



# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	せん断流における二次元的後流について
Author(s)	木谷, 勝; Kiya, Masaru; 有江, 幹男 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 42, 1-10
Issue Date	1967-01-05
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/40815">https://hdl.handle.net/2115/40815</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	42_1-10.pdf



# せん断流における二次元的後流について

木 谷 勝\*  
有 江 幹 男\*

## Two-dimensional Wake in a Simple Shear Flow

Masaru KIYA  
Mikio ARIE

### Abstract

The velocity distribution in the wake of a two-dimensional body located in a simple shear flow is described. With the assumption of constant eddy viscosity the components of velocity are expanded into the power series of small  $\omega d/U_0$ , where  $\omega$  is the transverse velocity gradient of the oncoming stream,  $d$  is the representative length of the body and  $U_0$  is the velocity of the approaching flow at the centre of the body. The spread of the wake is found to be greater towards the side of the smaller velocity than on the side of the larger one as would physically be expected. It is also shown that the effect of the transverse velocity gradient of the oncoming flow on the drag coefficient of the body is of a higher order than the first power of  $\omega d/U_0$ .

### 1. 緒 言

一様流の中におかれた物体の乱れた後流中の流れについては実験結果が多数報告されており<sup>1)~3)</sup>, また渦粘性係数  $\epsilon$  を導入してえられる理論解は  $\epsilon$  を適当に選択すると実験値と比較的よく一致する結果を与える<sup>4)</sup>。物体への近寄り流れにこれと直角方向の速度勾配が存在するいわゆるせん断流の場合には、物体の後流に関する研究はほとんど行なわれていないようで、著者らの知る範囲では軸対称物体の後流について M. Z. V. Krzywoblocki<sup>5)</sup> の行なった研究がほとんど唯一のものである。すなわち、Krzywoblocki は後流の外側の流れが軸対称の速度変化をなすようなせん断流を取り扱っており、レイノルズ応力と平均速度とを結びつけるために特殊な仮定を行なっていて、とくに一様流の場合からの摂動としてせん断の影響を考えるという立場をとってはいない。本論文は二次元的なせん断流の最も簡単な場合として速度勾配一定、すなわち渦度一定の近寄り流れの中におかれた円筒（一般に対称形を有する二次元物体であってよい）の後流中における速度分布を渦粘性係数を用いて理論的に算定したものである。近寄り流れの速度分布  $U_{1\infty} = U_0 + \omega x_2$  において  $\omega$  はあまり大きな量ではないと仮定し、摂動パラメー

\* 流体工学第一講座

タ  $\lambda = \omega d / U_0$  ( $d$  は物体の代表寸法) を用いて摂動展開式として解を求めてある。

著者らは以前にかかるせん断流中に設置された円筒表面の圧力分布を測定し、これを用いて円筒に作用する抗力を算出した結果一様流の場合とほぼ一致する値をえた<sup>6)</sup>。物体に作用する抗力は物体をつつむ十分大きな制御体積についての運動量の釣合いと密接に結びついているものであるから、後流の速度分布と抗力とは不可分の関係にある。本論文ではまた前述の方法でえられた後流の速度分布を用いて運動量を計算し、抗力におよぼす近寄り流れの含む速度勾配の影響は  $\lambda$  よりも高次の微小量であることを明らかにしてある。

## 記 号

$x_1, x_2$ : 直角座標

$U_1, U_2$ : 平均速度成分

$u'_1, u'_2$ : 乱流速度成分

$U_{1\infty}$ : 近寄り流れの速度分布

$U_0$ :  $x_2=0$  における近寄り流れの速度

$P$ : 平均圧力

$\omega$ : 近寄り流れの速度勾配

$d$ : 物体の代表寸法 (円筒の場合には直径)

$\rho$ : 密度

$\nu$ : 動粘性係数

$\varepsilon$ : 渦粘性係数

$q_1 = (U_0 + \omega x_2) - U_1$

$q_2 = U_2$

無次元量  $\lambda = \omega d / U_0$

$\varepsilon_0 = \varepsilon / U_0 d$

$\xi_1 = x_1 / d$

$\xi_2 = x_2 / d$

$\tilde{q}_1 = q_1 / U_0$

$\tilde{q}_2 = q_2 / U_0$

$\tilde{P} = P / \rho U_0^2$

## 2. 基礎方程式

$x_1, x_2$  平面内における非圧縮性二次元乱流を記述する基礎方程式は、Navier-Stokes 方程式

$$U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_1} + \nu \nabla^2 U_1 - \frac{\partial \overline{u_1'^2}}{\partial x_1} - \frac{\partial \overline{u_1' u_2'}}{\partial x_2} \quad (1-a)$$

$$U_1 \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial U_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_2} + \nu F^2 U_2 - \frac{\partial \overline{u_1' u_2'}}{\partial x_1} - \frac{\partial \overline{u_2'^2}}{\partial x_2} \quad (1-b)$$

および連続の方程式

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} = 0 \quad (1-c)$$

の三つである。いま代表寸法が  $d$  で表わされる二次元物体が、直線形 velocity 分布

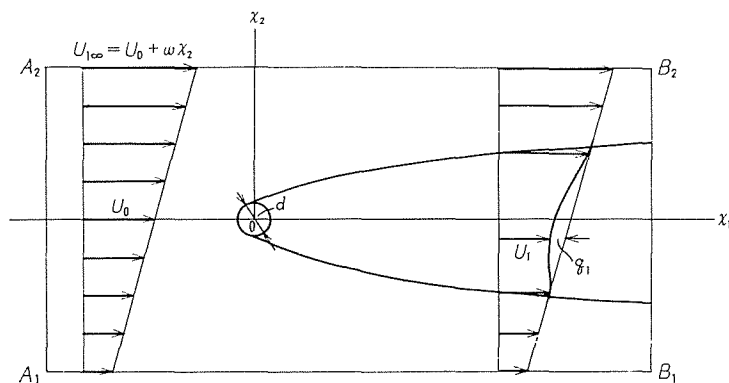
$$U_{1\infty} = U_0 + \omega x_2 \quad (2)$$

をなす近寄り流れの中におかれているものとし、かつ物体は直角座標  $x_1, x_2$  の原点に一致しているものとする。(1) 式における  $U_1, U_2$  は後流中の平均速度成分を、 $u_1', u_2'$  は対応する乱流速度成分を表わすものとし、あらたに

$$q_1 = (U_0 + \omega x_2) - U_1 \quad (3-a)$$

$$q_2 = U_2 \quad (3-b)$$

なる変数を導入する。 $q_1$  は後流中における速度欠損量を表わすものであることは第 1 図より明らかである。(3) 式を (1) 式に代入し、粘性項  $\nu F^2 U_1$  および  $\nu F^2 U_2$  が他の項に比較して無視できるような十分大きなレイノルズ数の流れを考えることにすれば



第 1 図

$$-\left(U_0 + \omega x_2 - q_1\right) \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + q_2 \left(\omega - \frac{\partial q_1}{\partial x_2}\right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_1} - \frac{\partial \overline{u_1'^2}}{\partial x_1} - \frac{\partial \overline{u_1' u_2'}}{\partial x_2} \quad (4-a)$$

$$\left(U_0 + \omega x_2 - q_1\right) \frac{\partial q_2}{\partial x_1} + q_2 \frac{\partial q_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_2} - \frac{\partial \overline{u_1' u_2'}}{\partial x_1} - \frac{\partial \overline{u_2'^2}}{\partial x_2} \quad (4-b)$$

$$-\frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} = 0 \quad (4-c)$$

がえられる。 $x_1$  および  $x_2$  方向における長さの尺度をそれぞれ  $L_1, L_2$  とし、後流は  $x_1$  方向に長く伸び、 $x_2$  方向には比較的狭い範囲に限られることを考慮すれば

$$L_2/L_1 \ll 1 \quad (5)$$

なるものと仮定してよい。速度欠損量  $q_1$  は  $U_0$  に比較して十分小さいから

$$U_0/q_1 \gg 1 \quad (6)$$

なるものとし、乱流成分  $\overline{u_1'^2}$ ,  $\overline{u_2'^2}$  は共に同程度の大きさの量  $\overline{u'^2}$  であると仮定すれば  $\overline{u_1' u_2'} \sim R_{12} \overline{u'^2}$  となる。ここに  $R_{12}$  は相関係数

$$R_{12} = \overline{u_1' u_2'} / \sqrt{\overline{u_1'^2}} \sqrt{\overline{u_2'^2}}$$

である。 $x_1, x_2$  方向における速度成分の尺度を  $V_1, V_2$  とすれば、まず連続の方程式 (4-c) より

$$V_1/L_1 \sim V_2/L_2 \quad \text{又は} \quad V_2/V_1 \sim L_2/L_1 \quad (7)$$

となる。 $x_1, x_2$  方向における圧力変化の尺度を  $\Delta P_1, \Delta P_2$  とすると (4-a) および (4-b) 式の圧力勾配の項はそれぞれ  $\Delta P_1/L_1, \Delta P_2/L_2$  である。これらの関係を考慮することにより、(4-a), (4-b) 式の各項の大きさを比較すると

$$\begin{aligned} -\left( U_0 \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \omega x_2 \frac{\partial q_1}{\partial x_1} - q_1 \frac{\partial q_1}{\partial x_1} \right) + \left( q_2 \omega - q_2 \frac{\partial q_1}{\partial x_2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_1} - \frac{\partial \overline{u_1'^2}}{\partial x_1} - \frac{\partial \overline{u_1' u_2'}}{\partial x_2} \\ \frac{U_0}{q_1} \quad \frac{\omega L_2}{q_1} \quad 1 \quad \frac{\omega L_2}{q_1} \quad 1 \quad \frac{\Delta P_1}{\rho V_1^2} \quad \frac{\overline{u'^2}}{V_1^2} \quad R_{12} \frac{\overline{u'^2}}{V_1^2} \frac{L_1}{L_2} \end{aligned} \quad (8-a)$$

$$\begin{aligned} \left( U_0 \frac{\partial q_2}{\partial x_1} + \omega x_2 \frac{\partial q_2}{\partial x_1} - q_1 \frac{\partial q_2}{\partial x_1} \right) + q_2 \frac{\partial q_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_2} - \frac{\partial \overline{u_1' u_2'}}{\partial x_1} - \frac{\partial \overline{u_2'^2}}{\partial x_2} \\ \frac{U_0}{q_1} \quad \frac{\omega L_2}{q_1} \quad 1 \quad 1 \quad \frac{\Delta P_2}{\rho V_1^2} \quad R_{12} \frac{\overline{u'^2}}{V_1^2} \frac{L_1}{L_2} \quad \frac{\overline{u'^2}}{V_1^2} \frac{L_1^2}{L_2^2} \end{aligned} \quad (8-b)$$

となる。(5), (6) なる条件および  $\overline{u'^2}/V_1^2$  が高々 1 の程度であることを考慮すれば (文献<sup>4)</sup> 参照), (8) 式は  $\omega L_2/q_1$  の大きさにしたがって二通りの方程式を与えることになる。すなわち

$$\omega L_2/q_1 \sim 1 \quad \text{又は} \quad \omega L_2/q_1 \ll 1 \quad (9-a)$$

ならば

$$-U_0 \frac{\partial q_1}{\partial x_1} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_1} - \frac{\partial \overline{u_1' u_2'}}{\partial x_2} \quad (9-b)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_2} - \frac{\partial \overline{u_2'^2}}{\partial x_2} \quad (9-c)$$

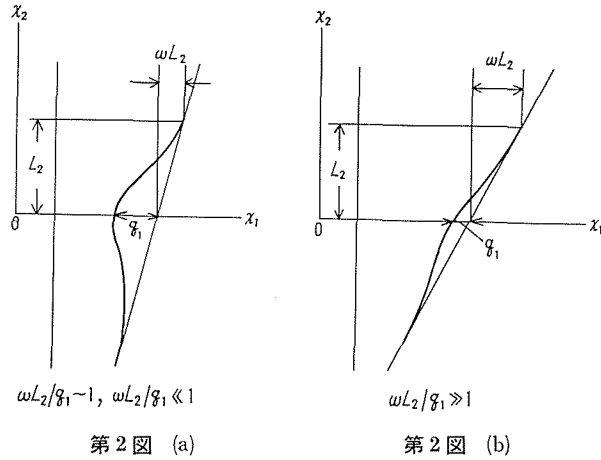
となり、せん断の存在しない場合と全く同様に取り扱うことができる。また

$$\omega L_2/q_1 \gg 1 \quad (10-a)$$

なる場合にはせん断を含む項が無視できず (8) 式は

$$-\left( U_0 + \omega x_2 \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \omega q_2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_1} - \frac{\partial \overline{u_1' u_2'}}{\partial x_2} \quad (10-b)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_2} - \frac{\partial \overline{u_2'^2}}{\partial x_2} \quad (10-c)$$



となる。(9-a), (10-a)なる条件を具体的に図示すれば第2図(a)および(b)のようになる。本論文においては(10-a)なる条件のもとに生ずる後流について考察することにする。(10-c)式は $x_2$ についてただちに積分することができて

$$P/\rho + \overline{u_2^2} = P_0(x_1)/\rho \quad (11)$$

となるが(ここに $P_0(x_1)$ は積分定数であって後流の外部における静圧に等しい),これは乱流域における静圧が外部の静圧よりも $\rho \overline{u_2^2}$ だけ低くなることを示しており,とくにせん断の影響は現われてこない。(10-b)式はレイノルズ応力 $-\rho \overline{u_1 u_2}$ が既知であるか,あるいはこれと $q_1$ との関係が既知であれば解析的に解くことができるものである。ここでは通常行なわれる方法にしたがって渦粘性係数 $\epsilon$ を導入し,レイノルズ応力と平均速度との間に

$$-\rho \overline{u_1 u_2} = \rho \epsilon \frac{\partial U_1}{\partial x_2} = \rho \epsilon \left( \omega - \frac{\partial q_1}{\partial x_2} \right) \quad (12)$$

なる関係式を仮定することにする。 $\epsilon$ は運動量輸送,渦度輸送あるいは力学的相似性の仮説等を採用することによりいくつかの異った形が与えられているが(文献<sup>4)</sup>参照),本論文では簡単のために $\epsilon$ は単なる定数であるとして計算を進める。

(4-c)および(10-b)両式において変数を無次元化すれば

$$-(1 + \lambda \xi_2^2) \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial \xi_1} + \lambda \tilde{q}_2 = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \xi_1} - \epsilon_0 \frac{\partial^2 \tilde{q}_1}{\partial \xi_2^2} \quad (13-a)$$

$$-\frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \tilde{q}_2}{\partial \xi_2} = 0 \quad (13-b)$$

となり,これらが基礎方程式を構成する。

### 3. 摂動展開式による解

(13)式において圧力勾配は存在しないものとする基礎方程式は

$$(1 + \lambda \xi_2) \frac{\partial \bar{q}_1}{\partial \xi_1} - \lambda \bar{q}_2 = \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{q}_1}{\partial \xi_2^2} \quad (14-a)$$

$$-\frac{\partial \bar{q}_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \bar{q}_2}{\partial \xi_2} = 0 \quad (14-b)$$

となる。一般に  $\lambda$  は 1 に比較して小さな量であるから、 $\bar{q}_1$  および  $\bar{q}_2$  を  $\lambda$  のべき級数として

$$\bar{q}_1 = q_1^{(0)} + \lambda q_1^{(1)} + \lambda^2 q_1^{(2)} + \dots \quad (15-a)$$

$$\bar{q}_2 = q_2^{(0)} + \lambda q_2^{(1)} + \lambda^2 q_2^{(2)} + \dots \quad (15-b)$$

なる形に展開する。(15) 式を (14) 式に代入し  $\lambda$  の同一べきの項を比較することにより

$$\frac{\partial q_1^{(0)}}{\partial \xi_1} = \varepsilon_0 \frac{\partial^2 q_1^{(0)}}{\partial \xi_2^2}, \quad \frac{\partial q_1^{(0)}}{\partial \xi_1} = \frac{\partial q_2^{(0)}}{\partial \xi_2} \quad (16-a), (16-b)$$

$$\frac{\partial q_1^{(1)}}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial q_1^{(0)}}{\partial \xi_1} - q_2^{(0)} = \varepsilon_0 \frac{\partial^2 q_1^{(1)}}{\partial \xi_2^2}, \quad \frac{\partial q_1^{(1)}}{\partial \xi_1} = \frac{\partial q_2^{(1)}}{\partial \xi_2} \quad (17-a), (17-b)$$

$$\frac{\partial q_1^{(2)}}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial q_1^{(1)}}{\partial \xi_1} - q_2^{(1)} = \varepsilon_0 \frac{\partial^2 q_1^{(2)}}{\partial \xi_2^2}, \quad \frac{\partial q_1^{(2)}}{\partial \xi_1} = \frac{\partial q_2^{(2)}}{\partial \xi_2} \quad (18-a), (18-b)$$

.....

なる一連の線型方程式群がえられる。

$q_1^{(0)}$  および  $q_2^{(0)}$  は近寄り流れの速度が 1 なる一様流の中におかれた二次元物体の後流を記述するものであり、あらたに変数

$$\eta = \xi_2 / \sqrt{\xi_1} \quad (19)$$

を導入することにより

$$q_1^{(0)} = \frac{A}{\sqrt{\xi_1}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4\varepsilon_0}\right) \quad (20-a)$$

$$q_2^{(0)} = -\frac{A}{2\xi_1} \eta \exp\left(-\frac{\eta^2}{4\varepsilon_0}\right) \quad (20-b)$$

として解が定められている (文献<sup>4)</sup>)。ここに  $A$  は積分定数であって、物体の抵抗係数  $C_D$  を考慮することにより

$$A = C_D / \sqrt{4\pi\varepsilon_0} \quad (20-c)$$

となる (第 4 節参照)。一様流の場合における実測によれば  $\varepsilon_0 = 0.016$  なる値がえられている。

(20) 式を (17) 式に代入すると  $q_1^{(1)}$  を決定すべき方程式として

$$\frac{\partial q_1^{(1)}}{\partial \xi_1} - \varepsilon_0 \frac{\partial^2 q_1^{(1)}}{\partial \xi_2^2} = -\frac{A}{4\varepsilon_0 \xi_1} \eta^3 \exp\left(-\frac{\eta^2}{4\varepsilon_0}\right) \quad (21)$$

がえられる。 $q_1^{(1)}$  が  $\eta$  のみの関数であると仮定して

$$q_1^{(1)} = Af(\eta)$$

とおくと (21) 式は  $\eta$  の常微分方程式

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{1}{2\varepsilon_0} \eta \frac{df}{d\eta} = \frac{\eta^3}{4\varepsilon_0^2} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4\varepsilon_0}\right)$$

に還元され、これを  $\eta \rightarrow \pm\infty$  で  $f \rightarrow 0$  なる境界条件の下に積分すると

$$q_1^{(1)} = Af(\eta) = A \int_{-\infty}^{\eta} \left( \frac{\eta^4}{16\varepsilon_0^2} - \frac{3}{4} \right) \exp\left(-\frac{\eta^2}{4\varepsilon_0}\right) d\eta \quad (22-a)$$

となる。また  $q_2^{(1)}$  は (17-b) 式を積分することによってえられ、容易に

$$q_2^{(1)} = \frac{A}{4\sqrt{\xi_1}} \left( 5\varepsilon_0 + 2\eta^2 + \frac{\eta^4}{4\varepsilon_0} \right) \exp\left(-\frac{\eta^2}{4\varepsilon_0}\right) \quad (22-b)$$

となるのがわかる。同様に  $q_1^{(2)}$  を定めるために (22) 式を (18) 式に代入すると

$$\frac{\partial q_1^{(2)}}{\partial \xi_1} - \varepsilon_0 \frac{\partial^2 q_1^{(2)}}{\partial \xi_1^2} = \frac{A}{4\sqrt{\xi_1}} \left( 5\varepsilon_0 + \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^4}{4\varepsilon_0} + \frac{\eta^6}{8\varepsilon_0^2} \right) \exp\left(-\frac{\eta^2}{4\varepsilon_0}\right)$$

となり、この方程式も

$$q_1^{(2)} = A\sqrt{\xi_1} g(\eta)$$

なる形を仮定することにより  $\eta$  の常微分方程式

$$\frac{d^2g}{d\eta^2} + \frac{\eta}{2\varepsilon_0} \frac{dg}{d\eta} - \frac{g}{2\varepsilon_0} = - \left( \frac{5}{4} + \frac{\eta^2}{8\varepsilon_0} + \frac{\eta^4}{16\varepsilon_0^2} + \frac{\eta^6}{32\varepsilon_0^3} \right) \exp\left(-\frac{\eta^2}{4\varepsilon_0}\right) \quad (23)$$

に帰着される。この方程式の特解  $g_1(\eta)$  は簡単に求めることができ

$$g_1(\eta) = \left( \frac{41}{16} \varepsilon_0 + \frac{21}{32} \eta^2 + \frac{19}{192} \frac{\eta^4}{\varepsilon_0} + \frac{\eta^6}{128\varepsilon_0^2} \right) \exp\left(-\frac{\eta^2}{4\varepsilon_0}\right) \quad (24)$$

である。 $g_1(\eta)$  は  $\eta \rightarrow \pm\infty$  で 0 に収束する。(23) 式の余関数  $g_2(\eta)$  は同式の右辺を 0 とした同次方程式の解であるが、この方程式は新変数

$$\tau = \eta/\sqrt{2\varepsilon_0}$$

を用いることにより

$$\frac{d^2g_2}{d\tau^2} + \tau \frac{dg_2}{d\tau} - g_2 = 0$$

となる。これは一般化された Hermite の微分方程式

$$\frac{d^2F}{d\tau^2} + \tau \frac{dF}{d\tau} + (s+1)F = 0 \quad (25)$$

において  $s = -2$  としたものに対応している。(25) 式の一般解は

$$F(\tau) = A_s e^{-\frac{\tau^2}{4}} D_s(\tau) + B_s e^{-\frac{\tau^2}{4}} D_{s-1}(i\tau)$$

で与えられる。ただし、 $A_s, B_s$  は定数、 $i$  は虚数単位、 $D_s(\tau)$  は Weber 関数であって合流型超幾何級数を用いて

$$D_s(\tau) = 2^{\frac{s}{2}} \sqrt{\pi} e^{-\frac{\tau^2}{4}} \left[ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} F\left(-\frac{s}{2}, \frac{1}{2}; \frac{\tau^2}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}\tau}{\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)} F\left(\frac{1-s}{2}, \frac{3}{2}; \frac{\tau^2}{2}\right) \right]$$

として表わされる (文献<sup>7)</sup>)。したがって、余関数  $g_2(\eta)$  は

$$\begin{aligned} g_2(\eta) &= A_{-2} e^{-\frac{\tau^2}{4}} D_{-2}(\tau) + B_{-2} e^{-\frac{\tau^2}{4}} D_1(i\tau) \\ &= A_{-2} \left[ e^{-\frac{\tau^2}{2}} - \sqrt{2\pi} \tau \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \right] + B_{-2} i\tau \end{aligned}$$

となるが、 $g_2(\eta)$  は実数でなければならないからまず  $B_{-2} = 0$  である。また  $\tau \rightarrow +\infty (\eta \rightarrow +\infty)$  では  $g_2 \rightarrow 0$  であるが、 $\tau \rightarrow -\infty (\eta \rightarrow -\infty)$  のときには  $g_2 \rightarrow +\infty \times A_{-2}$  となるから解としては妥当でない。したがって  $A_{-2} = 0$  となり、余関数は 0 となるべきことがわかる。結局第 2 近似での速度成分は

$$q_1^{(2)} = A \sqrt{\xi_1} g_1(\eta) \quad (26-a)$$

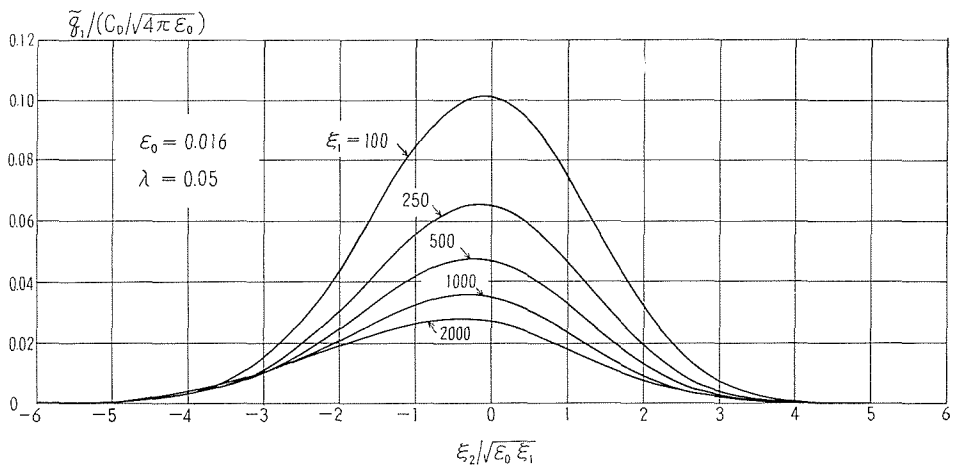
である。(18-b) 式を積分して  $q_2^{(2)}$  を求めると

$$\begin{aligned} q_2^{(2)} - q_2^{(2)}(-\infty) &= \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{\eta} \left( g_1 - \eta \frac{dg_1}{d\eta} \right) d\eta \\ &= \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{\eta} \left( \frac{41}{16} \varepsilon_0 + \frac{5}{8} \eta^2 + \frac{\eta^4}{32\varepsilon_0} + \frac{\eta^6}{96\varepsilon_0^2} + \frac{\eta^8}{256\varepsilon_0^3} \right) \exp\left(-\frac{\eta^2}{4\varepsilon_0}\right) d\eta \end{aligned} \quad (26-b)$$

となるが、 $\eta \rightarrow \infty$  のときこの式の右辺は 0 でない一定値に収束し、これを  $\alpha$  と書くことにすると、 $q_2^{(2)}$  の  $\eta \rightarrow \pm\infty$  における値の間には

$$q_2^{(2)}(+\infty) - q_2^{(2)}(-\infty) = \alpha$$

なる関係が存在することになる。これは後流の端部において  $x_2$  方向の速度成分が 0 でないことを意味し、流線が外側に向かって広がって行く傾向を表わしているものと思われる。しかし本論文の方法では  $q_2^{(2)}(+\infty)$  および  $q_2^{(2)}(-\infty)$  の値を具体的に決定することはできず、なお今後



第 3 図

の研究に待たなければならない。

同様の操作によって  $q_1^{(3)}$  を求めてみると  $\eta \rightarrow \pm\infty$  において 0 でない一定値に収束するような解がえられるから、これ以上の計算を続けることは無意味であろう。したがって(14)式の解を(15)式のような  $\lambda$  のべき級数として展開した場合には、最初の二項 ( $\tilde{q}_1$  については最初の三項)に対してのみ正しい結果がえられることになる。

上述の解を用いて  $\tilde{q}_1$  を計算した結果を第3図に示してある。明らかに後流の幅は速度の低い側により拡大されて行き、 $\xi_1$  の増加と共に次第に一様流の場合の対称性を失なって行くことが認められる。

#### 4. 抗 力

物体に作用する抗力を求めるために第1図に示すような物体をつつむ十分大きな制御体積  $A_1B_1B_2A_2$  を考え、紙面に直角方向の厚さを  $h$  とする。このとき  $A_1A_2$  面と  $B_1B_2$  面との間には

$$\begin{aligned} & \rho h \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ (U_0 + \omega x_2)^2 - (U_0 + \omega x_2 - q_1)^2 \right\} dx_2 \\ & \doteq 2\rho h \int_{-\infty}^{+\infty} (U_0 + \omega x_2) q_1 dx_2 \end{aligned}$$

だけの運動量欠損がある。また同じ面を通して

$$\begin{aligned} & \rho h \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ (U_0 + \omega x_2) - (U_0 + \omega x_2 - q_1) \right\} dx_2 \\ & = \rho h \int_{-\infty}^{+\infty} q_1 dx_2 \end{aligned}$$

だけの質量欠損があるが、これだけの質量は  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$  面を通して制御体積の外に流出していなければならない。これに対応する流体は制御体積外に  $x_1$  方向の運動量を持ち出すことになり、近寄り流れの速度が直線的に変化していることを考慮すればこの運動量は

$$-\rho h U_0 \int_{-\infty}^{+\infty} q_1 dx_2$$

に等しいと考えてよい。したがって運動量の釣合いを考慮することにより、物体に作用する抗力  $D$  は

$$D = \rho h \int_{-\infty}^{+\infty} (U_0 + 2\omega x_2) q_1 dx_2$$

となり、抗力係数を  $C_D = D / \left( \frac{1}{2} \rho U_0^2 h d \right)$  によって定義すると

$$C_D = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + 2\lambda \xi_2) \tilde{q}_1 d\xi_2 \quad (27)$$

がえられる。(27)式に(15-a)式を代入すると

$$C_D = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} q_1^{(0)} d\xi_2 + 2\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} (2\xi_2 q_1^{(0)} + q_1^{(1)}) d\xi_2 + \dots$$

となるが、 $q_1^{(0)}$  は  $\xi_2$  について偶関数、 $q_1^{(1)}$  は奇関数であるから、被積分関数  $2\xi_2 q_1^{(0)} + q_1^{(1)}$  は奇関数となり上式の第二の積分は 0 である。したがって

$$\begin{aligned} C_D &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} q_1^{(0)} d\xi_2 + \dots \\ &= A\sqrt{4\pi\varepsilon_0} + \dots \end{aligned} \quad (28)$$

となり、 $C_D$  に対しては  $\lambda$  の一次の程度での補正は必要でないことがわかる。(28)式から(20-c)式の関係がえられる。

## 5. 結 言

本論文の結果を要約すると次の通りである。

直線的に変化する速度分布をなすせん断流の中におかれた二次元物体の後流を渦粘性係数を用いて理論的に解析し、次の事実を明らかにした。

(1) 後流の幅は速度の低い側により拡大され、後方に至るにしたがってその速度分布は次第に一樣流の場合の対称性を失って行く。

(2) 近寄り流れに含まれる速度勾配は少なくともその一次の程度の量としては抗力に影響をおよぼさない。

## 参 考 文 献

- 1) Townsend, A. A.: Australian J. Sci. Research, Vol. 2 A (1949), 451.
- 2) Schlichting, H.: Ing.-Arch., 1 (1930), 533.
- 3) 藤本: 日本機械学会論文集, 17-60 (昭26-10), 96.
- 4) Hinze, J. O.: Turbulence, (1959), 394, McGraw-Hill Book Co. INC.
- 5) Ostrach, S. and Scanlan, R. H.: Developments in Mechanics, Vol. 2, Part 1 (1965), 26, Pergamon Press.
- 6) 有江・木谷: 日本機械学会北海道支部第10回講演会前刷集 (昭40).
- 7) 森口ほか2名: 数学公式 III (1961), 76, 岩波書店.