



Title	2種の自己帰還性を有する原子炉の最適時間制御
Author(s)	小川, 雄一; Ogawa, Yuichi
Citation	北海道大学工学部研究報告, 42, 91-121
Issue Date	1967-01-05
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40816
Type	departmental bulletin paper
File Information	42_91-122.pdf



2種の自己帰還性を有する原子炉の最適時間制御

小川 雄一*

Time Optimum Control for a Reactor with Two Types of Internal Feedback

Yuichi OGAWA

Abstract

A control which bring a reactor system to an equilibrium state in time optimum way is discussed. Non-linear integral equations containing the effects of two types of internal feedback and delayed neutrons and an external control system were adopted for the dynamic equations of the system. These equations were reduced to quasilinear (parametric) differential equations which were affected by the external control in the form of a combination of the control reactivity, its variational speed and the acceleration.

Pontryagin's Maximum Principle was applied to the quasilinear system and several modes of optimum control patterns (nodal, focal, saddle and mixed) were obtained according to the nuclear and thermal properties, the thermal out-put of the reactor and the magnitude of the external control. Optimum control was obtained as the piecewise constant control with respect to the new control parameter which consists of a linear combination of the control reactivity, its speed and acceleration.

1. 緒 言

本研究は2種の自己帰還性(瞬時的応答と緩慢な応答)と遅発中性子の影響を考慮した極めて具体的な原子炉系が、出力運転状態において突発的な反応度外乱を受け、平衡出力点より変位した状態を、最適制御で平衡点に復帰させる問題を扱うものである。

非線形の系に外部制御を加えて、系の状態を可能な限り平衡点の位置に保持する問題は Salle と Lefschetz によって扱われており、彼らは実用上の目的で、考えている系を平衡点の近傍で線形近似し、これに外部制御系が加えられたときの安定度の問題を一般的に論じている。

原子炉の平衡点近傍の最適制御に関しては Milton Ash の研究がある。彼は1種類の自己帰還性のみを考慮し、また、遅発中性子の効果を無視した原子炉系が、冷却材の沸騰によって生ずるランダムな反応度外乱をうけて変位した状態を最少期待時間で平衡点に復帰させる制御をダイナミックプログラミングの方法で求めている。彼の研究は Salle らと同様に平衡点の近傍に関して線形近似されているので、その適用性は平衡点近傍の限られた領域に局限されるが

* 電子力教室

しかし、より広範囲の領域の問題に対しても可なりの評価を与え得ることになる。

本研究は2種の自己帰還性と遅発中性子の効果を考慮した原子炉系についてその平衡点近傍の最適制御を論ずるもので、状態変数に関しては線形近似がなされているが、外部制御の影響が系の運動を支配する微分方程式の強制項のみならず、さらにその係数にも作用する、いわゆる、準線形(パラメトリック)の方程式となっていることに特徴がある。外部制御は、しかも制御反応度のみならず、さらに、その変化速度ならびに変化加速度の形によって系に作用しているが、許容される近似化のもとにおいて、問題を、制御反応度 u とその変化速度 \dot{u} ならびに変化加速度 \ddot{u} の一次結合によって定義される新しい一つの制御量 v 、すなわち

$$v = u + \tau \dot{u} + \tau_0 \ddot{u}$$

によって制御を受ける問題に帰せしめることができる。ただし、 τ は原子炉の熱時定数でありまた、 τ_0 は遅発中性子の平均発生時間である。

このようにして得られた準線形の運動方程式に、Pontryaginの最大原理を適用して、最適の制御が求められるが、それは、新しく定義された制御量 v についての、いわゆる、Piecewise Constantの制御であるとして得られる。これは制御量 v の絶対値は不変であるが、その正負の符号が補助変数 $\psi_1(t)$ の値が零となる時刻において切換る制御である。

補助変数 $\psi_1(t)$ は原子炉の諸定数、運転出力値および外部制御量の絶対値の大きさ、ならびにその符号の如何によって、節点的、渦心点的、鞍部点的あるいはそれらの混合等の種々の態様を示す。他方、系の状態変数によって与えられる位相点は、補助変数 $\psi_1(t)$ と同様の態様を示し、現在、加えられている制御の符号に対応する特異点の支配に属する軌道上を運行し、制御の切換を受ける時は、他方の特異点の支配に属する軌道上を運行する。

最適制御のための最大切回数数は2つの特異点の性質と初期位相点の位置によって異なることがわかる。すなわち、2つの特異点が共に節点的特異点の場合は、最大切回数数は1回であり、共に渦心点的特異点の場合は、初期点の位置に関して、適当回の回数があり、また、2つの特異点のうち、一方が節点的で、他方が渦心点的特異点の場合は、初期点の位置に関して1回か2回かのいずれかであることが得られている。いずれの場合も、位相点は平衡点を通過する軌道の上に到来するとき最終的な切換をうけ、その後は、この軌道自身の上によって平衡点に到達されることになる。

原子炉の熱および核定数、熱出力値ならびに外部制御量を広範囲に変えて、原子炉の最適制御とそれによる最適軌道を種々の態様のもとに計算し代表的な例を図表にして示してある。

2. 一般理論

2.1 原子炉動特性方程式

2種類の自己帰還性と遅発中性子の効果が考慮され、しかも時間の関数としての外部反応度 $\sigma(t)$ が加えられたときの原子炉動特性方程式は下式で表せられる。

$$w(t) = \frac{\beta}{\tau_0[\beta - \rho(t)]} \int_0^t w(t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_0}\right) dt' \quad (1)$$

$$\rho(t) = \sigma(t) + Ew(t) + F \int_0^t w(t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) dt' \quad (2)$$

ただし $w(t)$: 原子炉熱出力
 $\rho(t)$: 原子炉反応度
 $\sigma(t)$: 外部から与えられる全反応度
 β : 遅発中性子発生比率
 τ : 原子炉熱時定数
 τ_0 : 遅発中性子平均発生時間
 E : 瞬時的自己帰還を表わす係数
 F : 緩慢な自己帰還を表わす係数

である。

いま、原子炉にはすでに外部的に冷原子炉反応度 ρ_0 が与えられており、この ρ_0 に対応した出力平衡点に位置する原子炉系が、突発的な反応度外乱を受けて、平衡点より変位するとき、これに外部制御反応度 $u(t)$ を加えて、平衡点に復帰させる問題を取り扱うが、この場合は、外部から与えられる全反応度 $\sigma(t)$ は次式で表せられる。

$$\sigma(t) = \rho_0 + u(t) \quad (3)$$

さて、(2) 式内の $\sigma(t)$ に (3) 式を代入し、 $w(t) = x_2$ 、 $\tau \dot{w}(t) = x_1$ なる置換を施すと、(1)、(2) 式はつぎの非線形微分方程式に変換される。

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{A_1 x_1^3 + A_2 x_1^2 x_2 + A_3 x_1 x_2^2 + A_4 x_2^3 + A_5(u) x_1^2 + A_6(u) x_1 x_2 + A_7(u) x_2^2}{A_8 x_2^2 + A_9(u) x_2} \quad (4)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{\tau} x_1 \quad (5)$$

(1)、(2) 式より (4)、(5) 式への変換過程および常数 A_i は Appendix A に示される。

つぎに、外部より加えられる反応度が冷原子炉反応度 ρ_0 のみの場合に対する出力特異点は

$$x_{1p} = 0, \quad x_{2p} = -\rho_0/(E + \tau F) \quad (6)$$

として得られる。いまこの点を平衡点と呼ぶことにする。

さて、(6) 式で示される平衡点の近傍において論議を進めるために、状態変数 x_1 、 x_2 を次式 (7) の関係によって y_1 、 y_2 に変換し、新しい座標系において、平衡点が原点になるようにする。すなわち

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2 - x_{2p} \quad (7)$$

つぎに、変換された系を原点の近傍で展開し高次の項を無視することにより、つぎのパラメトリックの微分方程式が得られる。

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{D_1 + D_2u + D_3\dot{u} + D_4\ddot{u}}{C_1 + C_2u + C_3\dot{u}} y_1 + \frac{E_1 + E_2u + E_3\dot{u} + E_4\ddot{u}}{C_1 + C_2u + C_3\dot{u}} y_2 + \frac{F_2 + F_3\dot{u} + F_4\ddot{u}}{C_1 + C_2u + C_3\dot{u}} \quad (8)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{1}{\tau} y_1 \quad (9)$$

ここで、常数 C_i , D_i , E_i および F_i は次式 (10)~(23) によって与えられるものである。

$$C_1 = -\frac{1}{m} (m-1) \left(\frac{\rho_0}{\beta} s + 1 \right) \quad (10)$$

$$C_2 = -\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\beta} \quad (11)$$

$$C_3 = -\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \tau \quad (12)$$

$$D_1 = -\frac{1}{m\tau} (m-1) \left\{ \frac{\rho_0}{\beta} (ms+1) + 1 \right\} \quad (13)$$

$$D_2 = -\frac{1}{\beta\tau} \left(2 - \frac{1}{m} \right) \quad (14)$$

$$D_3 = -\frac{1}{\beta\tau} \cdot 2 \cdot \tau \quad (15)$$

$$D_4 = -\frac{1}{\beta\tau} \cdot \tau \cdot \tau_0 \quad (16)$$

$$E_1 = \frac{\rho_0}{\beta\tau} (m-1) \quad (17)$$

$$E_2 = \frac{-2}{\beta\tau} (m-1) \quad (18)$$

$$E_3 = \frac{-2}{\beta\tau} \left(m - \frac{1}{m} \right) \cdot \tau \quad (19)$$

$$E_4 = \frac{-2}{\beta\tau} (m-1) \cdot \tau \cdot \tau_0 \quad (20)$$

$$F_2 = \frac{-1}{\beta\tau} (m-1) \cdot x_{2p} \quad (21)$$

$$F_3 = \frac{-1}{\beta\tau} \left(m - \frac{1}{m} \right) \cdot x_{2p} \cdot \tau \quad (22)$$

$$F_4 = \frac{-1}{\beta\tau} (m-1) \cdot x_{2p} \cdot \tau \cdot \tau_0 \quad (23)$$

ただし、上式において、 m および s は

$$m = \frac{\tau}{\tau_0}, \quad s = \frac{E}{E + F\tau} \quad (24)$$

である。

微分方程式 (8), (9) は状態変数 y_1 , y_2 に関しては直線近似化された方程式であるが、外部

制御が方程式の強制項のみならず、係数にも作用して、いわゆる、準線形方程式となっていることに特徴があり、またさらに、外部制御の作用が制御反応度とその変化速度、ならびに変化加速度の一次結合の形によって影響していることに特徴がある。

つぎに、(8), (9)式に最大原理を適用する前に、その適用を容易にするために、一般の原子炉に許される近似化を施す。

すなわち、一般の原子炉において

$$\tau/\tau = m \gg 1, \quad u \ll \rho_0 \quad (25)$$

の関係が満足されており、また、 $s = \frac{E}{E + F\tau}$ の値がほぼ $-\beta/\rho_0$ の値に等しくなるという特別の場合を除いては、(8), (9)の方程式の係数は u , \dot{u} , \ddot{u} に関して線形近似化され、結局、次式(26), (27)のようになる。

$$\frac{dy_1}{dt} = (a_1 + b_1 u + c_1 \dot{u} + d_1 \ddot{u}) y_1 + (a_2 + b_2 u + c_2 \dot{u} + d_2 \ddot{u}) y_2 + (b_3 u + c_3 \dot{u} + d_3 \ddot{u}) \quad (26)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{1}{\tau} y_1 \quad (27)$$

ここで、 a_i , b_i , c_i , d_i は下式(28)~(38)によって与えられる常数である。すなわち

$$a_1 = \frac{\frac{\rho_0}{\beta}(ms+1)+1}{\tau\left(\frac{\rho_0}{\beta}s+1\right)} \quad (28)$$

$$a_2 = \frac{\frac{\rho_0}{\beta}m}{\tau\left(\frac{\rho_0}{\beta}s+1\right)} \quad (29)$$

$$b_1 = \frac{1}{\beta\tau} \left\{ 2 - \frac{1}{m} + \frac{\frac{\rho_0}{\beta}\left(s + \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{m}}{\frac{\rho_0}{\beta}s+1} \right\} \cdot R \quad (30)$$

$$c_1 = \frac{1}{\beta\tau} \left\{ 2 + \frac{\frac{\rho_0}{\beta}\left(s + \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{m}}{\frac{\rho_0}{\beta}s+1} \right\} \cdot \tau \cdot R \quad (31)$$

$$d_1 = \frac{1}{\beta\tau} \cdot \tau \cdot \tau_0 \cdot R \quad (32)$$

$$b_2 = \frac{1}{\beta\tau} \left\{ 2(m-1) + \frac{\frac{\rho_0}{\beta}}{\frac{\rho_0}{\beta}+1} \right\} \cdot R \quad (33)$$

$$c_2 = \frac{1}{\beta\tau} \left\{ 2(m-1) + \frac{\frac{\rho_0}{\beta}}{\frac{\rho_0}{\beta}+1} \right\} \cdot \tau \cdot R \quad (34)$$

$$d_2 = \frac{1}{\beta\tau} \left\{ 2(m-1) \right\} \cdot \tau \cdot \tau_0 \cdot R \quad (35)$$

$$b_3 = \frac{1}{\beta\tau} (m-1) x_{2p} \cdot R \quad (36)$$

$$c_3 = \frac{1}{\beta\tau} \left(m - \frac{1}{m} \right) x_{2p} \cdot \tau \cdot R \quad (37)$$

$$d_3 = \frac{1}{\beta\tau} (m-1) x_{2p} \cdot \tau \cdot \tau_0 \cdot R \quad (38)$$

ただし、上式における R は次式によって示されるものである。

$$R = \frac{1}{\frac{1}{m} (m-1) \left(\frac{\rho_0}{\beta} s + 1 \right)} \quad (39)$$

しかるに、上式 (28)~(38) を見ることにより一般の原子炉において満足される下式の条件、すなわち

$$\tau/\tau_0 = m \ll 1, \quad \left| \frac{\rho_0}{\beta} s + 1 \right| \ll \frac{\rho_0}{\beta} \cdot \frac{1}{2m} \quad (40)$$

のもとにおいては、 b_i , c_i , d_i の間にはつぎの関係が存在することがわかる。

$$\left. \begin{aligned} b_1 K &\approx \frac{c_1}{\tau} K = \frac{d_1}{\tau\tau_0} \\ b_2 &\approx \frac{c_2}{\tau} \approx \frac{d_2}{\tau\tau_0} \\ b_3 &\approx \frac{c_3}{\tau} \approx \frac{d_3}{\tau\tau_0} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

上式 (41) における K の値は一般には 1 と等しくないが、式 (28)~(38) より観察されるごとく、一般の原子炉においては、次式

$$\left. \begin{aligned} b_1 &\ll b_2 \\ c_1 &\ll c_2 \\ d_1 &\ll d_2 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

の関係があり、さらに、平衡点出力値 x_{2p} に比べて、問題としている領域の大きさのうちにある y_1 , y_2 の値は十分小さいので、式 (28)~(38) より

$$b_1 y_1 \ll b_3, \quad b_2 y_2 \ll b_3 \quad (43)$$

の関係が存在することが明らかである。したがって、 b_1 , c_1 , および d_1 の作用している項に基づく影響は他の項による影響に比べて極めて小さいことがわかる。以上の理由により、一般の原子炉系においては K を 1 と等しくおいても論議を進めるうえに殆んど支障を来さないであろう。以上の操作により、次式によって定義される新しい制御量 v , すなわち

$$v = u + \tau\dot{u} + \tau\tau_0\ddot{u} \quad (44)$$

を導入する (Appendix B 参照) と, 運動方程式 (26), (27) は次式 (45), (46) のごとく, 1つの制御量 $v(t)$ のみの作用をうける準線形方程式に変えられることがわかる。すなわち

$$\frac{dy_1}{dt} = (a_1 + b_1 v) y_1 + (a_2 + b_2 v) y_2 + b_3 v \quad (45)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{1}{\tau} y_1 \quad (46)$$

を得る。

2.2 最大原理の適用

前章で誘導した原子炉の運動方程式 (45), (46) において, 平衡点よりずれた位相点を最少時間で平衡点に復帰させる問題を解くために (45), (46) 式に Pontryagin の最大原理を適用する。このために, まず, 状態変数 y_1 , y_2 に関する方程式 (45), (46) に対して定まる補助変数 $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ に関する方程式を求める。

一般に状態変数の運動方程式が

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = f^i(\mathbf{y}(t), v(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (47)$$

で表わされるとき, 補助変数に関する方程式は次式

$$\frac{d\phi_i(t)}{dt} = -\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f^\alpha(\mathbf{y}(t), v(t))}{\partial y^i} \phi_\alpha(t), \quad i=1, 2, \dots, n \quad (48)$$

で与えられるから, これを用いて補助変数の方程式は

$$\frac{d\phi_1}{dt} = -(a_1 + b_1 v) \phi_1 - \frac{1}{\tau} \phi_2 \quad (49)$$

$$\frac{d\phi_2}{dt} = -(a_2 + b_2 v) \phi_1 \quad (50)$$

として求まる。

つぎに, 状態変数に関する方程式 (45), (46) と, 補助変数に関する方程式 (49), (50) より系の Hamiltonian を求めると定義により

$$\begin{aligned} H(\phi, \mathbf{y}, v) &= \sum_{\nu=1}^n \phi_\nu f^\nu(\mathbf{y}, v) \\ &= \phi_1 f^1 + \phi_2 f^2 \\ &= \phi_1 \left[(a_1 + b_1 v) y_1 + (a_2 + b_2 v) y_2 + c v \right] + \phi_2 \left[\frac{1}{\tau} y_1 \right] \end{aligned} \quad (51)$$

を得る。いま, 上式において, ϕ_1 , ϕ_2 , y_1 , y_2 を固定して, v のみを制限された範囲 ($-M \leq v \leq M$) 内で変えて, Hamiltonian $H(\phi_1, \phi_2, y_1, y_2, v)$ の最大値である $N(\phi_1, \phi_2, y_1, y_2)$ を求めると, 次式 (52) が得られる。すなわち

$$\begin{aligned}
N(\psi_1, \psi_2, y_1, y_2) &= \text{Sup}_{-M \leq v \leq M} (\psi_1, \psi_2, y_1, y_2, v) \\
&= \left(\psi_1 a_1 y_1 + \psi_2 a_2 y_2 + \frac{1}{\tau} \psi_2 y_1 \right) + \text{Max}_{-M \leq v \leq M} \left[\psi_1 (b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3) v \right]
\end{aligned} \tag{52}$$

しかるに、Pontryagin の最大原理によると、運動系の Hamiltonian の値は、最適軌道の上ではあらゆる点上において (52) 式によって示される最大値でなければならないから、最適制御は次式 (53) によって与えられる。すなわち

$$v(t) = M \text{sign} \left[\psi_1(t) \{ b_1 y_1(t) + b_2 y_2(t) + b_3 \} \right] \tag{53}$$

ただし

$$\psi_1(t) \left[b_1 y_1(t) + b_2 y_2(t) + c \right] \neq 0 \tag{54}$$

(53) 式により、最適制御は、制御量 v に関して、いわゆる “Piecewise Constant Control” であることがわかる。これは、制御量 v の絶対値は常に一定であり、正負の符号のみが次式 (55) と (56) の条件、すなわち

$$\psi_1(t) = 0 \tag{55}$$

および

$$b_1 y_1(t) + b_2 y_2(t) + b_3 = 0 \tag{56}$$

のいずれかを満足する時刻において、切換えられることを意味するものである。しかし、2.4 節に示すごとく、(56) 式で与えられる制御切換のための直線は、一般の原子炉においては位相平面上の原点の遙か遠方に存在する。したがって、原点の近傍の挙動を論じている限りでは、(56) 式の切換条件は考慮に入れる必要がなくなり、結局、最適制御は (55) 式の条件のみによって正負の符号が切換えられる Piecewise Constant Control であると云える。

2.3 最適切換回数と最適軌道

最適制御は前述のごとく、 v に関する Piecewise Constant Control であるが、この最適の制御切換の回数および切換の時期、ならびに、それによる最適軌道について種々の検討を加える。最適切換は前式 (55) に明らかなごとく、補助変数 $\psi_1(t)$ の値が零をよる時刻に行なわれる故、 $\psi_1(t)$ の性質を詳しく調べる必要がある。補助変数 $\psi_1(t)$ の性質は、 $\psi_1(t)$ と $\psi_2(t)$ に関する方程式 (49)、(50) の特性根によって特徴づけられる。(49)、(50) 式より得られる特性根は、明らかに、原子炉の熱および核定数、運転出力値および外部制御 v の絶対値とその符号の如何によって種々の態様 (すなわち、節点的、渦心点的、鞍部点的あるいはそれらの混合) を示すことになる。したがって、本節の問題を解くに際しては、上記の特性根の性質にしたがった、つぎの 3 つの Case に分類した上で、それぞれ考案を進めて行くことが合理的であろう。すなわち

	制御 +M の時	制御 -M の時
Case 1	2 実 根	2 実 根
Case 2	共 軛 複 素 根	共 軛 複 素 根
Case 3	共 軛 複 素 根 2 実 根	2 実 根 共 軛 複 素 根

上記の3つのCaseのうち、Case 3は制御の符号の切換えによって、特性根の性質が変わる場合であり、極めて特異なCaseであると云える。つぎに、これらの3つのCaseについて、それぞれに考案を進める。

(i) Case 1

Case 1は補助変数の方程式(49), (50)の2つの特性根が、外部制御の符号の正、負の如何に拘らず、ともに実根となる場合である。特性根は(49), (50)式より

$$\alpha' = -\frac{(a_1+b_1v)}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_1+b_1v}{2}\right)^2 + (a_2+b_2v)/\tau} \quad (57)$$

$$\beta' = -\frac{(a_1+b_1v)}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1+b_1v}{2}\right)^2 + (a_2+b_2v)/\tau} \quad (58)$$

の2根として得られるが、この場合は、根号の中が正であるときのみを取扱う。

一方、状態変数 y_1, y_2 に関する方程式(すなわち、軌道の方程式)(45), (46)の特性根は

$$\alpha = \frac{(a_1+b_1v)}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_1+b_1v}{2}\right)^2 + (a_2+b_2v)/\tau} \quad (59)$$

$$\beta = \frac{(a_1+b_1v)}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1+b_1v}{2}\right)^2 + (a_2+b_2v)/\tau} \quad (60)$$

として得られるが、明らかに、 α', β' と α, β との間には次式(61)の関係がある。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -\beta' \\ \beta &= -\alpha' \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

すなわち、(61)式はCase 1の場合には、軌道の方程式の特性根も同様に2実根になることを示している。

つぎに、Case 1に対する最適制御の切換回数を求めるために、補助変数に関する方程式(49), (50)を、まず、外部制御の符号がいずれか一方の符号である場合、例えば、 M (あるいは $-M$)である区間に対して解き、次式

$$\psi_1(t) = J_1 e^{\alpha' t} + J_2 e^{\beta' t} \quad (62)$$

を得る。この区間に対する補助変数 ψ_2 は(62)式の ψ_1 を(49)式に代入することにより、次式(63)のごとくに得られる。すなわち

$$\begin{aligned}
\psi_2(t) &= \tau \left[-\dot{\psi}_1(a_1 + b_1 v) - \frac{d\psi_1}{dt} \right] \\
&= \tau \left[-(a_1 + b_1 v) J_1 e^{\alpha' t} - (a_1 + b_1 v) J_2 e^{\beta' t} - J_1 \alpha' e^{\alpha' t} - J_2 \beta' e^{\beta' t} \right] \\
&= \tau \left[\left\{ -(a_1 + b_1 v) - \alpha' \right\} J_1 e^{\alpha' t} + \left\{ -(a_1 + b_1 v) - \beta' \right\} J_2 e^{\beta' t} \right] \\
&= \tau \left[\beta' J_1 e^{\alpha' t} + \alpha' J_2 e^{\beta' t} \right] = \tau \beta' J_1 e^{\alpha' t} + \tau \alpha' J_2 e^{\beta' t} \tag{63}
\end{aligned}$$

上記の $\dot{\psi}_1(t)$ の値が 0 をよぎる時刻 (すなわち, 制御切換の時刻) は (62) 式の左辺を 0 とおくことによって

$$t_0 = \frac{\log(-J_1/J_2)}{\beta' - \alpha'} \tag{64}$$

なる 1 価の値として得られる。

t_0 の時刻において, 制御は他方の符号, すなわち $-M$ (あるいは M) に切換るが, この切換後の区間に対する補助変数を求める必要がある。すなわち, 切換後の補助変数を, $\psi_1^*(t)$ および $\psi_2^*(t)$ とすると, それらは, 次式

$$\psi_1^*(t) = J_1^* e^{\alpha'^* t} + J_2^* e^{\beta'^* t} \tag{65}$$

$$\psi_2^*(t) = \tau \beta'^* J_1^* e^{\alpha'^* t} + \tau \alpha'^* J_2^* e^{\beta'^* t} \tag{66}$$

で表されるが, (62), (63) 式と (65), (66) 式で与えられる補助変数 ψ_1 , ψ_2 と ψ_1^* , ψ_2^* とは $t=t_0$ の時刻において次式 (67) で示す連続の条件

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(t_0) = \psi_1^*(t_0) = 0 \\ \psi_2(t_0) = \psi_2^*(t_0) \end{aligned} \right\} \tag{67}$$

を満足しなければならない。したがって, この条件を用いて, (65), (66) 式中の J_1^* , J_2^* は下式 (68), (69) のごとくに J_1 , J_2 によって表わされる。すなわち

$$J_1^* = J_1 \cdot \frac{e^{\alpha' t_0} (\beta' - \alpha')}{e^{\alpha'^* t_0} (\beta'^* - \alpha'^*)} \tag{68}$$

$$J_2^* = J_2 \cdot \frac{e^{\beta' t_0} (\beta' - \alpha')}{e^{\beta'^* t_0} (\beta'^* - \alpha'^*)} \tag{69}$$

したがって (65) 式は次式になる。

$$\psi_1^*(t) = J_1^* \frac{e^{\alpha' t_0} (\beta' - \alpha')}{e^{\alpha'^* t_0} (\beta'^* - \alpha'^*)} e^{\alpha'^* t} + J_2^* \frac{e^{\beta' t_0} (\beta' - \alpha')}{e^{\beta'^* t_0} (\beta'^* - \alpha'^*)} e^{\beta'^* t} \tag{70}$$

さて, (70) 式として求められた切換後の補助変数 $\psi_1^*(t)$ が再び零軸をよぎることの有無を確かめる。この為に前記と同様に (70) 式の左辺を零とおいて, 零軸をよぎる時刻 t_0^* を求めると, つぎの関係

$$\begin{aligned} -\frac{J_1}{J_2} &= \frac{e^{(\beta' - \alpha')t_0}}{e^{(\beta'^* - \alpha'^*)t_0}} \times e^{(\beta'^* - \alpha'^*)t_0^*} \\ &= e^{(\beta' - \alpha')t_0^*} \end{aligned} \quad (71)$$

より, 求める t_0^* は

$$t_0^* = \frac{\log(-J_1/J_2)}{\beta' - \alpha'} = t_0 \quad (72)$$

となり t_0 と等しくなる。すなわち (72) 式は時刻 t_0 で制御の切換が行なわれた後の補助変数 ϕ^* は再び零軸をよぎることがないことを意味するものであり, したがって Case 1 の場合には, 最適切換数の最大値は 1 であることがわかる。

つぎに, 上記の切換えによる最適制御を, $\bar{V}(t)$ で示すと, $\bar{V}(t)$ は次式 (73) によって示すことができる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}(t) &= M \quad (\text{制御が } M \text{ である区間に対して}) \\ \bar{V}(t) &= -M \quad (\text{制御が } -M \text{ である区間に対して}) \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

いま, 原子炉系に (73) 式で示される制御, すなわち最適制御が加えられるときの, 状態変数の位相点の軌跡 (最適軌道) を求める。このためには, 軌道の方程式 (45), (46) を, 式中の $v(t)$ のかわりに, (73) 式で与えられる $\bar{V}(t)$ でおきかえたうえで解く。方程式内の $v(t)$ を $\bar{V}(t)$ でおきかえたときの系の特性根を $\bar{\alpha}$ および β とすると (実際には制御が M である区間に対しては α と β であり, また, 制御が $-M$ である区間に対しては α^* と β^* であるが, これらを代表して $\bar{\alpha}$, β であらわしてある。), この $\bar{\alpha}$ と β とを使用して, 最適軌道上の状態変数 y_1 , y_2 は次式 (74) で与えられる。すなわち

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{\tau \bar{\alpha} \beta}{\bar{\alpha} - \beta} (e^{\bar{\alpha} t} - e^{\beta t}) \bar{y}_{20} + \frac{1}{\bar{\alpha} - \beta} (\bar{\alpha} e^{\bar{\alpha} t} - \beta e^{\beta t}) \bar{y}_{10} \\ &\quad + \frac{b_3 \bar{V}}{\bar{\alpha} - \beta} (e^{\bar{\alpha} t} - e^{\beta t}) \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{1}{\bar{\alpha} - \beta} (\bar{\alpha} e^{\beta t} - \beta e^{\bar{\alpha} t}) \bar{y}_{20} \\ &\quad + \frac{1}{\bar{\alpha} - \beta} \cdot \frac{1}{\tau} (e^{\bar{\alpha} t} - e^{\beta t}) \bar{y}_{10} \\ &\quad + \frac{b_3 \bar{V}}{\tau \bar{\alpha} \beta} \left\{ 1 - \frac{1}{\bar{\alpha} - \beta} (\bar{\alpha} e^{\beta t} - \beta e^{\bar{\alpha} t}) \right\} \end{aligned} \quad (75)$$

ただし, \bar{y}_{10} , \bar{y}_{20} はそれぞれ, 同一制御区間に対する y_1 , y_2 の初期値である。

位相平面上における最適軌道は, 上式 (74) と (75) より t を消去することによって, 下式 (76) として求まる。

$$\left[\begin{array}{c} \beta y_1 - \tau \bar{\alpha} \beta y_2 + b_3 \bar{V} \\ \beta \bar{y}_{10} - \tau \bar{\alpha} \beta \bar{y}_{20} + b_3 \bar{V} \end{array} \right]^\alpha = \left[\begin{array}{c} \bar{\alpha} y_1 - \tau \bar{\alpha} \beta y_2 + b_3 \bar{V} \\ \bar{\alpha} \bar{y}_{10} - \tau \bar{\alpha} \beta \bar{y}_{20} + b_3 \bar{V} \end{array} \right]^\beta \quad (76)$$

さて, (76) 式で与えられる位相平面上の最適軌道の姿は, 次式 (77), (78) によって与えら

れる2対の2本の直線を検討することによってうかがうことができる。すなわち

$$\bar{L}_1: \beta y_1 - \tau \bar{a} \beta y_2 + b_3 \bar{V} = 0 \quad (77)$$

$$\bar{L}_2: \bar{a} y_1 - \tau \bar{a} \beta y_2 + b_3 \bar{V} = 0 \quad (78)$$

これらの \bar{L}_1 , \bar{L}_2 の直線の方程式の左辺は, それぞれ, (76) 式中の左右の両辺の分子に表われているものである。

これらの直線の役割を評価するために, いま, 直線 \bar{L}_1 上に初期点 $(\bar{y}_{10}, \bar{y}_{20})$ をとると, \bar{y}_{10} は次式の関係

$$\beta \bar{y}_{10} - \tau \bar{a} \beta \bar{y}_{20} + b_3 \bar{V} = 0 \quad (79)$$

より

$$\bar{y}_{10} = \tau \bar{a} \bar{y}_{20} - \frac{b_3 \bar{V}}{\beta} \quad (80)$$

として得られるが, この \bar{y}_{10} を (75) 式中に代入すると y_2 として

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{1}{\bar{a} - \beta} (\bar{a} e^{\beta t} - \beta e^{\bar{a} t}) \bar{y}_{20} \\ &+ \frac{1}{\bar{a} - \beta} \cdot \frac{1}{\tau} (e^{\bar{a} t} - e^{\beta t}) \left(\tau \bar{a} \bar{y}_{20} - \frac{b_3 \bar{V}}{\beta} \right) \\ &+ \frac{b_3 \bar{V}}{\tau \bar{a} \beta} \left\{ 1 - \frac{1}{\bar{a} - \beta} (\bar{a} e^{\beta t} - \beta e^{\bar{a} t}) \right\} \\ &= \bar{y}_{20} e^{\bar{a} t} + \frac{b_3 \bar{V}}{\tau \bar{a} \beta} (1 - e^{\bar{a} t}) \end{aligned} \quad (81)$$

を得る。つぎに, 同様に (80) 式の \bar{y}_{10} を (74) 式に代入すると, y_1 として

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\tau \bar{a} \beta}{\bar{a} - \beta} (e^{\bar{a} t} - e^{\beta t}) \bar{y}_{20} + \frac{1}{\bar{a} - \beta} (\bar{a} e^{\bar{a} t} - \beta e^{\beta t}) \\ &\times \left(\tau \bar{a} \bar{y}_{20} - \frac{b_3 \bar{V}}{\beta} \right) + \frac{b_3 \bar{V}}{\bar{a} - \beta} (e^{\beta t} - e^{\bar{a} t}) \\ &= \tau \bar{a} \left(\bar{y}_{20} e^{\bar{a} t} - \frac{b_3 \bar{V}}{\tau \bar{a} \beta} e^{\bar{a} t} \right) \end{aligned} \quad (82)$$

を得る。しかるに, (80) および (81) 式で与えられる y_2 および y_1 の値を (77) 式の左辺に代入すると, 右辺が 0 となるのが容易に証明されるので結局, 直線 \bar{L}_1 上の任意の点 $(\bar{y}_{10}, \bar{y}_{20})$ を初期点とする軌道は直線 \bar{L}_1 そのものであることがわかる。同様にして, (78) 式で与えられる直線 \bar{L}_2 も軌道となることが容易に証明される。

つぎに, 軌道の方程式 (45), (46) 式の特異点は次式の場合

$$\frac{dy_1}{dy} = \frac{dt_2}{dt} = 0 \quad (83)$$

によって求められるが, これを $(\bar{y}_{1c0}, \bar{y}_{2c0})$ とすると

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_{1c0} &= 0 \\ \bar{y}_{2c0} &= -\frac{b_3\bar{V}}{a_2+b_2\bar{V}} = \frac{b_3\bar{V}}{\tau\bar{a}\beta} \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

として求められる。しかるに、前記の \bar{L}_1 と \bar{L}_2 の交点が実は (84) 式の特異点と一致することは、(84) 式で与えられる \bar{y}_{1c0} , \bar{y}_{2c0} が直線の方程式 (77), (78) の 2 式を共に満足していることで容易に証明される。

実際は、 \bar{L}_1 , \bar{L}_2 およびその交叉点としての特異点の組は 2 組あり、1 方の組は制御が M に対応し、他方の組は制御が $-M$ に対応するものである。

上記の特異点の性質は、特性根 α , β の値によって定まり、つぎのように分類される。すなわち

- $\alpha < 0, \quad \beta < 0$: 収斂的特異点
- $\alpha > 0, \quad \beta > 0$: 発散的な特異点
- $\alpha > 0, \quad \beta < 0$ 又は $\alpha < 0, \quad \beta > 0$: 鞍部点

位相点の軌道は上記の 2 つの特異点のうちの現在適用されている側の特異点の支配をうけて描かれていく。これらの軌道の中で、原点を通過する軌跡が 2 つあって、それぞれ、制御の符号の正負に対応している。これら、原点を通過する軌跡は、“制御の切換線”の役割をすると共に、さらに、最適軌道の最終段階を形成するものである。すなわち、もし、位相点が 1 方の制御の支配のもとに運行し、上記の“制御の切換線”上の任意の点にさしかかるときは、制御の符号が他方の例に切換えられ、以後はこの“制御の切換線”そのものの上を運行し、原点に到達することになる。さて、現在の系を、2 つの符号のうちの、どちら側の符号の制御に属させるかは、現在位置している位相点の場所によって定められる。この観点より、全位相面を前記の 2 本の“制御の切換線”の各部分の結合によって作られる 1 本の境界線で 2 分割することができる。もし、位相点がこれらの 2 つの領域の 1 方に存在すれば、行なうべき制御は M であり、この制御の支配のもとに位相点が運行して、前述の“制御の切換線”上に到達すると突然、制御が $-M$ に切換えられ、“切換線”自身の上を運行して原点に到達することになる。位相点が他の側の領域に存在する場合は、これと全く逆の経路をたどる。

一般に、特異点が不安定なものであれば、必ずしも、上述の制御によって、位相点を原点に到達させることが可能ではない。原点に到達可能なためには、初期位相点はある限られた領域内に存在している必要があり、この領域以外にあれば制御は不可能になる。この限られた領域を広めるためには、外部制御の絶対値の大きさを大にすればよい。しかし、この場合は、たとえ位相点が制限された領域内にあって、原点への到達が可能であっても、安定して原点に留め置くことは難しいであろう。

(ii) Case 2

Case 2 は補助変数の系の特性根が外部制御の符号の正負に拘らず、共軛複素根の場合で

ある。この場合には、特性根 (57), (58) の根号内が負の場合であるので、特性根は次式のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \delta' - i\omega' \\ \beta' &= \delta' + i\omega' \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

ただし、ここで、 δ' , ω' は、それぞれ

$$\begin{aligned} \delta' &= -\frac{(a_1 + b_1 V)}{2} \\ \omega' &= \sqrt{-\left(\frac{a_1 + b_1 V}{2}\right)^2 - (a_2 + b_2 V)/\tau} \end{aligned} \quad (86)$$

である。つぎに、軌道の方程式の特性根 (59), (60) は同様に次式

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \delta - i\omega \\ \beta &= \delta + i\omega \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

で表すことができる。したがって、 δ , ω と δ' , ω' との間には次式 (88) の関係があることが明らかである。

$$\delta = -\delta', \quad \omega = -\omega' \quad (88)$$

さて、補助変数の方程式 (49), (50) を解いて ϕ_1 を求めると、外部制御が M である区間に対する ϕ_1 は次式

$$\phi_1(t) = Me^{\delta' t} \cos(\omega' t + \theta') = Me^{-\delta t} \cos(-\omega t + \theta') \quad (89)$$

として得られ、また、制御が $-M$ の区間に対する ϕ_1 を ϕ_1^* とすると、 ϕ_1^* は次式

$$\phi_1^*(t) = M^* e^{\delta'^* t} \cos(\omega'^* t + \theta'^*) = M^* e^{-\delta^* t} \cos(-\omega^* t + \theta'^*) \quad (90)$$

として求められる。ただし、ここで、星印の附したものはすべて制御が $-M$ の区間に対する諸量を示すものである。

つぎに、軌道は原方程式 (45), (46) の直接の考察を加えて、現在加えられている側の制御に対応した特異点のまわりに回転する螺線状のものであることが分る。最適制御は、(89), (90) 式から明らかな如く、軌道の最初と最後の区間を除いて、現在の符号に対応する側の特異点のまわりを π だけ回転し、回転角が π となるとき、他方の符号に切換えられる制御であることがわかる。制御の符号が変わると、位相点は他方の特異点の支配を受けようになり、回転角が π となると、再びもとの制御に切換えられていくことを繰返して行く。Case 1 と同様に、原点を通る軌道は“制御の切換線”であると共に、又、最終区間の軌道を形成するものである。位相面は同様に 2 つの領域に分割されて、いずれの側の制御に属させるべきかが決定される。

初期点、 $(\bar{y}_{10}, \bar{y}_{20})$ に対する状態変数 y_1, y_2 は (45), (46) 式を解いて下式で与えられる。

$$y_1 = e^{\bar{\omega}t} \left[\bar{y}_{10} \cos \bar{\omega}t + \left\{ \delta \bar{y}_{10} - \tau(\delta^2 + \bar{\omega}^2) \bar{y}_{20} + b_3 \bar{V} \right\} \cdot \frac{1}{\bar{\omega}} \text{Sin } \bar{\omega}t \right] \quad (91)$$

$$y_2 = e^{\bar{\omega}t} \left[\left\{ 1 - \frac{b_3 \bar{V}}{\tau(\delta^2 + \bar{\omega}^2)} \right\} \cos \bar{\omega}t + \left\{ \frac{1}{\tau} \bar{y}_{10} - \delta \bar{y}_{20} + \frac{\delta b_3 \bar{V}}{\tau(\delta^2 + \bar{\omega}^2)} \right\} \cdot \frac{1}{\bar{\omega}} \text{Sin } \bar{\omega}t \right] + \frac{\bar{V} b_3}{\tau(\delta^2 + \bar{\omega}^2)} \quad (92)$$

ただし、ここで、 δ , $\bar{\omega}$ は (87) 式の δ , ω において、 v が \bar{V} によって置き換えられた値である。

(iii) Case 3

Case 3 は制御の切換えの際に、系の特性根が 2 実根と共軛複素根の場合を移動する場合である。したがって、2 つの特異点のうちの 1 方は節点の特異点で、他方は渦心点の特異点である。位相面は初期点の位置に関して 3 領域に分割される。第 1 の領域は、最適制御のためにまず、渦心点の特異点の支配下におくような制御を加え、つぎに切換線上で 1 回の切換をうけて、節点の特異点の支配のもとに原点に到達させる領域である。第 2 の領域は、まず節点の特異点の支配におくような制御を加え、つぎに 1 回の切換をうけて、渦心点の特異点の支配のもとに、原点に到達させる領域である。第 3 の領域は、第 2 の領域と類似しているが、しかし、最初の切換えを受けて、渦心点の特異点の支配のもとにおくが、回転角 π で、再びもとの制御に切換え、節点の特異点の支配のもとに原点に到達させる領域である。

2.4 切換条件式の評価

(56) 式で与えられる直線は、位相点がこの直線上に到来すれば制御の切換がなされる故、もう一つの切換条件を構成するものである。しかし、前述の如く、通常の原子炉ではこの切換用直線は、原点より極めて遠方に存在するので、原点の近傍を問題としている限りは考慮の必要がなくなる。このことを示すために、直線 (56) が y_1 軸および y_2 軸と交叉する点 $(y_{1s}, 0)$, $(0, y_{2s})$ を求める。すなわち、 y_{1s} , y_{2s} は (56) 式より

$$y_{1s} = -b_3/b_1 = \frac{mx_{2p}}{\frac{2m-1}{m-1} + \frac{1}{m-1} \cdot \frac{\rho_0}{\beta} (ms+1) + 1} \quad (93)$$

$$y_{2s} = -b_3/b_2 = \frac{mx_{2p}}{2m + \frac{m}{m-1} \cdot \frac{\rho_0}{\beta} s + 1} \quad (94)$$

として求められる。通常の原子炉で満足される前述の条件のもとにおいては、(93), (94) で与えられる y_{1s} , y_{2s} はそれぞれ、次式 (95)

$$\left. \begin{aligned} y_{1s} &\approx \frac{m}{2} x_{2p} \\ y_{2s} &\approx \frac{1}{2} x_{2p} \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

のごとく近似化される。しかるに、これらの値は考えている領域の大きさに比べると、遙かに大きな値であるので、考慮の対称に入らないことが明らかである。

3. 計算結果と考察

緒言で述べたごとく、原子炉の熱および核定数、熱出力値、外部制御の大きさ、ならびに符号等を広範囲に変え、系の特性および最適制御、ならびに、それに伴う最適軌道を計算して求めた。Fig. 1~Fig. 5 は系の種々の態様のものについての代表的な例を示すものである。

Fig. 1 は 2 つの特異点がともに収斂的節点の場合の例を示すものである。ハッチした線は位相点を I および II の 2 つの領域にわける境界線で、適用されるべき制御は、領域 I においては $-M$ であり、II においては M である。運行する位相点がハッチした線上に到来すると、制御の符号が他方の符号に切り換え、その後は、ハッチした線自身の上を運行し、原点に到達することが明瞭に見られる。軌道の姿はつぎのようである。すなわち、位相点は \bar{L}_2 線に略平行な線として \bar{L}_1 線に近接して行き、 \bar{L}_1 線の近傍で急に大きく方向を変え、 \bar{L}_1 線を漸近線として特異点に向ってゆくことがわかる。Fig. 2 には、2 つの特異点が発散的特異点である場合の例を示す。前述の如く、最適制御によって、位相点を原点に到達させ得るためのある有限な領域が存在することが見られる。Fig. 3 には、2 つの特異点が共に収斂的な渦心点である場合の例を示す。ハッチした線は同様に、位相面を 2 つの領域に分割し、行なわれるべき制御の符号を

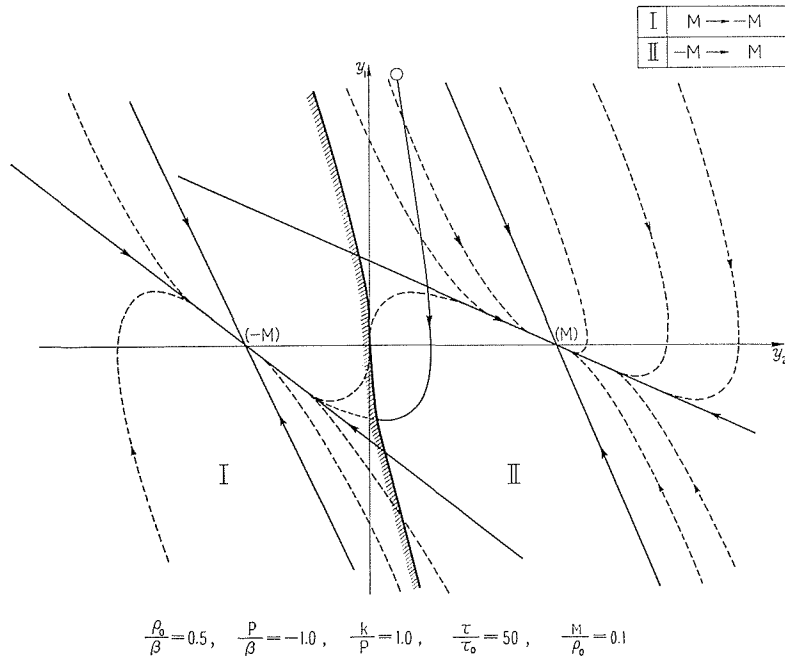


Fig. 1. Switching Boundary and Optimum Trajectory in Phase Space (Two Nodal Singular Points)

決定している。Fig. 4には、2つの特異点のうちの1方が収斂的節点、他方が収斂的渦心点である場合の Schema を示す。3つの領域の分割がなされ、それぞれに異なった制御方式があることがみられる。Fig 5にはこの場合についての実際的な例の1つを示す。

以上要約すると、本研究は、具体的な原子炉について、外乱によって出力平衡点よりづれた状態を、最適時間で出力平衡点へ復帰させるための制御を求め得る極めて具体的かつ実用的な一つの研究であると考えられ、さらに、より全体的な領域(非直線の場合)に対する最適制御への評価を与えるものであると考えられる。

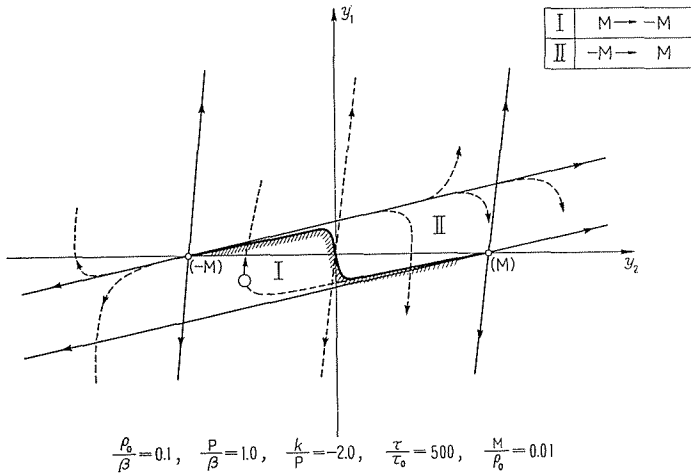


Fig. 2. Switching Boundary and Optimum Trajectory in Phase Space (Two Nodal Singular Points)

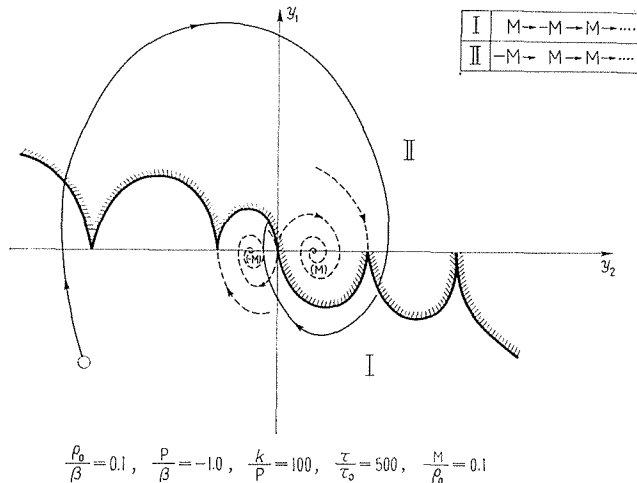


Fig. 3. Switching Boundary and Optimum Trajectory in Phase Space (Two Focal Singular Points)

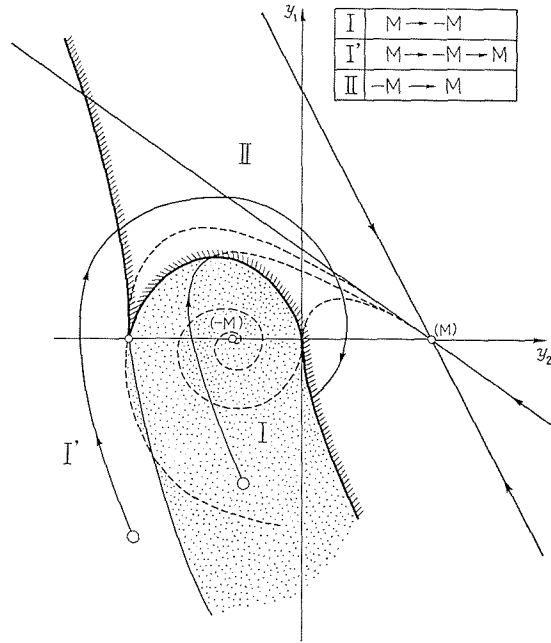
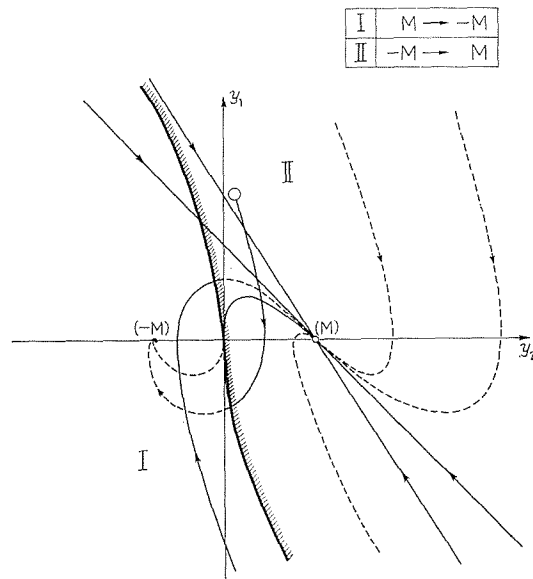


Fig. 4. Switching Boundary and Optimum Trajectory in Phase Space (One is Nodal and the Other is Focal Singular Point)



$$\frac{\rho_0}{\beta} = 0.1, \quad \frac{p}{\beta} = -1.0, \quad \frac{k}{p} = 1.0, \quad \frac{\tau_0}{\tau} = 5, \quad \frac{M}{\rho_0} = 0.1$$

Fig. 5. Switching Boundary and Optimum Trajectory in Phase Space (One is Nodal and the Other is Focal Singular Point)

参考文献

- 1) Pontryagin, L. S. et al.: "The Mathematical Theory of Optimal Processes" (1962), Wiley.
- 2) Andreiev, V. N. et al.: At. Energ. 7, 363 (1959).
- 3) Salle, J. La. et al.: "Stability by Liapunov's Direct Method" (1961), Academic Press.
- 4) Ash, M.: "Nuclear Reactor Kinetics" (1965), McGRAW-HILL.
- 5) Bellman, R. E. et al., "Applied Dynamic Programming" (1962), Princeton.
- 6) 小川: 日本原子力学会誌, 7, 6 (1965).
- 7) Ogawa, Y. et al.: J. Nucl. Sci. Technol, 3, 11 (1966)
- 8) 小川・小沢: 北大工研究報告, No. 41 (1966).

Appendix A

(1), (2) 式の積分方程式型運動方程式は次のように (4), (5) 式の微分方程式に変換される。

すなわち

$$w(t) = \frac{\beta}{\tau_0 [\beta - \rho(t)]} \int_0^t w(t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_0}\right) dt' \quad (1)$$

$$\rho(t) = \sigma(t) + Ew(t) + F \int_0^t w(t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) dt' \quad (2)$$

式において, (1) 式より

$$\rho(t) = \beta - \frac{\beta}{\tau_0 w(t)} \int_0^t w(t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_0}\right) dt' \quad (\text{App-1})$$

を得, これと (2) 式の右辺とを等値して

$$\begin{aligned} & \int_0^t w(t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_0}\right) dt' \\ &= \frac{\tau_0 w(t)}{\beta} \left[\beta - \sigma(t) - Ew(t) - F \int_0^t w(t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) dt' \right] \end{aligned} \quad (\text{App-2})$$

を得る。いま

$$\frac{\tau_0}{\beta} = A, \quad \beta - \sigma(t) = D(t) \quad (\text{App-3})$$

とおくと, (App-2) 式は

$$\begin{aligned} & \int_0^t w(t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_0}\right) dt' \\ &= Aw(t) \left[D(t) - Ew(t) - F \int_0^t w(t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) dt' \right] \end{aligned} \quad (\text{App-4})$$

となるが, この式の両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\tau_0} \int_0^t w(t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_0}\right) dt' + w(t) \\ &= Aw(t) \left[\frac{dD(t)}{dt} - E \frac{dw(t)}{dt} + \frac{F}{\tau} \int_0^t w(t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) dt' - Fw(t) \right] \\ &+ A \frac{dw(t)}{dt} \left[D(t) - Ew(t) - F \int_0^t w(t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) dt' \right] \end{aligned} \quad (\text{App-5})$$

を得る。(App-5) 式の左辺に (App-2) 式を代入して整理すると

$$\begin{aligned} & \int_0^t w(t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) dt' \left[\left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau}\right) AFw(t) + AF \frac{dw(t)}{dt} \right] \\ &= w^2(t) \left(-\frac{AE}{\tau_0} - AF \right) + w(t) \left\{ \frac{AD(t)}{\tau_0} - 1 + A \frac{dD(t)}{dt} \right\} \\ &+ (-2AE) w(t) \frac{dw(t)}{dt} + AD(t) \frac{dw(t)}{dt} \end{aligned} \quad (\text{App-6})$$

を得る。

(App-6) 式において

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau}\right) AF &= \left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau}\right) \frac{\tau_0 F}{\beta} = e \\ -\frac{AE}{\tau_0} - AF &= -\frac{E}{\beta} - \frac{\tau_0 F}{\beta} = f \\ \frac{AD(t)}{\tau_0} - 1 &= -\frac{\sigma(t)}{\beta} = -\frac{\rho_0 + u(t)}{\beta} = G(t) \\ -2Ap &= -2\frac{\tau_0 E}{\beta} = H \end{aligned} \right\} \quad (\text{App-7})$$

とおくと, (App-6) 式は

$$\begin{aligned} & \int_0^t w(t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) dt' \left[ew(t) + AF \frac{dw(t)}{dt} \right] \\ &= fw^2(t) + G(t)w(t) + A \frac{dD(t)}{dt} \cdot w(t) + Hw(t) \frac{dw(t)}{dt} + AD(t) \frac{dw(t)}{dt} \end{aligned} \quad (\text{App-8})$$

となる。(App-8) 式の両辺を再び t で微分すると

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{1}{\tau} \int_0^t w(t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) dt' + w(t) \right] \left[ew(t) + AF \frac{dw(t)}{dt} \right] \\ &+ \left[\int_0^t w(t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) dt' \right] \left[e \frac{dw(t)}{dt} + AF \frac{d^2w(t)}{dt^2} \right] \\ &= 2fw(t) \frac{dw(t)}{dt} + G(t) \frac{dw(t)}{dt} + \frac{dG(t)}{dt} \cdot w(t) + A \frac{dD(t)}{dt} \cdot \frac{dw(t)}{dt} \\ &+ A \frac{d^2D(t)}{dt^2} \cdot w(t) + Hw(t) \cdot \frac{d^2w(t)}{dt^2} + H \left\{ \frac{dw(t)}{dt} \right\}^2 + AD(t) \frac{d^2w(t)}{dt^2} \\ &+ A \frac{dD(t)}{dt} \cdot \frac{dw(t)}{dt} \end{aligned}$$

を得るが, これをまとめると

$$\begin{aligned} & \int_0^t w(t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) dt' \left[-\frac{e}{\tau} w(t) + \left(-\frac{AF}{\tau} + e\right) \frac{dw(t)}{dt} + AF \frac{d^2w(t)}{dt^2} \right] \\ &= -ew(t)^2 + \left\{ \frac{dG(t)}{dt} + A \frac{d^2D(t)}{dt^2} \right\} w(t) + (2f - AF) w(t) \frac{dw(t)}{dt} \\ &+ \left\{ G(t) + 2A \frac{dD(t)}{dt} \right\} \frac{dw(t)}{dt} + H \left\{ \frac{dw(t)}{dt} \right\}^2 + Hw(t) \frac{d^2w(t)}{dt^2} \\ &+ AD(t) \frac{d^2w(t)}{dt^2} \end{aligned} \quad (\text{App-9})$$

を得る。(App-9) 式において

$$\left. \begin{aligned} -\frac{e}{\tau} &= -\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau} \right) \cdot \frac{\tau_0 F}{\beta} = J \\ -\frac{AF}{\tau} + e &= \left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{2}{\tau} \right) \cdot \frac{\tau_0 F}{\beta} = I \\ 2f - AF &= -\frac{2E}{\beta} - 3 \frac{\tau_0 F}{\beta} = N \\ \frac{\tau_0 F}{\beta} &= Q \end{aligned} \right\} \quad (\text{App-10})$$

とおくと

$$\begin{aligned} & \int_0^t w(t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) dt' \left[Jw(t) + I \frac{dw(t)}{dt} + AF \frac{d^2w(t)}{dt^2} \right] \\ &= -ew^2(t) + \left\{ \frac{dG(t)}{dt} + A \frac{d^2D(t)}{dt^2} \right\} w(t) + Nw(t) \frac{dw(t)}{dt} \\ &+ \left\{ G(t) + 2A \frac{dD(t)}{dt} \right\} \cdot \frac{dw(t)}{dt} + H \frac{dw(t)}{dt} + Hw(t) \frac{d^2w(t)}{dt^2} \\ &+ AD(t) \frac{d^2w(t)}{dt^2} \end{aligned} \quad (\text{App-11})$$

となる。(App-11) 式の両辺に $\left\{ ew + AF \frac{dw(t)}{dt} \right\}$ を乗じて、(App-8) 式の関係を用いると

$$\begin{aligned} & \left[fw^2(t) + G(t) w(t) + A \frac{dD(t)}{dt} \cdot w(t) + Hw(t) \frac{dw(t)}{dt} + AD(t) \frac{dw(t)}{dt} \right] \\ & \times \left[Jw(t) + I \frac{dw(t)}{dt} + AF \frac{d^2w(t)}{dt^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{App-12})$$

となり、積分の項は消去される。(App-12) 式の積を分解してまとめると

$$\begin{aligned} & \frac{d^2w(t)}{dt^2} \left[(fAF - eH) w^2(t) + \left\{ AFG(t) - eAD(t) + A^2F \frac{dD(t)}{dt} \right\} w(t) \right] \\ &= \left\{ \frac{dw(t)}{dt} \right\}^3 [HAF] + \left\{ \frac{dw(t)}{dt} \right\}^2 w(t) [-HI + eH + NAF] \\ &+ \frac{dw(t)}{dt} w(t)^2 [-fI + eN - eAF - HJ] + w(t)^3 [-fJ - e^2] \\ &+ \left\{ \frac{dw(t)}{dt} \right\}^2 \left[-AD(t)I + AFG(t) + 2A^2F \frac{dD(t)}{dt} \right] \\ &+ \frac{dw(t)}{dt} \cdot w(t) \left[-G(t)I - AD(t)J + eG(t) + 2Ae \frac{dD(t)}{dt} \right] \\ &+ AF \frac{dG(t)}{dt} + A^2F \frac{d^2D(t)}{dt^2} - AI \frac{dD(t)}{dt} \\ &+ w^2(t) \left[-G(t)J - AJ \frac{dD(t)}{dt} + e \frac{dG(t)}{dt} + eA \frac{d^2D(t)}{dt^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{App-13})$$

を得る。

いま、(App-13) 式において

$$HAF = \left(-2 \frac{\tau_0 E}{\beta} \right) \cdot \frac{\tau_0}{\beta} F = -2 \frac{\tau_0 E}{\beta} Q = A' \quad (\text{App-14})$$

$$\begin{aligned}
& -HI + eH + NAF \\
& = \left(-2 \frac{\tau_0 E}{\beta}\right) \left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{2}{\tau}\right) \cdot \frac{\tau_0 F}{\beta} + \left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau}\right) \cdot \frac{\tau_0 F}{\beta} \cdot \left(-2 \frac{\tau_0 E}{\beta}\right) \\
& + \left(-\frac{2E}{\beta} - 3 \frac{\tau_0 F}{\beta}\right) \cdot \frac{\tau_0}{\beta} F \\
& = \left(-\frac{2E}{\beta} - \frac{2E}{\beta} \cdot \frac{\tau_0}{\tau} - \frac{3F}{\beta} \tau_0\right) Q = A'_2 \tag{App-15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -fI + eN - eAF - HJ \\
& = -\left(-\frac{E}{\beta} - \frac{\tau_0 F}{\beta}\right) \left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{2}{\tau}\right) \cdot \frac{\tau_0 F}{\beta} + \left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau}\right) \cdot \frac{\tau_0 F}{\beta} \left(-\frac{2E}{\beta} - \frac{3\tau_0 F}{\beta}\right) \\
& - \left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau}\right) \left(\frac{\tau_0 F}{\beta}\right)^2 - \left(-2 \frac{\tau_0 E}{\beta}\right) \left(-\frac{1}{\tau}\right) \left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau}\right) \frac{\tau_0 F}{\beta} \\
& = \left(-\frac{E}{\beta \tau_0} - \frac{2E}{\beta \tau} - \frac{3F}{\beta} + \frac{2E\tau_0}{\beta \tau^2} + \frac{2F\tau_0}{\beta \tau}\right) Q = A'_3 \tag{App-16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -fJ - e^2 \\
& = -\left(-\frac{E}{\beta} - \frac{\tau_0 F}{\beta}\right) \left(-\frac{1}{\tau}\right) \left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau}\right) \cdot \frac{\tau_0 F}{\beta} - \left\{\left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau}\right) \cdot \frac{\tau_0 F}{\beta}\right\}^2 \\
& = \frac{1}{\beta \tau} (E + \tau F) \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_0}\right) Q = A'_4 \tag{App-17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -AD(t)I + AFG(t) + 2A^2F \frac{dD(t)}{dt} \\
& = -\frac{\tau_0}{\beta} \left\{\beta - \rho_0 - u(t)\right\} \left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{2}{\tau}\right) \cdot \frac{\tau_0 F}{\beta} \\
& + \frac{\tau_0 F}{\beta} \left(-\frac{1}{\beta}\right) \left\{\rho_0 + u(t)\right\} + 2 \left(\frac{\tau_0}{\beta}\right)^2 F \left(-\frac{du(t)}{dt}\right) \\
& = \left[\left(-1 + 2 \frac{\tau_0}{\tau} + 2 \frac{\rho_0}{\beta} \cdot \frac{\tau_0}{\tau}\right) + \left(-2 \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\tau_0}{\tau}\right) u(t) - 2 \frac{\tau_0}{\beta} \cdot \frac{du(t)}{dt}\right] Q = A'_5 \tag{App-18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -G(t)I - AD(t)J + eG(t) + 2Ae \frac{dD(t)}{dt} + AF \frac{dG(t)}{dt} \\
& + A^2F \frac{d^2D(t)}{dt^2} - AI \frac{dD(t)}{dt} \\
& = \frac{1}{\beta} \left\{\rho_0 + u(t)\right\} \left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{2}{\tau}\right) \cdot \frac{\tau_0 F}{\beta} - \frac{\tau_0}{\beta} \left\{\beta - \rho_0 - u(t)\right\} \left(-\frac{1}{\tau}\right) \left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau}\right) \frac{\tau_0 F}{\beta} \\
& + \left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau}\right) \cdot \frac{\tau_0 F}{\beta} \left(-\frac{1}{\beta}\right) \left\{\tau_0 + u(t)\right\} \\
& + 2 \frac{\tau_0}{\beta} \left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau}\right) \cdot \frac{\tau_0 F}{\beta} \left(-\frac{du(t)}{dt}\right) + \frac{\tau_0}{\beta} F \left\{-\frac{1}{\beta} u(t)\right\} \\
& = \left[\left\{\frac{\rho_0}{\beta} \left(-\frac{2}{\tau} + \frac{\tau_0}{\tau^2}\right) + \frac{1}{\tau} + \frac{\tau_0}{\tau^2}\right\} + \frac{1}{\beta} \left(-\frac{2}{\tau} + \frac{\tau_0}{\tau^2}\right) u(t) \right. \\
& \left. - \frac{2}{\beta} \frac{du(t)}{dt} - \frac{\tau_0}{\beta} \cdot \frac{d^2u(t)}{dt^2}\right] Q = A'_6 \tag{App-19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -G(t)J - AJ \frac{dD(t)}{dt} + e \frac{dG(t)}{dt} + eA \frac{d^2D(t)}{dt^2} \\
&= -\frac{1}{\beta} \left\{ \rho_0 + u(t) \right\} \left(- \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau} \right) \cdot \frac{\tau_0 F}{\beta} - \frac{\tau_0}{\beta} \cdot \right. \\
&\quad \left. \left(- \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau} \right) \cdot \frac{\tau_0 F}{\beta} \left(- \frac{du(t)}{dt} \right) \right) \right. \\
&+ \left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau} \right) \frac{\tau_0 F}{\beta} \left(- \frac{1}{\beta} \cdot \frac{du(t)}{dt} + \left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau} \right) \frac{\tau_0 F}{\beta} \cdot \frac{\tau_0}{\beta} \left(- \frac{d^2u(t)}{dt^2} \right) \right. \\
&= \left[-\frac{\rho_0}{\beta} \cdot \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau} \right) + \left\{ -\frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau} \right) \right\} u(t) \right. \\
&\quad \left. + \left\{ -\frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{\tau_0}{\tau^2} \right) \right\} \frac{du(t)}{dt} + \left\{ -\frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau} \right) \right\} \frac{d^2u(t)}{dt^2} \right] = A'_7 \quad (\text{App-20})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& fAF - eH \\
&= \left(-\frac{E}{\beta} - \frac{\tau_0 F}{\beta} \right) \cdot \frac{\tau_0 F}{\beta} - \left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau} \right) \cdot \frac{\tau_0 F}{\beta} \left(- \right) 2 \frac{\tau_0 E}{\beta} \\
&= \left(\frac{E}{\beta} - \frac{2E}{\beta} \cdot \frac{\tau_0}{\tau} - \frac{\tau_0 F}{\beta} \right) Q = A'_8 \quad (\text{App-21})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& AFG(t) - eAD(t) + A^2F \frac{dD(t)}{dt} \\
&= \frac{\tau_0 F}{\beta} \left(- \right) \frac{\rho_0 + u(t)}{\beta} - \left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau} \right) \cdot \frac{\tau_0 F}{\beta} \cdot \frac{\tau_0}{\beta} \left\{ \beta - \rho_0 - u(t) \right\} \\
&\quad + \left(\frac{\tau_0}{\beta} \right)^2 \cdot F \cdot \left(- \right) \frac{du(t)}{dt} \\
&= \left[\left\{ -1 + \frac{\tau_0}{\tau} - \frac{\rho_0}{\beta} \cdot \frac{\tau_0}{\tau} \right\} + \left(-\frac{1}{\beta} \cdot \frac{\tau_0}{\tau} \right) u(t) - \frac{\tau_0}{\beta} \cdot \frac{du(t)}{dt} \right] Q = A'_9 \quad (\text{App-22})
\end{aligned}$$

とおき、また、次式

$$w(t) = x_2, \quad \tau \frac{dw(t)}{dt} = x_1 \quad (\text{App-23})$$

の置換を行なうと、(App-13) 式は

$$\begin{aligned}
& \frac{dx_1}{dt} = \\
& \frac{1}{Q} \left[\left(\frac{A'_1}{\tau^2} \right) x_1^3 + \left(\frac{A'_2}{\tau} \right) x_1^2 x + (A'_3) x_1 x_2^2 + (\tau A'_4) x_2^3 + \left(\frac{A'_5}{\tau} \right) x_1^2 + (A'_6) x_1 x^2 + (\tau A'_7) x_2^2 \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{Q} \left[A'_8 x_2^2 + A'_9 x_2 \right] \right]
\end{aligned} \quad (\text{App-24})$$

に帰せしめられる。

さて、(App-24) 式において、さらに、つぎの関係、すなわち

$$\frac{1}{Q} \cdot \frac{A'_1}{\tau^2} = -2 \frac{E}{\beta} \cdot \frac{\tau_0}{\tau^2} = A_1 \quad (\text{App-25})$$

$$\frac{1}{Q} \cdot \left(\frac{A'_2}{\tau} \right) = -\frac{2E}{\beta\tau} - \frac{\tau_0}{\beta\tau^2} (2E+3\tau F) = A_2 \quad (\text{App-26})$$

$$\frac{1}{Q} \cdot A'_3 = -\frac{E}{\beta\tau} - \frac{1}{\beta\tau} (2E+3\tau F) + \frac{2\tau_0}{\beta\tau^2} (E+\tau F) = A_3 \quad (\text{App-27})$$

$$\frac{1}{Q} \cdot \tau A'_4 = \frac{1}{\beta\tau} (E+\tau F) \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0} \right) = A_4 \quad (\text{App-28})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q} \cdot \frac{A'_5}{\tau} &= -\frac{1}{\tau} + 2 \frac{\tau_0}{\tau^2} \left(1 - \frac{\rho_0}{\beta} \right) - 2 \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\tau_0}{\tau^2} u(t) \\ &\quad - 2 \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\tau_0}{\tau^2} \tau \cdot \dot{u}(t) = A_5(u) \end{aligned} \quad (\text{App-29})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q} \cdot A'_6 &= \frac{1}{\tau} - 2 \frac{\rho_0}{\beta} \cdot \frac{1}{\tau} + \frac{\tau_0}{\tau^2} \left(1 + \frac{\rho_0}{\beta} \right) - \frac{1}{\tau} \left(2 + \frac{\tau_0}{\tau} \right) \frac{1}{\beta} u(t) \\ &\quad - \frac{2}{\tau} \cdot \frac{1}{\beta} \tau \dot{u}(t) - \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{\beta} \tau_0 \tau \ddot{u}(t) = A_6(u) \end{aligned} \quad (\text{App-30})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q} \cdot (\tau A'_7) &= \frac{\rho_0}{\beta\tau} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0} \right) - \frac{1}{\beta\tau_0} \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau} \right) u(t) \\ &\quad - \frac{1}{\beta\tau_0} \left(1 - \frac{\tau_0^2}{\tau^2} \right) \tau \dot{u}(t) - \frac{1}{\beta\tau_0} \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau} \right) \tau_0 \tau \ddot{u}(t) = A_7(u) \end{aligned} \quad (\text{App-31})$$

$$\frac{1}{Q} A'_8 = \frac{E}{\beta} - \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\tau_0}{\tau} (2E+\tau F) = A_8 \quad (\text{App-32})$$

$$\frac{1}{Q} A'_9 = -1 + \frac{\tau_0}{\tau} \left(1 - \frac{\rho_0}{\beta} \right) - \frac{1}{\beta} \frac{\tau_0}{\tau} u(t) - \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\tau_0}{\tau} \tau \dot{u}(t) = A_9(u) \quad (\text{App-33})$$

を導入すると、(App-24) 式は

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{A_1 x_1^3 + A_2 x_1^2 x_2 + A_3 x_1 x_2^2 + A_4 x_2^3 + A_5(u) x_1^2 + A_6(u) x_1 x_2 + A_7(u) x_2^2}{A_8 x_2^2 + A_9(u) x_2} \quad (\text{App-34})$$

となる。上式は誘導しようとする(4)式と合致し、かくて誘導の目的が達せられた。(5)式は(App-23)式の関係から容易に求められる。

Appendix B

制御反応度 u 、および、その変化速度 \dot{u} 、ならびに、変化加速度 \ddot{u} の 1 次結合によって表される新しい 1 つの制御量 v 、すなわち

$$v = u + \tau\dot{u} + \tau\tau_0\ddot{u}$$

を導入したいきさつは、つぎのごとくである。すなわち、もし、上記の 3 つの制御パラメータ u 、 \dot{u} 、 \ddot{u} が互に独立なものであると仮定できるならば、最適制御は比較的容易に求まり、それは、3 つの次元によって表される制御領域の頂点間を移行する制御であるとして得られるであろう。しかし、上記のような仮定を設けることは明らかに許されないので、このような制御方式は適当とされない。

つぎに、3 つのパラメータのうち \ddot{u} のみを制御パラメータとし、 u 、 \dot{u} は制御 \ddot{u} によって支配をうける状態変数とみなす方法が考えられる。しかし、この方法では、状態変数の次元数が従来のもを加えて、著しく高められ、問題を不必要に複雑にし、実際の制御方式として適当でないと考えられる。

以上の理由により、前述の v を制御パラメータとする制御方式を採用した。この制御方式においては、 v の値は、 $v \leq M$ のように制限されているが、 u 、 \dot{u} 、 \ddot{u} に対しては、直接の制限を行っていないように見える。しかし、 u 、 \dot{u} 、 \ddot{u} の絶対値は、その全制御過程中、 M に依存してきまる制限値、 M_1 、 M_2 、 M_3 の中に、それぞれ、制限されてしまうことを示すことができる。又、逆に、 M_1 、 M_2 、 M_3 を与えるとき、 u 、 \dot{u} 、 \ddot{u} の絶対値をこれらの値の中に制限するような M を定めることもできる。これらの事実は、上記の制御方式が実現可能性を有するものであることを示している。

以下に、これらの諸制御パラメータの有限性を示し、さらに、 M と、 M_1 、 M_2 、 M_3 との間の関係式を導くことを進める。

(53) 式より明らかなごとく、最適制御は、制御パラメータ v に関して、その絶対値が M であるところの、“Piecewise Constant Control” であるので、制御過程中における u 、 \dot{u} 、 \ddot{u} の変化の様子は次式

$$\tau_0\tau\ddot{u} + \tau\dot{u} + u = M \quad (\text{制御が } M \text{ に対して}) \quad (\text{App-35})$$

$$\tau_0\tau\ddot{u} + \tau\dot{u} + u = -M \quad (\text{制御が } -M \text{ に対して}) \quad (\text{App-36})$$

を解くことによって知ることができる。上式の特性根は

$$k_1 = -\frac{1}{2\tau_0}(1+d_0) \quad (\text{App-37})$$

$$k_2 = -\frac{1}{2\tau_0}(1-d_0) \quad (\text{App-38})$$

ただし

$$d_0 = \sqrt{1-4\frac{\tau_0}{\tau}} \quad (\text{App-39})$$

として得られるが、(25) 式の条件より、明らかに両根は負の実根であることがわかる。

いま

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u'_0 \quad (\text{App-40})$$

として (App-35) 式, および, (App-36) 式を解くと, 次式が得られる。すなわち

$$u(t) = -\frac{u'_0 + k_2(\bar{M} - u_0)}{k_2 - k_1} e^{k_1 t} + \frac{u'_0 + k_1(\bar{M} - u_0)}{k_2 - k_1} e^{k_2 t} + \bar{M} \quad (\text{App-41})$$

$$\dot{u}(t) = -k_1 \frac{u'_0 + k_2(\bar{M} - u_0)}{k_2 - k_1} e^{k_1 t} + k_2 \frac{u'_0 + k_1(\bar{M} - u_0)}{k_2 - k_1} e^{k_2 t} \quad (\text{App-42})$$

を得る。ただし、上式において、 \bar{M} は (App-35) 式の解に対しては $+M$, (App-36) 式の解に対しては $-M$ を採用するものである。つぎに (App-41) 式と (App-42) 式において t を消去すると, u, \dot{u} を座標とする位相平面上における制御軌道の式

$$\left[\frac{\dot{u} + k_1(\bar{M} - u)}{u'_0 + k_1(\bar{M} - u_0)} \right]^{k_1} = \left[\frac{\dot{u} + k_2(\bar{M} - u)}{u'_0 + k_2(\bar{M} - u_0)} \right]^{k_2} \quad (\text{App-43})$$

を得る。

簡単な証明により、(App-43) 式の両辺の大括弧内の分子より得られる。次の2直線

$$\dot{u} + k_1(\bar{M} - u) = 0 : L_1$$

$$\dot{u} + k_2(\bar{M} - u) = 0 : L_2$$

は互に、(App-43) 式の平衡点 $(\bar{M}, 0)$ において交叉し、また、 L_1, L_2 自身が軌道の一部である

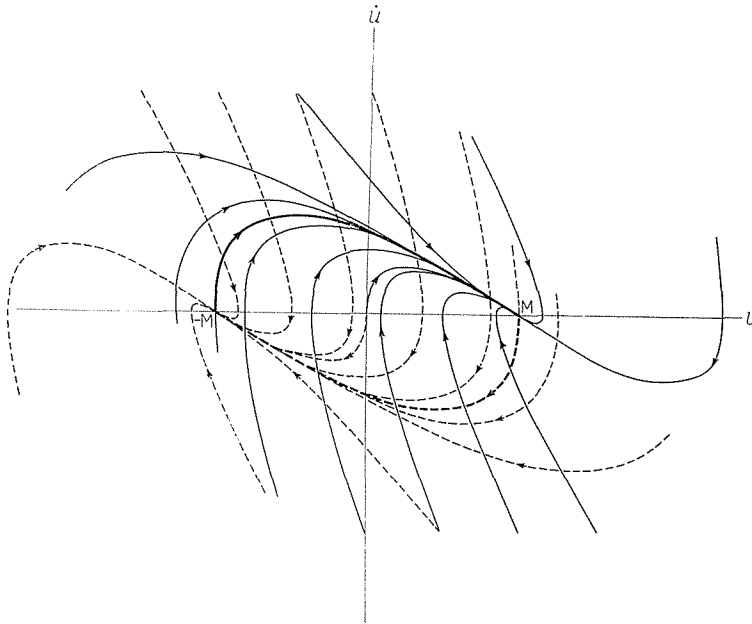


Fig. 6. Trajectory of Control Parameters in Phase Space (u, \dot{u}) (for Fixed Value of v)

ことがわかる。

Fig. 6 に、初期点 (u_0, u'_0) を種々に変えたときの制御軌道を書いてある。図中において、実線で画かれた軌道群は制御が M に対応するものであり、また、点線で画かれたものは制御が $-M$ に対応するものである。(25) 式の条件より、 $(M, 0)$ および $(-M, 0)$ の 2 つの平衡点は収斂型の節点であることがわかる。また、図において、太い実線と点線で画かれた 2 本の線はそれぞれ、制御が M と $-M$ に支配されていて、しかも相手方の平衡点 $(-M, 0)$, $(M, 0)$ を初期点とする特定の軌道であり、(App-43) 式より、下式として得られる。すなわち

$$\left[\frac{\dot{u} + k_1(\bar{M} - u)}{2k_1\bar{M}} \right]^{k_1} = \left[\frac{\dot{u} + k_2(\bar{M} - u)}{2k_2\bar{M}} \right]^{k_2} \quad (\text{App-44})$$

最適制御は、最初は無制御の状態より出発するので、制御軌道は Fig. 6 の位相面の原点より出発される。したがって、位相点が平衡点に到達する以前か、あるいは以後かにかかわらず、最適制御切換をうけて、制御軌道が変えられることがあっても、軌道は常に、(App-44) 式で与えられる図中の太い線で示される卵形の領域内にとちこめられることがわかる。この事実は制御パラメーター、 u , \dot{u} の値は常に有界であって、その制限値 M_1 および M_2 の値は M の値によって決定されることを意味するものである。この故に、 u , \dot{u} の絶対値の最大値 M_1 , M_2 の値は太線の軌道上の点において得られることが明らかである。 t をパラメーターとした太線の軌道の式は、(App-41), (App-42) 式において、初期値を

$$u_0 = -\bar{M}, \quad u'_0 = 0$$

とすることによって、次式のごとくに得られる。

$$u = \frac{\bar{M}}{d_0} \left[(1-d_0) e^{-\frac{1}{2\tau_0}(1+d_0)t} - (1+d_0) e^{-\frac{1}{2\tau_0}(1-d_0)t} \right] + \bar{M} \quad (\text{App-45})$$

$$\dot{u} = \frac{2\bar{M}}{d_0\tau} \left[-e^{-\frac{1}{2\tau_0}(1+d_0)t} + e^{-\frac{1}{2\tau_0}(1-d_0)t} \right] \quad (\text{App-46})$$

さらに、これより、 \ddot{u} はつぎのようになる。

$$\ddot{u} = \frac{M}{d_0\tau\tau_0} \left[(1+d_0) e^{-\frac{1}{2\tau_0}(1+d_0)t} - (1-d_0) e^{-\frac{1}{2\tau_0}(1-d_0)t} \right] \quad (\text{App-47})$$

以上の 3 式より、 u , \dot{u} の絶対値の最大値、 M_1 , M_2 を求めると

$$M_1 = M \quad (\text{App-48})$$

$$M_2 = \frac{2M}{d_0\tau} \left(\frac{1-d_0}{1+d_0} \right)^{\frac{1}{2d_0}} \left\{ -\sqrt{\frac{1-d_0}{1+d_0}} + \sqrt{\frac{1+d_0}{1-d_0}} \right\} \quad (\text{App-49})$$

を得る。同様に、この軌道上における \ddot{u} の最大値 M'_3 を求めると、それは、 $(-\bar{M}, 0)$ の点において得られ、その値は

$$M'_3 = \frac{2M}{\tau\tau_0} \quad (\text{App-50})$$

として求められる。しかし、(App-50)式で示される値は必ずしも考えられる領域内の最大値を示すものではない。したがって、 \ddot{u} の有界性と、その絶対値の最大値 M を求めることを進める。

\ddot{u} の有界性を示すために、まず、制御が M である側に対して考察を進め、(App-35)式より得られる \dot{u} の値、すなわち

$$\ddot{u} = \frac{1}{\tau\tau_0} [M - (\tau\dot{u} + u)] \quad (\text{App-51})$$

の絶対値を最大にする条件を求める。いま

$$-(\tau\dot{u} + u) = h \quad (\text{App-52})$$

とおくと、(App-51)式は次式

$$\ddot{u} = \frac{1}{\tau\tau_0} (M + h) \quad (\text{App-53})$$

のごとくなる。したがって、問題は、Fig. 7に示すとき、 (u, \dot{u}) 平面内において、 h をパラメータとした次の直線群

$$\dot{u} = -\frac{u}{\tau} - \frac{h}{\tau} \quad (\text{App-54})$$

のなかで、太線で包まれた卵形の領域を通るもののうち、 h の値を最大値 h_{\max} とする直線を求めることに帰する。この直線は、図に示される、太い点線の軌道に接する直線であり、またこの接点において、 \ddot{u} の値はその最大値

$$M_3 = \frac{1}{\tau\tau_0} (M + h_{\max}) \quad (\text{App-55})$$

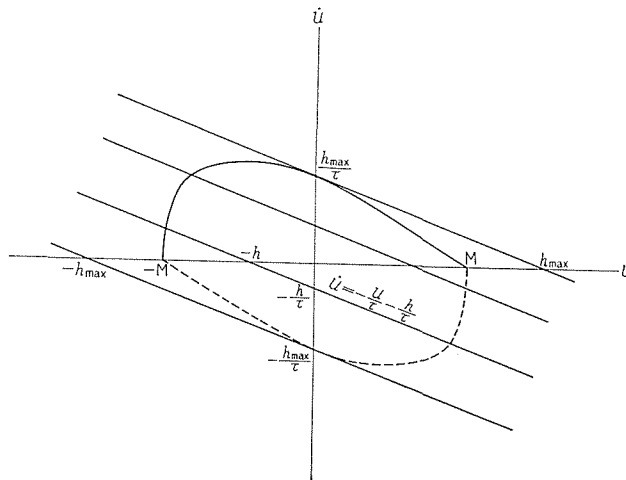


Fig. 7. Determination of the Point where Acceleration \ddot{u} has its Maximum Value

となることが図式によって求められる。解析的に \ddot{u} の最大値を求めるには、(App-45), (App-46), (App-47) 式を使用し、太い点線軌道上において、勾配が直線の勾配 $-\frac{1}{\tau}$ に等しくなる時刻 t_3 を求め、この t_3 を (App-45), (App-46) 式に代入して、接点における u , \dot{u} を求める。すなわち、太い点線の軌道に対する勾配は

$$\frac{d\dot{u}}{du} = \frac{\ddot{u}}{\dot{u}} = \frac{1}{2\tau_0} \cdot \frac{-(1+d)e^{k_1 t} + (1-d)e^{k_2 t}}{e^{k_1 t} - e^{k_2 t}} \quad (\text{App-56})$$

であるので、これを $-\frac{1}{\tau}$ と等値して

$$\frac{e^{k_2 t_3}}{e^{k_1 t_3}} = \frac{\tau(1+d_0) - 2\tau_0}{\tau(1-d_0) - 2\tau_0} \quad (\text{App-57})$$

を得る。したがって上式より t_3 は

$$t_3 = \frac{1}{k_2 - k_1} \log[s] = \frac{\tau_0}{d} \log[s] \quad (\text{App-58})$$

となる。

ただし、 $[s]$ は

$$[s] = \frac{\tau(1+d) - 2\tau_0}{\tau(1-d) - 2\tau_0} \quad (\text{App-59})$$

である。(App-58) で与えられる t_3 を (App-45), (App-46) 式に代入して接点 (u_s, \dot{u}_s) を求めると

$$u_s = \frac{M}{d_0} \left[-(1-d_0) [s]^{-\frac{1+d_0}{2d_0}} + (1+d) [s]^{-\frac{1-d_0}{2d_0}} \right] - M \quad (\text{App-60})$$

$$\dot{u}_s = \frac{2M}{d\tau} \left[[s]^{-\frac{1+d_0}{2d_0}} - [s]^{-\frac{1-d_0}{2d_0}} \right] \quad (\text{App-61})$$

を得る。これらの u_s , \dot{u}_s を (App-52) 式に代入すると、 h_{\max} は

$$\begin{aligned} h_{\max} &= -(\tau\dot{u}_s + u_s) \\ &= M \left[\frac{1-d_0}{d_0} [s]^{-\frac{1+d_0}{2d_0}} - \frac{1+d_0}{d_0} [s]^{-\frac{1-d_0}{2d_0}} \right] + M \end{aligned} \quad (\text{App-62})$$

として求まる。故に、 \ddot{u} の最大値 M_3 は (App-55) より

$$M_3 = \frac{1}{\tau\tau_0} \left[2 + \frac{1-d_0}{d_0} [s]^{-\frac{1+d_0}{2d_0}} - \frac{1+d_0}{d_0} [s]^{-\frac{1-d_0}{2d_0}} \right] M \quad (\text{App-63})$$

となる。

Fig. 8 に制御パラメーターの変動の過程が、 u と \ddot{u} を座標軸とする平面上に示されている。 \ddot{u} の値は、 u , \dot{u} と同様に有限な領域内に制限されていることが見られる。

つぎに、若し前記の直線 (App-54) が有限な太い点線の軌道の途中では接しない場合は、そ

の軌道の端の点 $(M, 0)$ において、卵形の領域に接する直線が選ばれる。この場合は、 \ddot{u} の最大値は、 $(M, 0)$ 点において得られて、(App-50) 式で示す M_3 となる。

制御が $-M$ である側に対しても、 M に対すると同様の結果が得られる。

以上を要約すると、制御パラメーター v を有界な領域 $(-M \leq v \leq M)$ に制限すると、 u 、 \dot{u} 、 \ddot{u} の値はそれらの絶対値が、それぞれ、 M の値に対して決められる制限値 M_1 、 M_2 、 M_3 の以内にあるように制限され、また、逆に、 u 、 \dot{u} 、 \ddot{u} の絶対値の制限値として、それぞれ、 M_1 、 M_2 、 M_3 を与えると、 v に対する制限値 M が決められる。この事実は v をパラメーターとする制御方式が実現可能であることを示している。

制御パラメーター v に対する制限値 M の値は次に示す不等式のすべてを満足するように決定される。

$$\left. \begin{aligned} M_1 &\geq M \\ M_2 &\geq \frac{2}{d_0 \tau} \left(\frac{1-d_0}{1+d_0} \right)^{\frac{1}{2d_0}} \left\{ -\sqrt{\frac{1-d_0}{1+d_0}} + \sqrt{\frac{1+d_0}{1-d_0}} \right\} \cdot M \\ M_3 &\geq \frac{1}{\tau \tau_0} \left[2 + \frac{1-d_0}{d_0} [s]^{-\frac{1-d_0}{2d_0}} - \frac{1+d_0}{d_0} [s]^{-\frac{1+d_0}{2d_0}} \right] M \\ \text{又は} \\ M_3 &\geq \frac{2}{\tau \tau_0} M \end{aligned} \right\} \quad (\text{App-64})$$

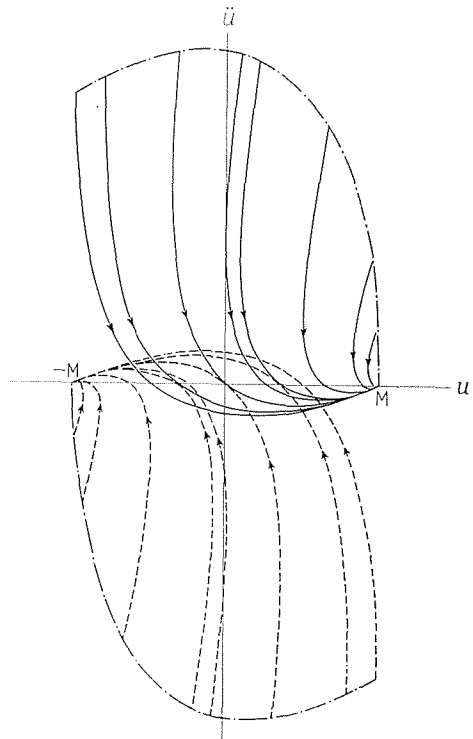


Fig. 8. Trajectory of Control Parameters in Phase Space (u, \dot{u}) (for Fixed Value of v)