^5 y + \alpha_3 x^5 z + \alpha_4 x^5 v + \alpha_5 x^5 + \alpha_6 x^4 y^2 + \alpha_7 x^4 y z + \alpha_8 x^4 y v \\
 & + \alpha_9 x^4 y + \alpha_{10} x^4 z^2 + \alpha_{11} x^4 z v + \alpha_{12} x^4 z + \alpha_{13} x^4 v^2 + \alpha_{14} x^4 v + \alpha_{15} x^3 y^3 + \alpha_{16} x^3 y^2 z \\
 & + \alpha_{17} x^3 y^2 v + \alpha_{18} x^3 y^2 + \alpha_{19} x^3 y z^2 + \alpha_{20} x^3 y z v + \alpha_{21} x^3 y z + \alpha_{22} x^3 y v^2 + \alpha_{23} x^3 y v \\
 & + \alpha_{24} x^3 z^3 + \alpha_{25} x^3 z^2 v + \alpha_{26} x^3 z^2 + \alpha_{27} x^3 z v + \alpha_{28} x^3 v^2 + \alpha_{29} x^2 y^4 + \alpha_{30} x^2 y^3 z \\
 & + \alpha_{31} x^2 y^3 v + \alpha_{32} x^2 y^3 + \alpha_{33} x^2 y^2 z^2 + \alpha_{34} x^2 y^2 z v + \alpha_{35} x^2 y^2 z + \alpha_{36} x^2 y^2 v + \alpha_{37} x^2 y z^2 \\
 & + \alpha_{38} x^2 y z v + \alpha_{39} x^2 z^3 + \alpha_{40} x y^5 + \alpha_{41} x y^4 z + \alpha_{42} x y^4 v + \alpha_{43} x y^4 + \alpha_{44} x y^3 z + \alpha_{45} x y^3 v \\
 & + \alpha_{46} x y^2 z^2
 \end{aligned} \tag{App-1}$$

$$g(x, y, z, v) = \beta_1 x^5 + \beta_2 x^4 y + \beta_3 x^4 z + \beta_4 x^4 + \beta_5 x^3 y^2 + \beta_6 x^3 y z + \beta_7 x^3 y + \beta_8 x^3 z + \beta_9 x^2 y^3 + \beta_{10} x^2 y^2 \quad (\text{App-2})$$

ただし、係数 α および β はすべて非均質原子炉の熱および核定数、ならびに、冷原子炉反応度の関数として求められている。これらのうち、特に、原子炉の安定性に関係の深いものを下に示す。

$$\begin{aligned} \alpha_1 = & \left(-\frac{P}{\tau_0^4} - K_3\right)[\tau]_1 + \left(-\frac{K_0}{\tau_0^4} + \frac{K_3}{\tau_0}\right)[\tau]_2 + \left(\frac{K_1}{\tau_0^4} - \frac{K_3}{\tau_0^2}\right)[\tau]_3 + \left(-\frac{K_2}{\tau_0^4} + \frac{K_3}{\tau_0^3}\right)[\tau]_4 \\ & + \left(-\frac{K_1}{\tau_0^3} + \frac{K_2}{\tau_0^2}\right)[S]_{01} + \left(\frac{K_0}{\tau_0^3} - \frac{K_2}{\tau_0}\right)[S]_{02} + \left(-\frac{K_0}{\tau_0^2} + \frac{K_1}{\tau_0}\right)[S]_{03} \\ & + \left(\frac{P}{\tau_0^3} + K_2\right)[S]_{12} + \left(-\frac{P}{\tau_0^2} - K_1\right)[S]_{13} + \left(\frac{P}{\tau_0} + K_0\right)[S]_{23} \end{aligned} \quad (\text{App-3})$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 = & \left(-\frac{4P}{\tau_0^3} + K_2\right)[\tau]_1 + \left(-\frac{P}{\tau_0^4} - \frac{4K_0}{\tau_0^3} - \frac{K_2}{\tau_0} + K_3\right)[\tau]_2 \\ & + \left(-\frac{K_0}{\tau_0^4} + \frac{4K_1}{\tau_0^3} + \frac{K_2}{\tau_0^2} - \frac{2K_3}{\tau_0}\right)[\tau]_3 + \left(\frac{K_1}{\tau_0^4} + \frac{3K_2}{\tau_0^3} + \frac{3K_3}{\tau_0^2}\right)[\tau]_4 \\ & + \left(\frac{K_0}{\tau_0^3} - \frac{4K_1}{\tau_0^2} + \frac{2K_2}{\tau_0}\right)[S]_{01} + \left(\frac{P}{\tau_0^3} + \frac{3K_0}{\tau_0^2} + \frac{K_1}{\tau_0} - K_2\right)[S]_{02} \\ & + \left(-\frac{P}{\tau_0^2} - \frac{3K_0}{\tau_0} + K_1\right)[S]_{03} + \left(\frac{3P}{\tau_0^2} - K_1\right)[S]_{12} \\ & + \left(-\frac{2P}{\tau_0} + K_0\right)[S]_{13} + 2P[S]_{23} \end{aligned} \quad (\text{App-4})$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 = & \left(\frac{6P}{\tau_0^2} - K_1\right)[\tau]_1 + \left(\frac{6K_0}{\tau_0^2} + \frac{K_1}{\tau_0}\right)[\tau]_2 + \left(-\frac{P}{\tau_0^4} - \frac{7K_1}{\tau_0^2} + K_3\right)[\tau]_3 \\ & + \left(-\frac{K_0}{\tau_0^4} + \frac{K_1}{\tau_0^3} + \frac{6K_2}{\tau_0^2} - \frac{3K_3}{\tau_0}\right)[\tau]_4 + \left(\frac{P}{\tau_0^3} + \frac{K_0}{\tau_0^2} + \frac{K_1}{\tau_0} - K_0\right)[S]_{01} - \frac{4K}{\tau_0}[S]_{02} \\ & + \left(-\frac{P}{\tau_0} + K_0\right)[S]_{03} + \left(-\frac{3P}{\tau_0} + K_0\right)[S]_{12} + 2P[S]_{13} \end{aligned} \quad (\text{App-5})$$

$$\begin{aligned} \alpha_4 = & \left(-\frac{4P}{\tau_0} + K_0\right)[\tau]_1 - \frac{5K_0}{\tau_0}[\tau]_2 + \left(\frac{K_0}{\tau_0^2} + \frac{4K_1}{\tau_0}\right)[\tau]_3 \\ & + \left(-\frac{P}{\tau_0^4} - \frac{K_0}{\tau_0^3} - \frac{4K_2}{\tau_0} + K_3\right)[\tau]_4 + \left(\frac{P}{\tau_0^2} - K_1\right)[S]_{01} \\ & + \left(-\frac{P}{\tau_0} + K_0\right)[S]_{02} + 2P[S]_{12} \end{aligned} \quad (\text{App-6})$$

$$\alpha_5 = -\frac{\rho_0}{\tau_0^4}[\tau]_1 + \frac{\rho_0}{\tau_0^3}[S]_{12} - \frac{\rho_0}{\tau_0^2}[S]_{13} + \frac{\rho_0}{\tau_0}[S]_{23} \quad (\text{App-7})$$

$$\alpha_9 = \left(\frac{\beta}{\tau_0^3} - \frac{4\rho_0}{\tau_0^3}\right)[\tau]_1 + \left(\frac{-\beta}{\tau_0^2} + \frac{3\rho_0}{\tau_0^2}\right)[S]_{12} + \left(\frac{\beta}{\tau_0} - \frac{2\rho_0}{\tau_0}\right)[S]_{13} - (\beta - \rho_0)[S]_{23} \quad (\text{App-8})$$

$$\begin{aligned} \alpha_{12} = & \left(-\frac{\beta}{\tau_0^2} + \frac{6\rho_0}{\tau_0^2}\right)[\tau]_1 + \frac{\beta}{\tau_0^3}[\tau]_2 - \frac{\beta}{\tau_0^2}[S]_{02} \\ & + \frac{\beta}{\tau_0}[S]_{03} + \left(\frac{\beta}{\tau_0} - \frac{3\rho_0}{\tau_0}\right)[S]_{12} - (\beta - \rho_0)[S]_{13} \end{aligned} \quad (\text{App-9})$$

$$\alpha_{14} = \left(\frac{\beta}{\tau_0} - \frac{4\theta_0}{\tau_0} \right) [\tau]_1 - \frac{\beta}{\tau_0^2} [\tau]_2 + \frac{\beta}{\tau_0^3} [\tau]_3 - \frac{\beta}{\tau_0^2} [S]_{01} + \frac{\beta}{\tau_0} [S]_{02} - (\beta - \rho_0) [S]_{12} \quad (\text{App-10})$$

$$\beta_1 = -2P[\tau]_1 + \left(-K_0 + \frac{P}{\tau_0} \right) [\tau]_2 + \left(K_1 - \frac{P}{\tau_0^2} \right) [\tau]_3 + \left(-K_2 + \frac{P}{\tau_0^3} \right) [\tau]_4 \quad (\text{App-11})$$

$$\beta_4 = (\beta - \rho_0) [\tau]_1 - \frac{\beta}{\tau_0} [\tau]_2 + \frac{\beta}{\tau_0^2} [\tau]_3 - \frac{\beta}{\tau_0^3} [\tau]_4 \quad (\text{App-12})$$

ただし, K_0, K_1, K_2 および K_3 は (5) 式中の KB_1, KB_2, KB_3 により

$$\left. \begin{aligned} KB_1 + KB_2 + KB_3 &= K_0 \\ \frac{KB_1}{\tau_1} + \frac{KB_2}{\tau_2} + \frac{KB_3}{\tau_3} &= K_1 \\ \frac{KB_1}{\tau_1^2} + \frac{KB_2}{\tau_2^2} + \frac{KB_3}{\tau_3^2} &= K_2 \\ \frac{KB_1}{\tau_1^3} + \frac{KB_2}{\tau_2^3} + \frac{KB_3}{\tau_3^3} &= K_3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{App-13})$$

で表されるものであり, また, $[\tau]_1, [\tau]_2, [\tau]_3$ および $[\tau]_4$ は次式によって示される行列式である。

$$\left. \begin{aligned} [\tau]_1 &= \begin{vmatrix} \frac{1}{\tau_1} & \frac{1}{\tau_2} & \frac{1}{\tau_3} \\ \frac{1}{\tau_1^2} & \frac{1}{\tau_2^2} & \frac{1}{\tau_3^2} \\ \frac{1}{\tau_1^3} & \frac{1}{\tau_2^3} & \frac{1}{\tau_3^3} \end{vmatrix}, & [\tau]_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{\tau_1^2} & \frac{1}{\tau_2^2} & \frac{1}{\tau_3^2} \\ \frac{1}{\tau_1^3} & \frac{1}{\tau_2^3} & \frac{1}{\tau_3^3} \end{vmatrix} \\ [\tau]_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{\tau_1} & \frac{1}{\tau_2} & \frac{1}{\tau_3} \\ \frac{1}{\tau_1^2} & \frac{1}{\tau_2^2} & \frac{1}{\tau_3^2} \end{vmatrix}, & [\tau]_4 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{\tau_1} & \frac{1}{\tau_2} & \frac{1}{\tau_3} \\ \frac{1}{\tau_1^2} & \frac{1}{\tau_2^2} & \frac{1}{\tau_3^2} \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (\text{App-14})$$

さらに, (App-3) より (App-12) までの式中の $[S]_{01}, [S]_{02}, [S]_{03}, [S]_{12}, [S]_{23}, [S]_{13}$ は

$$\left. \begin{aligned} [S]_{01} &= \sum_{\ell=1}^3 \frac{1}{\tau_\ell^4} [\tau]_{01}^\ell \\ [S]_{02} &= \sum_{\ell=1}^3 \frac{1}{\tau_\ell^4} [\tau]_{02}^\ell \\ [S]_{03} &= \sum_{\ell=1}^3 \frac{1}{\tau_\ell^4} [\tau]_{03}^\ell \\ [S]_{12} &= \sum_{\ell=3}^3 \frac{1}{\tau_\ell^2} [\tau]_{12}^\ell \\ [S]_{23} &= \sum_{\ell=1}^3 \frac{1}{\tau_\ell^4} [\tau]_{23}^\ell \\ [S]_{13} &= \sum_{\ell=1}^3 \frac{1}{\tau_\ell^4} [\tau]_{13}^\ell \end{aligned} \right\} \quad (\text{App-15})$$

で与えられる。ここで、 $[\tau]_{01}^i$, $[\tau]_{02}^i$, $[\tau]_{03}^i$, $[\tau]_{12}^i$, $[\tau]_{23}^i$, $[\tau]_{i3}^i$ はつぎの条件, すなわち

$$i=1 \text{ のとき} \quad j=2, \quad k=3$$

$$i=2 \text{ のとき} \quad j=3, \quad k=1$$

$$i=3 \text{ のとき} \quad j=1, \quad k=2$$

の条件のもとで, 一般的形式(App-16)によって与えられる。

$$[\tau]_{mn}^i = \begin{vmatrix} \frac{1}{\tau_j^m} & \frac{1}{\tau_k^m} \\ \frac{1}{\tau_j^n} & \frac{1}{\tau_k^n} \end{vmatrix} \quad (\text{App-16})$$

Appendix B

(29) 式の常数, a, b, c, d はつぎによって与えられる。

$$a_1 = \frac{1}{\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_0^3} \quad (\text{App-17})$$

$$a_2 = \frac{-\tau_2^2}{\tau_1^3 \tau_3 \tau_0^4} (1-a) \quad (\text{App-18})$$

$$a_3 = \frac{1}{\tau_1 \tau_0^5} (1-a)^2 (1+2a) + \frac{\tau_2}{\tau_1^3 \tau_3 \tau_0^2} \quad (\text{App-19})$$

$$a_4 = \frac{1}{\tau_1 \tau_0^5} (1-a)^3 (1+a) \quad (\text{App-20})$$

$$b_2 = -\frac{\tau_2^2}{\tau_1^2 \tau_3 \tau_0^4} (1-a+2a^2) B_1 + \frac{8}{\tau_1 \tau_0^4} B_1 - \frac{\tau_2^3}{\tau_1^3 \tau_3 \tau_0^4} (1-a) B_2 - \frac{\tau_2^2}{\tau_1^3 \tau_0^4} (1-a) B_3 \quad (\text{App-21})$$

$$b_3 = -\frac{2}{\tau_1^2 \tau_0^3} (1-a) B_1 + \frac{4\tau_2^2}{\tau_1^3 \tau_3 \tau_0^2} B_2 + \frac{\tau_2}{\tau_1 \tau_0^5} (1-a) (-1+2a-4a^2) B_2 + \frac{4\tau_2}{\tau_1^3 \tau_3 \tau_0^2} B_3 \quad (\text{App-22})$$

$$b_4 = \frac{-2}{\tau_1^2 \tau_0^3} (1-a)^2 B_1 + \frac{\tau_2}{\tau_1 \tau_0^5} (1-a)^2 (1+a-4a^2) B_2 + \frac{\tau_2}{\tau_1^4 \tau_0^5} (1-a)^2 (1+a) (1+4a^2) B_3 + \frac{3}{\tau_1^3 \tau_3} B_3 \quad (\text{App-23})$$

$$c_3 = \frac{-16\tau_2}{\tau_1^2 \tau_0^3} B_1^2 - \frac{2\tau_2}{\tau_1^2 \tau_0^3} B_1 B_2 - \frac{2\tau_2}{\tau_1^2 \tau_0^3} (1+2a^2) B_1 B_3 + \frac{2\tau_2^3}{\tau_1^3 \tau_3 \tau_0^2} B_2^2 + \frac{\tau_2}{\tau_1 \tau_0^4} (1-a) (1-3a) B_2^2 + \frac{4\tau_2^2}{\tau_1^3 \tau_3 \tau_0^2} B_2 B_3 + \frac{2\tau_2}{\tau_1^3 \tau_0^2} B_3^2 \quad (\text{App-24})$$

$$c_4 = -\frac{16\tau_2}{\tau_1^2 \tau_0^3} (1-a) B_1^2 - \frac{2\tau_2}{\tau_1^2 \tau_0^3} (1-a)^2 B_1 B_2 + \frac{\tau_2}{\tau_1^2 \tau_0^3} (1-a) (4-2a-12a^2) B_1 B_3 + \frac{\tau_2}{\tau_1 \tau_0^5} (1-a)^2 (1-3a) B_2^2 + \frac{\tau_2}{\tau_1^4 \tau_0^5} (1-a) (2-3a+5a^2-14a^3) B_2 B_3 + \frac{6\tau_2}{\tau_1^3 \tau_3} B_2 B_3 + \frac{3}{\tau_1^3 \tau_3} B_3^2 \quad (\text{App-25})$$

$$\begin{aligned}
d_4 = & -\frac{16\tau_2}{\tau_1\tau_0^3}(1-a)B_1^3 + \frac{\tau_2}{\tau_1\tau_0^3}(1-a)(-18+2a)B_1^2B_2 + \frac{32\tau_2}{\tau_1^2\tau_3\tau_0}B_1^2B_2 \\
& - \frac{32}{\tau_1^2\tau_0}B_1^2B_3 - \frac{2\tau_2}{\tau_1\tau_0^3}(1-a)^2B_1B_2^2 - \frac{4\tau_2}{\tau_1^2\tau_3\tau_0}(1-a)B_1B_2^2 - \frac{4}{\tau_1^2\tau_0}(1-a)B_1B_2B_3 \\
& - \frac{4}{\tau_1^2\tau_0}(1+2a^2)B_1B_3^2 + \frac{2\tau_2}{\tau_1\tau_0^2\tau_3}(1-a)(1-3a)B_2^3 + \frac{\tau_2}{\tau_0^4}(1-a)^2(1-3a)B_2^3 \\
& + \frac{\tau_2^3}{\tau_1^3\tau_3}B_2^3 + \frac{2}{\tau_1\tau_0^2}(1-a)(1-3a)B_2^2B_3 + \frac{3\tau_2^2}{\tau_1^3\tau_3}B_2^2B_3 + \frac{3\tau_2}{\tau_1^3\tau_3}B_2B_3^2 + \frac{1}{\tau_1^3}B_3^3
\end{aligned}$$

(App-26)

ただし、 a は $\frac{\tau_0}{\tau_2}$ である。

参 考 文 献

- 1) Andreiev, V. N. et al.: At. Energ., 7, 363 (1959).
- 2) Salle, J. La: "Stability by Liapunov's Direct Method", (1961), Academic Press.
- 3) 小川雄一・小沢保知: 日本原子力学会昭和39年年会, F-18.
- 4) 小川雄一: "外部制御系を加えた原子炉の安定性", 日本原子力学会誌, 7-6, 290 (1965).
- 5) Ogawa, Y., Kaji, I., Ozawa, Y.: "Time Optimum Control of the Reactor which has two Kinds of Internal Feedbacks", Journal of Nuclear Science and Technology, (in prep.).
- 6) 三井田純一・他: JAERI, 1006-B (昭34).