



# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	CEF型前進波増幅装置の利得に対する電子入射速度の影響
Author(s)	桜庭, 一郎; Sakuraba, Ichiro; 千田, 正彦 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 42, 29-41
Issue Date	1967-01-05
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/40814">https://hdl.handle.net/2115/40814</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	42_29-42.pdf



# CEF 型前進波増幅装置の利得に対する 電子入射速度の影響

桜庭 一郎\*

千田 正彦\*

(昭和41年8月31日受理)

## The Effect of Electron Injection Velocity Variations on Gain Characteristics of CEF-Type Forward-Wave Amplifiers

Ichiro SAKURABA

Masahiko SENDA

Department of Electronic Engineering, Faculty of Engineering,  
Hokkaido University, Sapporo, Japan.

(Received August 31, 1966)

### Abstract

This paper deals with the effect of electron injection velocity variations on the gain characteristics of CEF-type forward-wave amplifiers in a special case where  $d=0$ ,  $Q=0$ ,  $\beta_e \approx 20$  and  $C \approx 0.05$ .

The small-signal forward-wave gain for small values of  $b$  was yielded by

$$\text{Gain (db)} \approx 10 \log_{10} \left[ \cosh^2 \frac{\sqrt{\beta_e C}}{2} \sqrt{1 - \frac{3}{4\beta_e C} \left(b + \frac{3}{\beta_e^2 C}\right)^2} \phi \right. \\ \left. + \frac{9}{8\beta_e^2} \sin^2 \frac{\sqrt{2}}{\beta_e C} \sqrt{1 + \frac{3}{32} \beta_e^2 C^2 \left(b + \frac{3}{\beta_e^2 C}\right)^2} \phi \right]$$

The first term is due to the growing and decreasing waves in the beam-circuit system and the second term is due to the characteristic ripple in the CEF-type focusing system. Under the condition where  $\beta_e \approx 20$  and  $C \approx 0.05$ , the second term is negligible hence the gain can be approximated by

$$\text{Gain (db)} \approx 10 \log_{10} \left[ \cosh^2 \left( \pi C N \sqrt{1 - \frac{3}{4\beta_e C} \left(b + \frac{3}{\beta_e^2 C}\right)^2} \right) \right]$$

An important feature is the narrowing of the curves with the increasing interaction length, which means the beam voltage is more critical for larger angle devices.

### 目 次

Abstract .....	29
1. 緒 言 .....	30

\* 電子工学科電子管工学講座

2. 電子方程式 .....	30
3. 前進波回路方程式 .....	33
4. 特性方程式 .....	34
5. 電子入射速度と小信号利得 .....	37
6. 結 言 .....	40
参考文献 .....	41

## 1. 緒 言

遠心力を用いた静電界集束型電子ビームを用いる、いわゆる CEF 型前進波増幅装置 (Fig. 1 参照) は、広帯域小型軽量および diocotron instability の特長を持つため、マイクロ波電子装置として大変興味を持たれている<sup>1),2),3)</sup>。

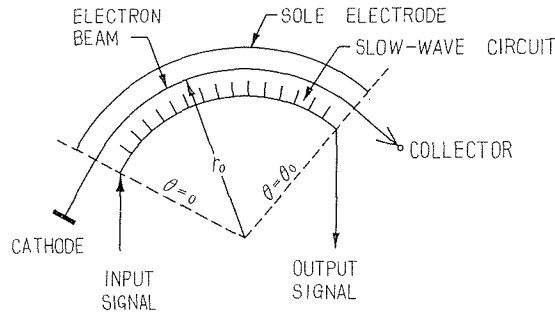


Fig. 1. Model for analysis of CEF-type forward-wave amplifiers.

このような beam-circuit systems に存在する波動を決定する特性方程式は、かなり複雑なため分散特性を広く考察することが非常に困難である。現在当講座において CEF 型集束系を用いたマイクロ波増幅装置と振幅変調光の検波装置の基本設計を進めており、既に完全同期、零空間電荷、無損失かつ  $\beta_e \approx 20$  および  $C \approx 0.05$  の場合における利得の近似式を得たが、今回幸いにも電子入射速度の影響を含めた前進波小信号利得の表示式が得られたので報告する。

## 2. 電子方程式

CEF 型前進波増幅装置の電子方程式は、Brillouin-flow Eulerian-fluid を形成する一個の電子の運動方程式と連続方程式より求められる。単一粒子の Lagrange function から得られる運動方程式は、空間電荷効果を省略したとき次式で与えられる。

$$\dot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\eta [E_r + E(r)], \quad (1)$$

$$2r\dot{\theta} + r\dot{g} = -\eta E_\theta. \quad (2)$$

ここで  $E_r$  は遅波回路を伝ばんする高周波電界の半径方向成分、 $E(r)$  は半径  $r$  における電子の遠心力と平衡する半径方向の静電界であり、文字上の dots は total time derivations を示し、 $\eta = 1.759 \times 10^{11}$  coulombs/kg である。いま電子ビームの半径方向厚さ  $\sigma$  は、電子の unper-

turbed な半径  $r_0$  に比べてきわめて小さいとし、半径  $r$  と角速度  $\dot{\theta}$  は小信号理論により次のように定義する。

$$r = r_0 + r_1, \quad (3)$$

$$\dot{\theta} = d\theta/dt = \Omega_0 + \Omega_1. \quad (4)$$

$r_1$  は半径の perturbation function,  $\Omega_1$  は角速度の perturbation function, そして  $\Omega_0$  は半径  $r_0$  における unperturbed な角速度である。式 (3) と (4) を式 (1) と (2) に代入すれば

$$\begin{aligned} (\Omega_0 + \Omega_1) \left[ (\Omega_0 + \Omega_1) \frac{\partial^2 r_1}{\partial \theta^2} + \left( \frac{\partial r_1}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial \Omega_1}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 r_1}{\partial \theta \cdot \partial t} \right] \\ + \left[ \frac{\partial^2 r_1}{\partial t^2} + \left( \frac{\partial r_1}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \Omega_1}{\partial t} + (\Omega_0 + \Omega_1) \frac{\partial^2 r_1}{\partial \theta \cdot \partial t} \right] \\ - (r_0 + r_1) (\Omega_0 + \Omega_1)^2 = \left[ -\eta E_r - \frac{(\Omega_0 r_0)^2}{r_0 + r_1} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

$$2(\Omega_0 + \Omega_1) \left[ (\Omega_0 + \Omega_1) \frac{\partial r_1}{\partial \theta} + \frac{\partial r_1}{\partial t} \right] + (r_0 + r_1) \left[ (\Omega_0 + \Omega_1) \frac{\partial \Omega_1}{\partial \theta} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial t} \right] = -\eta E_\theta. \quad (6)$$

となる。式 (5) の右辺第二項は、一個の電子の平衡条件より求められ、

$$-\eta E(r) = -\frac{v_{\theta e}^2}{r} = \frac{-\eta(V_c - V_s)}{r \ln(r_s/r_c)} = \frac{-(\Omega_0 r_0)^2}{r_0 + r_1},$$

である。ここで  $v_{\theta e}$  は半径  $r$  で半径方向に直角な平衡速度、 $V_c$  は遅波回路の直流電位、 $V_s$  は sole の直流電位、 $r_c$  は遅波回路の半径、 $r_s$  は sole の半径である。また電子流速度が光速に比べて非常に小さいので高周波磁界の影響を省略した。さらに Eulerian-fluid の仮定より  $\partial r_1/\partial r = 0$  であり、Brillouin-flow の条件から  $\partial \Omega_1/\partial r = 0$  である。

つぎにすべての高周波量が  $\theta$  と  $t$  に関して

$$e^{j(\omega t - \beta \theta)}$$

のように変化すると考えよう。ここで  $\beta$  は circular propagation constant である。故に式 (5) と (6) は

$$\begin{aligned} r_1 \left[ (\Omega_0 + \Omega_1) (\beta \omega - \Omega_0 \beta^2 - 2\Omega_1 \beta^2) + \omega (\Omega_0 \beta - \omega + 2\Omega_1 \beta) - 2\Omega_0 (\Omega_0 + \Omega_1) - \Omega_1^2 \right] \\ - \Omega_1 r_0 (2\Omega_0 + \Omega_1) = -\eta E_r, \end{aligned} \quad (8)$$

$$2r_1 (\Omega_0 + \Omega_1) \left[ \omega - \beta (\Omega_0 + \Omega_1) \right] + \Omega_1 (r_0 + r_1) \left[ \omega - \beta (\Omega_0 + \Omega_1) \right] = j\eta E_\theta. \quad (9)$$

ここで式 (8) を求めるとき  $r_1/r_0 \ll 1$  と仮定した。

$\theta$  方向電流  $I_\theta$  は、

$$I_\theta = (\tau_0 + \tau_1) (r_0 + r_1) (\Omega_0 + \Omega_1) = -I_0 + i_\theta, \quad (10)$$

$$-I_0 = \Omega_0 r_0 \tau_0, \quad (11)$$

$$i_\theta = \Omega_0 \tau_0 r_1 + r_0 \tau_0 \Omega_1 + \Omega_0 r_0 \tau_1 + \tau_0 r_1 \Omega_1 + \Omega_0 r_1 \tau_1 + r_0 \Omega_1 \tau_1 + r_1 \Omega_1 \tau_1. \quad (12)$$

で与えられ、 $r$  方向電流  $i_r$  は、

$$\begin{aligned} i_r &= (\tau_0 + \tau_1) \frac{d}{dt} (r_0 + r_1) = (\tau_0 + \tau_1) \left[ (\Omega_0 + \Omega_1) \frac{\partial r_1}{\partial t} + \frac{\partial r_1}{\partial t} \right] \\ &= j r_1 \left( \omega \tau_0 - \beta \Omega_0 \tau_0 - \beta \tau_0 \Omega_1 + \omega \tau_1 - \beta \Omega_0 \tau_1 - \beta \Omega_1 \tau_1 \right). \end{aligned} \quad (13)$$

となる。連続方程式は

$$\nabla \cdot (\vec{l}_r i_r + \vec{l}_\theta I_\theta) = - \frac{\partial}{\partial t} (\tau_0 + \tau_1). \quad (14)$$

で示され、 $\vec{l}_r$ ,  $\vec{l}_\theta$  はそれぞれ  $r$  方向と  $\theta$  方向の単位ベクトル量である。ここで  $\tau_0$  は電子流の equivalent ring charge density の直流分、 $\tau_1$  はその高周波分である。体積密度の直流分および高周波分を  $\rho_0$  と  $\rho_1$  とおけば、 $\tau_0 = \rho_0 h \sigma$  および  $\tau_1 = \rho_1 h \sigma$  の関係がある。ここで  $h$  は電子流の  $z$  方向の高さである。 $\sigma$  は前述したように半径方向厚さである。式 (14) を円筒座標系で示すと、

$$\frac{i_r}{r_0 + r_1} + \frac{\partial i_r}{\partial r} + \left( \frac{1}{r_0 + r_1} \right) \frac{\partial i_\theta}{\partial \theta} = - \frac{\partial \tau_1}{\partial t}. \quad (15)$$

Eulerian-fluid の仮定および式 (12) と (13) とを式 (15) に代入すれば、

$$\begin{aligned} &\frac{r_1}{r_0 + r_1} \left[ \tau_0 (\omega - \beta \Omega_0) + \tau_1 (\omega - \beta \Omega_0) - \beta \tau_0 \Omega_1 - \beta \Omega_1 \tau_1 \right] \\ &\quad - \frac{\beta}{r_0 + r_1} \left[ \tau_0 r_1 (\Omega_0 + \Omega_1) + \tau_0 r_0 \Omega_1 + \Omega_0 \tau_1 (r_0 + r_1) + r_0 \Omega_1 \tau_1 + r_1 \Omega_1 \tau_1 \right] = -\omega \tau_1. \end{aligned} \quad (16)$$

を得る。

さてきわめて薄い ribbon 状電子ビームを用い、単一走行小信号理論を仮定すれば、運動方程式 (8) と (9) および連続方程式 (16) はつぎのように簡単となる。

$$r_1 \Omega_0^2 \left[ (\beta_e - \beta)^2 + 2 \right] + \Omega_1 (2 \Omega_0 r_0) = \eta E_r, \quad (17)$$

$$2 r_1 \Omega_0^2 (\beta_e - \beta) + \Omega_0 \Omega_1 r_0 (\beta_e - \beta) = j \eta E_\theta, \quad (18)$$

$$r_1 (\beta_e - 2\beta) + \Omega_1 \left( \frac{-\beta r_0}{\Omega_0} \right) + \tau_1 \left[ \frac{r_0 (\beta_e - \beta)}{\tau_0} \right] = 0. \quad (19)$$

ここで

$$\beta_e = \frac{\omega}{\Omega_0}, \quad \text{electrical radian/spatial radian} \quad (20)$$

で与えられ、電子ビーム上を同じ角速度で伝ばんする disturbance の circular propagation constant であり、beam-circuit systems における波の特性決定上重要な量である。したがって perturbation functions  $r_1$ ,  $\Omega_1$  および  $\tau_1$  は

$$r_1 = \frac{\eta \Omega_0^2 r_0^2}{\tau_0 \mathcal{A}_S} (\beta_e - \beta) \left[ E_r (\beta_e - \beta) - j 2 E_\theta \right], \quad (21)$$

$$\Omega_1 = \frac{\eta \Omega_0^2 r_0}{\tau_0 \mathcal{A}_S} (\beta_e - \beta) \left[ 2 E_r (\beta_e - \beta) + j E_\theta \left( (\beta_e - \beta)^2 + 2 \right) \right], \quad (22)$$

$$\tau_1 = \frac{\eta \Omega_0^2 r_0}{\mathcal{A}_S} (\beta_e - \beta) \left[ -E_r \beta_e + j E_\theta \left( (\beta_e - \beta) \beta + 2 \right) \right]. \quad (23)$$

となり,  $A_S$  は

$$A_S = \frac{\Omega_0^3 r_0^2 (\beta_e - \beta)^2}{\tau_0} [(\beta_e - \beta)^2 - 2]. \quad (24)$$

で与えられる。さらに小信号理論における  $i_\theta$  と  $i_r$  は,

$$i_\theta = \Omega_0 \tau_0 r_1 + r_0 \tau_0 \Omega_1 + \Omega_0 r_0 \tau_1, \quad (25)$$

$$i_r = j \tau_0 \Omega_0 r_1 (\beta_e - \beta). \quad (26)$$

となるから, 式 (21), (22) および (23) を用いて書きかえると,

$$i_\theta = \frac{\eta \tau_0}{\Omega_0 (\beta_e - \beta)} \left[ \frac{-E_r (2\beta_e - \beta) + j E_\theta ((\beta_e - \beta) \beta_e + 2)}{(\beta_e - \beta)^2 - 2} \right], \quad (27)$$

$$i_r = \frac{j \eta \tau_0}{\Omega_0} \left[ \frac{E_r (\beta_e - \beta) - j 2 E_\theta}{(\beta_e - \beta)^2 - 2} \right]. \quad (28)$$

また連続方程式 (15) から

$$\tau_1 = \left[ \frac{\beta}{\omega r_0} i_\theta + j \frac{i_r}{\omega r_0} \right]. \quad (29)$$

それ故式 (27) と (28) を使って書きかえると,

$$\tau_1 = \frac{\eta \tau_0}{\Omega_0^2 r_0 (\beta_e - \beta)} \left[ \frac{-\beta_e E_r + j E_\theta ((\beta_e - \beta) \beta_e + 2)}{(\beta_e - \beta)^2 - 2} \right]. \quad (30)$$

となる。

### 3. 前進波回路方程式

CEF 型増幅装置に使用される遅波回路の回路方程式はつぎのように与えられる<sup>4)</sup>。

$$\begin{aligned} \frac{Z_{0,0}}{Z_{0,1}} (v_{0,0} v_{0,1}) \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \left( \frac{v_{0,0}}{r_c} \right)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \\ - \left( 1 + \frac{v_{0,0}}{v_{0,1}} \frac{Z_{0,0}}{Z_{0,1}} \right) \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -(v_{0,0} Z_{0,0}) \frac{\partial^2 (k_c \tau_1)}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (31)$$

ここで  $V$  は biperiodic structures の高周波電圧で  $z$ ,  $\theta$  および  $t$  の関数,  $k_c$  は ribbon 状電子ビームと biperiodic circuit との間の coupling factor,  $v_{0,0}$  は遅波回路の表面における位相速度の接線成分,  $v_{0,1}$  は遅波回路の表面における位相速度の軸方向成分,  $Z_{0,0}$  は遅波回路表面における回路 impedance の  $\theta$  成分, さらに  $Z_{0,1}$  は遅波回路表面の回路 impedance の  $z$  成分である。いま  $E_r$  と  $E_\theta$  との関係を

$$E_r = j E_\theta (f_r + j g_r). \quad (32)$$

で表示する。 $f_r$  は界の比の実数部であり,  $g_r$  は虚数部である。通常の CEF 型装置の遅波回路では  $f_r \cong -1.0$ ,  $g_r \cong 0$  となる<sup>1), 2)</sup>。また電子ビームの中心半径  $r_0$  における  $E_\theta$  と高周波電圧  $V$  とは

$$E_\theta = -\frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial t} (k_c V) = j\beta k_c \frac{V}{r_0}. \quad (33)$$

で与えられ,  $r_0$  における実効的な interaction impedance  $K$  は, つぎのように定義される<sup>1),2)</sup>。

$$K = \left| \frac{k_c^2 r_c Z_{0,0}}{r_0} \right|. \quad (34)$$

さらに高周波量が  $e^{j(\omega t - \beta \theta - \tau z)}$  のように変化するとし,

$$v_{0,0} = \omega r_c / \beta_0, \quad v_{0,1} = \omega / \gamma. \quad (35)$$

$$\omega = \beta_c \Omega_0. \quad (36)$$

を使うと前進波に対する回路方程式は,

$$E_\theta = + \frac{j\beta\beta_0\omega K}{\beta_0^2 - \beta^2} \tau_1. \quad (37)$$

となる。

#### 4. 特性方程式

Ring charge density の高周波分  $\tau_1$  を与える電子方程式 (30) と回路方程式 (37) より,

$$V = \left( \frac{-\eta\tau_0 K}{\Omega_0 r_0} \right) \left( \frac{\beta\beta_0\beta_c V}{\beta_0^2 - \beta^2} \right) \left( \frac{\beta}{\beta_c - \beta} \right) \left[ \frac{\beta(\beta_c - \beta) + \beta_c + 2}{\beta(\beta_c - \beta)^2 - 2\beta} \right]. \quad (38)$$

いま gain parameter  $C$  を

$$C^3 \equiv \frac{-\eta\tau_0 K}{\Omega_0 r_0} = \frac{KI_0}{2V_0}. \quad (39)$$

で定義すれば, 特性方程式は

$$\frac{C^3 \beta^2 \beta_0 \beta_c}{(\beta_0^2 - \beta^2)(\beta_c - \beta)} \left[ \frac{\beta(\beta_c - \beta) + \beta_c + 2}{\beta(\beta_c - \beta)^2 - 2\beta} \right] = 1. \quad (40)$$

となる。いま電子ビームが存在するときの circular propagation constant を  $\beta$ , cold propagation constant を  $\beta_0$  とし, small perturbation の取扱いによって特性方程式を考察する。いま無損失回路の場合を考えて  $\beta$  と  $\beta_0$  をつぎのようにおく。

$$\beta = \beta_c (1 + jC\delta), \quad \beta_0 = \beta_c (1 + Cb). \quad (41)$$

ここで

$$\delta = x + jy. \quad (42)$$

であり, circular propagation constant の相互作用による変化分を与える。また  $b$  は電子入射速度係数である。したがって

$$e^{-j\beta_0\theta} = e^{-j\beta_c\theta(1+Cb)}, \quad (43)$$

$$e^{-j\beta\theta} = e^{-j\beta_c\theta(1-Cy)} \cdot e^{\beta_c C\theta x}. \quad (44)$$

とおけるから, 電子流の角速度  $\Omega_0$  が, 高周波界の空間角速度  $\Omega_W$  より大きいと  $b$  は正であり,

反対なら  $b$  は負となる。また両者が完全同期していれば  $b$  は零となる。ここで  $\Omega_W$  は cold な角速度である。つぎに式 (44) の右辺第二項よりつぎのことがいえる。つまり  $x$  が正ならこの第二項は 1 より大きくなり、空間角  $\theta$  に対して指数的に増大する波を示し、 $x$  が負ならこの項は 1 より小さく  $\theta$  に関して指数的に減少する。また  $x$  が零であれば一定振幅波となる。同式右辺の第一項は位相を示し  $y$  に関する。いま  $x$  を零とし、高周波界の hot な角速度を  $\Omega_{W1}$  とすれば、

$$\beta = \frac{\omega}{\Omega_{W1}}. \quad (45)$$

となるから、

$$\Omega_{W1} = \Omega_0(1 + Cy). \quad (46)$$

を得る。ここで  $Cy \ll 1$  と仮定した。したがって、 $y > 0$  なら高周波界角速度は電子ビームのそれより大きく、 $y < 0$  なら電子ビーム角速度が大きくなり、また  $y = 0$  は両者が同期していることを知る。式 (41) を用いて式 (40) を書きかえると

$$\begin{aligned} & \delta^6 (\beta_c^4 C^6) + \delta^5 (-j3\beta_c^4 C^5) + \delta^4 \left[ \beta_c^4 C^6 b^2 + \beta_c^4 C^5 (2 - C^3) b - \beta_c^2 C^4 (\beta_c^2 C^3 - 2 + 2\beta_c^2) \right] \\ & + \delta^3 j \left[ -\beta_c^4 C^5 b^2 + \beta_c^4 C^4 (3C^3 - 2) b + 3\beta_c^2 C^3 (\beta_c^2 C^3 - 2) \right] \\ & + \delta^2 \left[ 2\beta_c^2 C^4 b^2 + \beta_c^2 C^3 (3\beta_c^2 C^3 - \beta_c C^3 - 2C^3 + 4) b + \beta_c^2 C^2 (3\beta_c^2 C^3 - \beta_c C^3 - 2C^3 - 4) \right] \\ & + \delta j \left[ -2\beta_c^2 C^3 b^2 - \beta_c^2 C^2 (\beta_c^2 C^3 - 2\beta_c C^3 - 4C^3 + 4) b - \beta_c^2 C^4 (\beta_c^2 - 2\beta_c - 4) \right] \\ & + \beta_c^2 C^3 (\beta_c + 2) (bC + 1) = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

となる。いま実用上必要であり、相互作用の特質を明らかにするため、

$$\beta_c \approx 20, \quad C \approx 0.05 \quad (48)$$

の場合を考えると、式 (47) は

$$\begin{aligned} & \delta^6 + \delta^5 \left( -j \frac{3}{C} \right) + \delta^4 \left( b^2 + \frac{2}{C} b - \frac{2}{C^2} \right) + \delta^3 j \left( -\frac{1}{C} b^2 - \frac{2}{C^2} b - \frac{6}{\beta_c^2 C^3} \right) \\ & + \delta^2 \left( \frac{2}{\beta_c^2 C^2} b^2 + \frac{4}{\beta_c^2 C^3} b - \frac{4}{\beta_c^2 C^4} \right) \\ & + \delta j \left( \frac{-2}{\beta_c^2 C^3} b^2 - \frac{4}{\beta_c^2 C^4} b - \frac{1}{C^2} \right) + \left( \frac{b}{\beta_c C^2} + \frac{1}{\beta_c C^3} \right) \approx 0. \end{aligned} \quad (49)$$

となる。これらの波のうち一つは

$$\delta_6 \approx j \left( b + \frac{2}{C} \right). \quad (50)$$

となり、反対方向に進む波を示す。他の一つの波は

$$\delta_5 = \frac{j}{C}. \quad (51)$$

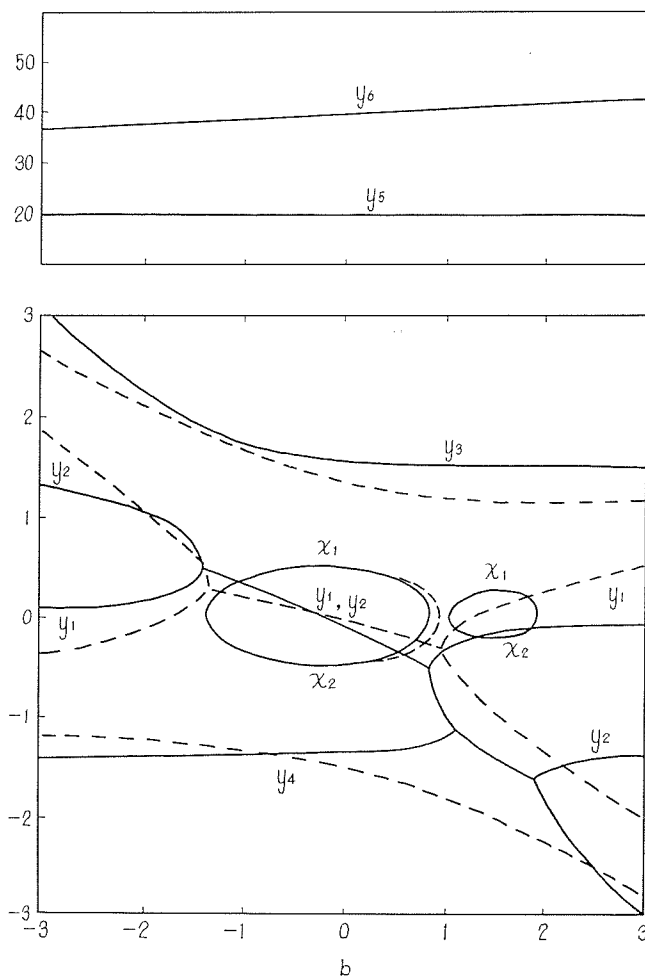
であり、 $\theta$  方向速度成分をもたない<sup>1),2)</sup>。したがってのこの四波を調べると相互作用の特性を

知り得る。したがっていま簡単のため式(49)の $\delta^4$ の項以下を考慮し、かつ増幅装置として興味のあるのは、増大波が得られる領域であるから、式(49)を適当に近似して

$$\delta^4 + \delta^3 j \left( b + \frac{3}{\beta_e^2 C} \right) + \delta^2 \left( \frac{2}{\beta_e^2 C^2} \right) + \delta \frac{j}{\beta_e^2 C^2} \left( 2b + \frac{\beta_e^2 C^2}{2} \right) - \frac{1}{2\beta_e C} \left( \frac{1}{2} b C + 1 \right) \approx 0, \quad (52)$$

とすれば、近似解は

$$\delta_{1,2} \approx \pm \frac{1}{4} \sqrt{4\beta_e C - 3 \left( b + \frac{3}{\beta_e^2 C} \right)^2} - j \frac{1}{4} \left( b + \frac{3}{\beta_e^2 C} \right), \quad (53)$$



**Fig. 2.** The forward-wave incremental propagation constants of the CEF-type forward-wave amplifiers. ( $Q=0$ ,  $d=0$ ,  $\beta_e \approx 20$  and  $C \approx 0.05$ ). These curves compare an exact values of Eq. 49 (solid curves) with the approximate expression given by Eqs. 53 and 54 (dashed curve).

$$\delta_{3,4} \approx \pm j \frac{1}{4} \left[ \sqrt{\frac{32}{\beta_e^2 C^2} + 3 \left( b + \frac{3}{\beta_e^2 C} \right)^2} \mp \left( b + \frac{3}{\beta_e^2 C} \right) \right]. \quad (54)$$

となる。  $\left[ -(2\sqrt{3\beta_e C}/3) - (3/\beta_e^2 C) \right] < b < \left[ (2\sqrt{3\beta_e C}/3) - (3/\beta_e^2 C) \right]$  の領域には、増大波と減衰波および二つの一定振幅波が存在する。増大波  $\delta_1$  と減衰波  $\delta_2$  の  $x$  の絶対値は等しく符号反対であり、位相速度はともに等しい。第三の波  $\delta_3$  は  $\Omega_0$  より早い位相速度をもち、第四の波  $\delta_4$  は  $\Omega_0$  より遅い位相速度をもち、振幅はともに一定である。これらの  $\delta_3$  と  $\delta_4$  の両波は、CEF 型集束系に特有な characteristic ripple angle をもった定在波であり、相互作用の影響がきわめて少ない<sup>5)</sup>。また  $b=0$  のとき、これらは完全同期の場合の結果に一致する<sup>6)</sup>。

つぎに  $b$  の変化に対する  $\delta$  の近似の程度を調べるため、 $\delta$  の 6 次式 (49) と近似式 (52) の数値計算結果の比較を Fig. 2 に示す。すなわち 4 次式 (52) で近似した結果、two-island effects における一つの island が消え、 $b \approx 0$  附近の island のみが残る。しかし近似式 (52) を用いると、増大波領域でかなりよい近似が得られることを知る。比較のために、O 型と M 型の前進波増幅装置における  $\delta$  の変化を Fig. 3 と Fig. 4 に示した<sup>7), 8)</sup>。

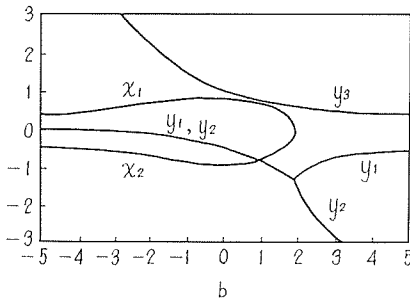


Fig. 3. The three waves of an O-type forward-wave amplifier vary with distance as  $\exp(-j\beta_e + j\beta_e C y + \beta_e C x)z$ . Here the  $x$ 's and  $y$ 's for the three waves are shown vs. the velocity parameter  $b$  for no attenuation and no space charge. (Pierce)

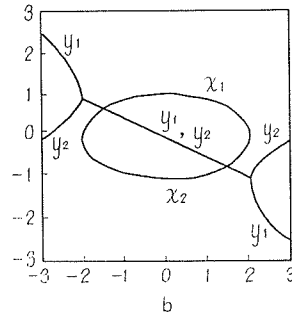


Fig. 4. The two waves of a M-type forward-wave amplifier vary with distance as  $\exp(-j\beta_e + j\beta_e D y + \beta_e C x)z$ . Here  $x$ 's and  $y$ 's for the two waves are shown vs. the velocity parameter  $b$  for no attenuation and no space charge. (Mourier)

### 5. 電子入射速度と小信号利得

四つの波の入力端における境界条件は、

$$\sum_{n=1}^4 V_n = V_{RO}, \quad (55)$$

$$\sum_{n=1}^4 i_{0n} = 0, \quad (56)$$

$$\sum_{n=1}^4 i_{rn} = 0, \quad (57)$$

$$\sum_{n=1}^4 \dot{\Omega}_n = 0, \quad (58)$$

となる。ここで  $V_{RO}$  は  $\theta=0$  における遅波回路への入力信号,  $V_n$  は  $\theta=0$  における第  $n$  波の高周波電圧,  $i_{\theta n}$  は  $\theta=0, r=r_0$  における第  $n$  波の  $\theta$  方向電流,  $i_{rn}$  は  $\theta=0, r=r_0$  における第  $n$  波の  $r$  方向電流,  $\Omega_n$  は  $\theta=0, r=r_0$  における第  $n$  波の角速度の perturbations である。すなわち入力信号が四つの波の和に等しく, 相互作用域の入口で no prebunching および no velocity modulation の場合を考察する。上式を matrix-form にすれば,

$$\begin{pmatrix} V_{RO} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ C_{\theta 1} & C_{\theta 2} & C_{\theta 3} & C_{\theta 4} \\ C_{r1} & C_{r2} & C_{r3} & C_{r4} \\ C_{\Omega 1} & C_{\Omega 2} & C_{\Omega 3} & C_{\Omega 4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} \quad (59)$$

ここで係数  $C_{\theta n}$ ,  $C_{rn}$  および  $C_{\Omega n}$  は次式で与えられる。

$$C_{\theta n} = \frac{\beta_e^2 (1 + C^2 \delta_n^2) + 2\beta_e (1 - C^2 \delta_n^2) + 2\beta_e (\beta_e C \delta_n)^2 + j [\beta_e^2 C \delta_n (1 + C^2 \delta_n^2) + 4\beta_e C \delta_n - \beta_e^3 C \delta_n (1 - C^2 \delta_n^2)]}{-(\beta_e C \delta_n)^2 [2 + (\beta_e C \delta_n)^2] + j\beta_e^2 C \delta_n [(\beta_e C \delta_n)^2 + 2]}, \quad (60)$$

$$C_{rn} = \frac{(1 - C^2 \delta_n^2) (\beta_e C \delta_n)^2 - 4\beta_e C^2 \delta_n^2 + j [2C \delta_n (\beta_e C \delta_n)^2 + 2\beta_e C \delta_n (1 - C^2 \delta_n^2)]}{-(\beta_e C \delta_n)^2 [2 + (\beta_e C \delta_n)^2] + j\beta_e^2 C \delta_n [(\beta_e C \delta_n)^2 + 2]}, \quad (61)$$

$$C_{\Omega n} = \frac{2\beta_e C^2 \delta_n^2 [2 - (\beta_e C \delta_n)^2 - \beta_e (1 - C^2 \delta_n^2)] + j [-4C \delta_n (\beta_e C \delta_n)^2 - \beta_e C \delta_n (1 - C^2 \delta_n^2) (2 - \beta_e^2 C^2 \delta_n^2)]}{\beta_e [2 + (\beta_e C \delta_n)^2] (\beta_e C \delta_n)^2 (1 + jC \delta_n)}, \quad (62)$$

式 (59) の  $C$ -matrix の inverse は

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{V_1}{V_{RO}}\right) \\ \left(\frac{V_2}{V_{RO}}\right) \\ \left(\frac{V_3}{V_{RO}}\right) \\ \left(\frac{V_4}{V_{RO}}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} \\ D_{21} \\ D_{31} \\ D_{41} \end{pmatrix}, \quad (63)$$

となる。 $D$ -matrix は  $C$ -matrix の inverse の symbolic form であり,  $D$ -element は一般に,

$$D_{n1} = u_{n1} + jv_{n1} \quad (64)$$

となる。

さて前述した動作条件  $\beta_e \approx 20$  と  $C \approx 0.05$  およびかなり小さい  $b$  の値のとき,  $\delta_n$  の近似解 (53) と (54) を用いて  $C$ -elements および  $D$ -elements を計算すると,

$$C_{\theta 1} \approx \frac{-\beta_e}{2 \left[ 1 - \frac{1}{2\beta_e C} \left( b + \frac{3}{\beta_e^2 C} \right)^2 \right]} - j \frac{\left[ 1 - \frac{3}{4\beta_e C} \left( b + \frac{3}{\beta_e^2 C} \right)^2 \right]^{1/2}}{C \sqrt{\beta_e C} \left[ 1 - \frac{1}{2\beta_e C} \left( b + \frac{3}{\beta_e^2 C} \right)^2 \right]}, \quad (65)$$

$$C_{\theta 2} \approx \frac{-\beta_e}{2 \left[ 1 - \frac{1}{2\beta_e C} \left( b + \frac{3}{\beta_e^2 C} \right)^2 \right]} + j \frac{\left[ 1 - \frac{3}{4\beta_e C} \left( b + \frac{3}{\beta_e^2 C} \right)^2 \right]^{1/2}}{C \sqrt{\beta_e C} \left[ 1 - \frac{1}{2\beta_e C} \left( b + \frac{3}{\beta_e^2 C} \right)^2 \right]}, \quad (66)$$

$$C_{r3} \approx \frac{-\beta_e^2(\sqrt{2}+1)}{\beta_e^2 C b + 3}, \quad (67)$$

$$C_{r4} \approx \frac{\beta_e^2(\sqrt{2}-1)}{\beta_e^2 C b + 3}. \quad (68)$$

$$C_{r1} \approx \frac{1 - \frac{1}{4} \beta_e^2 C^2 \left(b + \frac{3}{\beta_e^2 C}\right)^2}{\beta_e} - j \frac{C \sqrt{\beta_e C} \left[1 - \frac{3}{4 \beta_e C} \left(b + \frac{3}{\beta_e^2 C}\right)^2\right]^{1/2}}{4}, \quad (69)$$

$$C_{r2} \approx \frac{1 - \frac{1}{4} \beta_e^2 C^2 \left(b + \frac{3}{\beta_e^2 C}\right)^2}{\beta_e} + j \frac{C \sqrt{\beta_e C} \left[1 - \frac{3}{4 \beta_e C} \left(b + \frac{3}{\beta_e^2 C}\right)^2\right]^{1/2}}{4}, \quad (70)$$

$$C_{r3} \approx \frac{2(\sqrt{2}+1)}{\beta_e^2 C b + 3}, \quad (71)$$

$$C_{r4} \approx \frac{-2(\sqrt{2}-1)}{\beta_e^2 C b + 3}. \quad (72)$$

$$C_{\theta 1} \approx \frac{-\left[1 - \frac{3}{4 \beta_e C} \left(b + \frac{3}{\beta_e^2 C}\right)^2\right]}{\beta_e \left[1 - \frac{1}{2 \beta_e C} \left(b + \frac{3}{\beta_e^2 C}\right)^2\right]} - j \frac{2 \left[1 - \frac{3}{4 \beta_e C} \left(b + \frac{3}{\beta_e^2 C}\right)^2\right]^{1/2}}{\beta_e^2 C \sqrt{\beta_e C} \left[1 - \frac{1}{2 \beta_e C} \left(b + \frac{3}{\beta_e^2 C}\right)^2\right]}, \quad (73)$$

$$C_{\theta 2} \approx \frac{-\left[1 - \frac{3}{4 \beta_e C} \left(b + \frac{3}{\beta_e^2 C}\right)^2\right]}{\beta_e \left[1 - \frac{1}{2 \beta_e C} \left(b + \frac{3}{\beta_e^2 C}\right)^2\right]} + j \frac{2 \left[1 - \frac{3}{4 \beta_e C} \left(b + \frac{3}{\beta_e^2 C}\right)^2\right]^{1/2}}{\beta_e^2 C \sqrt{\beta_e C} \left[1 - \frac{1}{2 \beta_e C} \left(b + \frac{3}{\beta_e^2 C}\right)^2\right]}, \quad (74)$$

$$C_{\theta 3} \approx \frac{-2[2+\sqrt{2}]}{\beta_e^2 C b + 3}, \quad (75)$$

$$C_{\theta 4} \approx \frac{-2[2-\sqrt{2}]}{\beta_e^2 C b + 3}, \quad (76)$$

$$u_{11} \approx \frac{1}{2}, \quad v_{11} \approx 0, \quad (77)$$

$$u_{21} \approx \frac{1}{2}, \quad v_{21} \approx 0, \quad (78)$$

$$u_{31} \approx \frac{-3}{4\sqrt{2} \beta_e}, \quad v_{31} \approx 0. \quad (79)$$

$$u_{41} \approx \frac{3}{4\sqrt{2} \beta_e}, \quad v_{41} \approx 0. \quad (80)$$

したがって前進波増幅装置の  $b$  の影響を含めた小信号利得は

$$\begin{aligned} \text{Gain (db)} &= 10 \log_{10} \left| \sum_{n=1}^4 e^{j\phi y_n} \left[ u_{n1} \cos \phi y_n - v_{n1} \sin \phi y_n \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + j \left( v_{n1} \cos \phi y_n + u_{n1} \sin \phi y_n \right) \right] \right|^2 \\ &\approx 10 \log_{10} \left[ \cosh^2 \frac{\sqrt{\beta_e C}}{2} \sqrt{1 - \frac{3}{4 \beta_e C} \left(b + \frac{3}{\beta_e^2 C}\right)^2} \phi \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{9}{8\beta_e^2} \sin^2 \frac{\sqrt{2}}{\beta_e C} \sqrt{1 + \frac{3}{32} \beta_e^2 C^2 \left(b + \frac{3}{\beta_e^2 C}\right)^2} \phi \Big]. \quad (81)$$

となる。ここで空間角度  $\theta$  に対する電気角  $\phi$  は、

$$\phi = \beta_e C \theta = 2\pi CN. \quad (82)$$

である。 $N$  は相互作用域の空間角度  $\theta$  に対する wave angle の数である。式 (81) は、無損失回路、零空間電荷、 $\beta_e \approx 20$  および  $C \approx 0.05$  の場合、電子入射速度の影響を考慮した利得の表示式である。 $b=0$  とすれば完全同期の場合に得られた結果と一致する<sup>6)</sup>。

この利得における第一項は、増大波および減衰波による利得であり、第二項は CEF 型電子ビーム集束系における characteristic ripple によるものである。しかるに  $\beta_e \approx 20$ ,  $C \approx 0.05$  の領域では、第二項は省略し得るから、利得は

$$\text{Gain (db)} \approx 10 \log_{10} \left[ \cosh^2 \left( \pi CN \sqrt{1 - \frac{3}{4\beta_e C} \left(b + \frac{3}{\beta_e C}\right)^2} \right) \right]. \quad (83)$$

で近似し得る。Fig. 5 に異なる  $CN$  に対する  $b$  対利得の計算値を示す。大きな  $CN$  になるほど狭帯域となることを知る。

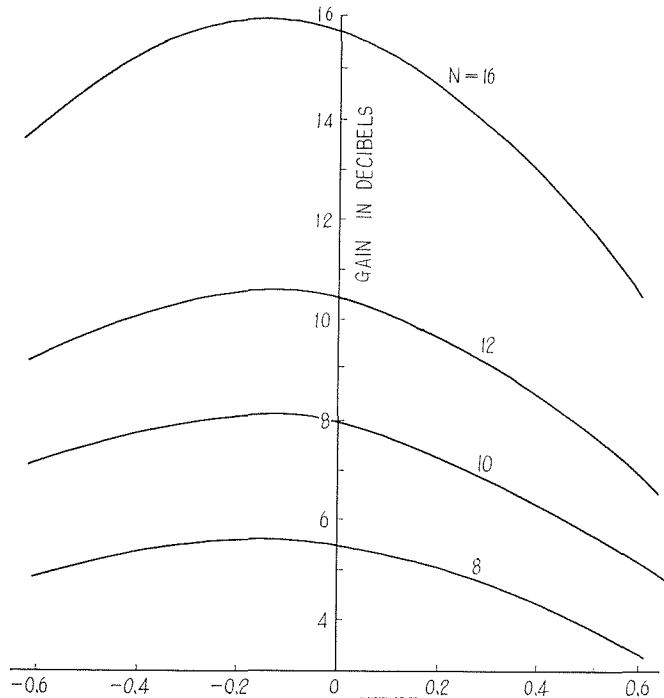


Fig. 5. Effect of electron injection velocity variations on gain characteristics with  $N$  as parameter.  $Q=0$ ,  $d=0$ ,  $\beta_e \approx 20$  and  $C \approx 0.05$ .

## 6. 結 言

CEF 型前進波増幅装置の無損失、零空間電荷、 $\beta_e \approx 20$  および  $C \approx 0.05$  の場合、小さい  $b$

の影響を含めた小信号利得の表示式がはじめて与えられた。Beam-circuit systems には増大波と減衰波および CEF 型集束系固有の波が存在するが、利得は前二者の二波によってほぼ決定し、 $CN$  の小さいほど広帯域となる。

つぎに  $b$  の値の大きい増大波域両端における利得の近似式は、かなり複雑であり実用に乏しい故、多くの数値計算によって相互作用の機構を明らかにし得ると考えられ、今後の課題である。

おわりに研究の機会を与えて下さった電子工学科の方々、および CEF 型増幅装置の小信号理論に関する digital computer program について御助言下さった村田茂昭助教授に感謝する。また多くの資料を御教示下さった Professor Joseph E. Rowe と Professor W. M. Nunn, Jr. に深謝するとともに、数値計算と校正に協力された小柳幸次郎技官の労を多とする。

#### 参 考 文 献

- 1) Nunn, W. M., Jr. and Rowe, J. E.: "Single-Transit, Large-Radius E-Type Devices", Trans. PGED-IRE, vol. ED-8, pp. 508-520 (1961-11).
- 2) Nunn, W. M., Jr.: "Single-Transit E-Type Traveling-Wave Devices", Journal of Electronics and Control, vol. 15, No. 3, pp. 201-227 (1963-9).
- 3) Sakuraba, I. and Rowe, J. E.: "Small-Signal Power Theorems and Dispersion in E-Type Electron Beams", Technical Report No. 76, Electron Physics Laboratory, Department of Electrical Engineering, The University of Michigan. (1964-11).
- 4) Rowe, J. E.: "Nonlinear Electron-Wave Interaction Phenomena", Academic Press, New York and London, pp. 54-62 (1965).
- 5) 桜庭一郎: "遠心力を用いた静電界集束系における電子軌道", 北海道大学工学部研究報告, 第 40 号, pp. 77-86 (1966-3).
- 6) 桜庭一郎・平石雅昭: "CEF 型前進波増幅装置の利得", 北海道大学工学部研究報告, 第 41 号, pp. 121-133 (1966-8).
- 7) Pierce, J. R.: "Traveling-Wave Tubes", D. Van Nostrand, INC., New York (1950).
- 8) Mourier, G.: "Small Signal Theory", Crossed-Field Microwave Devices, Vol. 1, Academic Press, New York and London, pp. 395-435 (1961).