



Title	Matching sectionとしてのtapered lineに関する研究
Author(s)	村田, 茂昭; Murata, Shigeaki; 片山, 辰雄 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 43, 29-48
Issue Date	1967-05-15
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40819
Type	departmental bulletin paper
File Information	43_29-48.pdf



Matching section としての tapered line に関する研究

村 田 茂 昭*

片 山 辰 雄*

(昭和 41 年 12 月 1 日受理)

Studies on a Tapered Line Used as a Matching Section

Shigeaki MURATA

Tatsuo KATAYAMA

Abstract

A tapered line or a non-uniform line have found considerable applications in microwave circuits during recent years. The tapered line is characterized by a non-constant characteristic impedance of the line along the longitudinal direction, that is, along the direction of propagation of electromagnetic waves.

One of the most common uses for such a line is in the matching of transmission lines of unequal characteristic impedance over a broad band of frequencies.

In this paper, the differential equations of a tapered line involving voltage and current, expressed as functions of the position x , are solved approximately in the case of TEM mode for assumed variations of the series inductance and parallel capacitance per unit length along the longitudinal direction x . The variation of characteristic impedance is not assumed but deduced from the solutions of the differential equations. Based on the above the equivalent circuit for the matching section consisting of a piece of tapered line is determined, and the reflection coefficient and transmission coefficient are determined.

The solutions of differential equations involve coefficients that must be determined from numerical calculations by an electronic digital computer. The result of this will be given in the next paper.

1. 緒 言

特性インピーダンスの異なる二つの loss-loss line をつなぐ一方法として tapered line があり、広帯域 matching section 等に使用されている。Tapered line または non-uniform line とは、その特性インピーダンスが距離 (電磁波の伝播方向) の関数になる line であり、これについて各種の研究がなされているが、これらは、まず、特性インピーダンスの関数形を仮定する事により解析を始める例が多い。しかし、本来特性インピーダンスは伝送方程式の解が決定されて後判明する量であり、関数形を仮定するのであれば線路の単位長あたりの直列インピー

* 電気工学科

ダンス及び並列アドミタンスに対して行なう方がより適切と考えられる。

以下の解析においては、無損失で TEM 波とみなされ得る場合 (Lecher line, 同軸 line, strip line etc.) に、線路の単位長あたりの直列インダクタンス及び並列キャパシタンスの関数形を仮定し、伝送方程式の解を導いている。解は三角級数をベキとする指数関数の形で示される。これにより taper 部分の特性インピーダンスが求まり、これを matching section として使用した場合の等価回路が定まる。等価回路より、反射係数及び透過係数は容易に求まる。

2. 従来の解析法^{1),2),3),4)}

従来, tapered line (または nonuniform line) につき各種の発表がなされているが、ほぼ次のごとき形で解析が行なわれる。伝送線路中に Fig. 2-1 のごとき impedance taper があるとす。伝送方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= -ZI \\ \frac{dI}{dx} &= -YV \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

ここで

V : 電 圧

I : 電 流

Z : 単位長あたりの直列インピーダンス

Y : 単位長あたりの並列アドミタンス

ただし Z, Y は距離 x の関数である。

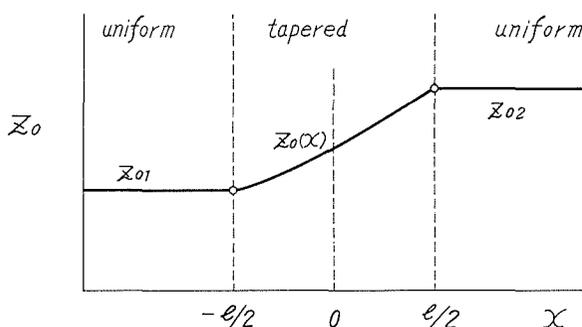


Fig. 2-1. Impedance taper

この場合, (2-1) は TEM 波のみならず TE 波, TM 波についても (主 mode 以外が十分に cut off であれば) あてはまるとされる。

$$\left. \begin{aligned} r(x) &= \sqrt{ZY} && \text{(伝 幅 定 数)} \\ Z_0(x) &= \sqrt{\frac{Z}{Y}} && \text{(特性インピーダンス)} \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

とすれば、任意の点での反射係数は

$$\rho(x) = \frac{V - IZ_0}{V + IZ_0} \quad (2-3)$$

$r(x)$ を定数と称するのは一般の場合には適当でないが、慣例によりそう呼ぶ事にする。以上の3式より Ricatti's differential equation (RDE) が得られる。

$$\frac{d\rho}{dx} - 2r\rho + \frac{1}{2}(1 - \rho^2) \frac{d \ln Z_0}{dx} = 0 \quad (2-4)$$

ここまでの方法は参考文献の各著者の間でほぼ一致している。文献1), 2), 3) においてはさらに $\rho^2 \ll 1$ の場合について解析している

$\rho^2 \ll 1$ の場合

$$\frac{d\rho}{dx} - 2r\rho + F(x) = 0$$

$$\text{where } F(x) = \frac{1}{2} \frac{d \ln Z_0}{dx}$$

したがって Fig. 2-1 のごとく座標軸が定められてあれば

$$\left. \begin{aligned} \rho(x) &= \int_x^{\frac{l}{2}} F(y) \exp\left(-2 \int_x^y r(\xi) d\xi\right) dy \\ \rho\left(-\frac{l}{2}\right) &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} F(y) \exp\left(-2 \int_{-\frac{l}{2}}^y r(\xi) d\xi\right) dy \end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

ただし l は tapered line の長さである。

(2-6) の物理的な意味は下記のごとく理解される。Fig. 2-2 のごとく観測点は $x = a$ にあるとする。 $x = a$ から $x = x$ まで行って戻ってくる間の位相差は $-2 \int_a^x r dx$ であり、位置 x と $x + dx$ の間の微分反射は

$$\begin{aligned} d\rho &= \frac{Z + dZ_0 - Z_0}{Z_0 + dZ_0 + Z_0} = \frac{1}{2} \frac{d \ln Z_0}{dx} dx \\ &= F(x) dx \end{aligned}$$

である。

$x = b$ より ∞ ままでが一樣線路であるとする

$$\rho(a) = \int_a^b F(y) \exp\left(-2 \int_a^y r(\xi) d\xi\right) dy$$

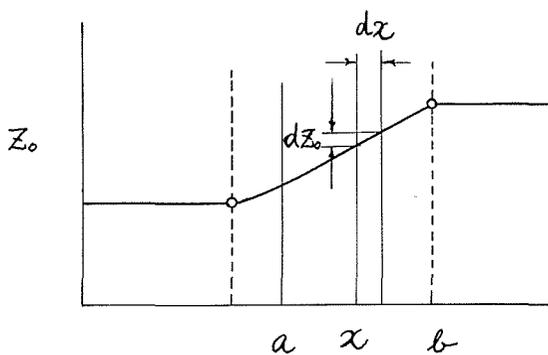


Fig. 2-2.

$a = -l/2, b = l/2$ とすれば(2-6) と全く同じ式となる。

ここで以上の解析につき若干考察すると、まず(2-2)は tapered line では近似式となる。これはシュルクノフが「電磁波論」中の impedance matching の項で言及している exponential line を考えてみると明らかである⁵⁾。すなわちこの line においては

$$\beta < \sqrt{ZY} = \omega \sqrt{L(x)C(x)}$$

であり、また特性インピーダンスは波の進行方向によって異なり、conjugate complex となる。

次に(2-6)で $\rho^2 \ll 1$ とした時の近似の程度があいまいである。また、この方法では、透過係数の絶対値は(反射係数より)求まるが、その位相は別個の解析を要する。

3. 新しい解析法のある種の tapered line に対する適用

3.1 距離に関して周期性をもつ non-uniform line

なめらかな形を持つ taper として

$$\left. \begin{aligned} L(x) &= L_0 \exp(k \sin px) \\ C(x) &= C_0 \exp(-k \sin px) \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

を取扱う事にする。

ここで

L : 単位長あたりの直列インダクタンス

C : 単位長あたりの並列キャパシタンス

この line の $x = -\pi/2p \sim \pi/2p$ が taper となり、特性インピーダンス $Z_{01} = \sqrt{L_1/C_1}$, $Z_{02} = \sqrt{L_2/C_2}$ なる二つの uniform line を match させるために使用されるものとする。第2章で示した matching section の長さ l で表すと

$$p = \frac{\pi}{l}$$

となる。

また、

$$k = \frac{1}{2} \ln \frac{Z_{01}}{Z_{02}}$$

L_1, L_2 : 各 uniform line の単位長あたりの直列インダクタンス

C_1, C_2 : 各 uniform line の単位長あたりの並列キャパシタンス

$$L_0 = \sqrt{L_1 L_2}$$

$$C_0 = \sqrt{C_1 C_2}$$

とする。

L 及び C はこの場合つなぎ目 ($x = -\pi/2p$ 及び $x = \pi/2p$) で1次導関数まで連続である。

なお,

$$L(x)C(x) = \text{const.} = \varepsilon\mu \quad (3-2)$$

とする。これは、TEM 波とみなし得ると仮定し、同じ断面をもつ一様線路の L, C でもって taper の微小部分の L, C を近似した事にあたる。

伝送方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= -j\omega LI \\ \frac{dI}{dx} &= -j\omega CV \end{aligned} \right\} \quad (3-3)$$

ここで、参考のため第2章の方法により反射係数をもとめておこう。

$$Z = j\omega L$$

$$Y = j\omega C$$

$$Z_0(x) = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \exp(k \sin px)$$

$$\Gamma(x) = \sqrt{ZY} = j\omega\sqrt{L_0C_0} = j\beta$$

より $\rho^2 \ll 1$ の時

$$\left. \begin{aligned} \rho\left(-\frac{l}{2}\right) &= \frac{k\pi^2 \cos \beta l}{4(\beta l)^2 - \pi^2} \exp(-j\beta l) \\ \text{where } l &= \frac{\pi}{p} \end{aligned} \right\} \quad (3-4)$$

3.2 伝送方程式の解

以後の計算の便宜のために x 軸を左へ $\pi/2p$ ずらす事とする。

これにより(3-1)は

$$L = L_0 \exp(-k \cos px)$$

$$C = C_0 \exp(k \cos px)$$

となる。(3-3)はかわらない。

上記のごとき L, C をもつ伝送方程式の解が求められるとその $x=0$ から π/p を matching section として応用すればよい。

ここで

$$\left. \begin{aligned} x' &= px \\ \omega' &= \frac{\omega}{p} \end{aligned} \right\} \quad (3-5)$$

の様に正規化を行なう。これにより

$$\left. \begin{aligned} L &= L_0 \exp(-k \cos x') \\ C &= C_0 \exp(k \cos x') \end{aligned} \right\} \quad (3-1)'$$

(3-3)からは,

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{dx'} &= -j\omega' LI \\ \frac{dI}{dx'} &= -j\omega' CV \end{aligned} \right\} \quad (3-3')$$

となる。

この変換においては、反射係数、透過係数等は影響をうけないから、以下この正規化された線路を解析する事とする。煩雑さをさけるために、以下において(')をとり去って $x' \rightarrow x$, $\omega' \rightarrow \omega$ とし、正規化されているとする。

これらにより

$$\left. \begin{aligned} L &= L_0 \exp(-k \cos x) \\ C &= C_0 \exp(k \cos x) \end{aligned} \right\} \quad (3-6)$$

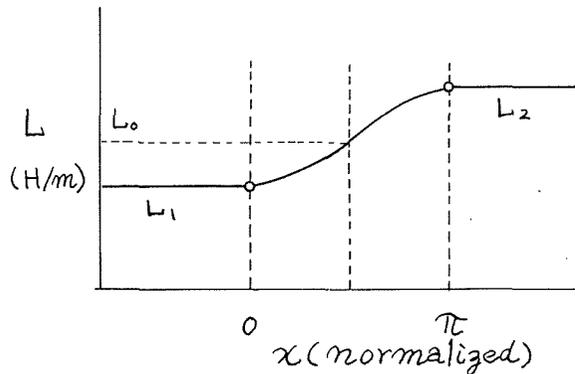


Fig. 3-1. Series inductance per unit length

Fig. 3-1に $k > 0$ の場合について L の curve がえがかれている。 C については、丁度逆の変化をする。また

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= -j\omega LI \\ \frac{dI}{dx} &= -j\omega CV \end{aligned} \right\} \quad (3-7)$$

(3-6) 及び (3-7) より

$$\frac{d^2V}{dx^2} - k \sin x \frac{dV}{dx} + \omega^2 L_0 C_0 V = 0$$

ここで

$$V = y \exp\left(-\frac{k}{2} \cos x\right) \quad (3-8)$$

とおくと

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\beta^2 + \frac{k}{2} \cos x + \frac{k^2}{8} \cos 2x \right) y = 0 \\ \text{where } \beta^2 = \omega^2 L_0 C_0 - \frac{k^2}{8} \end{aligned} \right\} \quad (3-9)$$

となる。(3-9)は Hill's equation として知られる形をしているが

$$\frac{k}{2} \cos x + \frac{k^2}{8} \cos 2x = \chi$$

とした時に

$$|\chi_{\min}| \neq |\chi_{\max}|$$

のため通常の解法より除外されている⁶⁾。

ここで、(3-9)は W.K.B 法が適用できる形をしているのに着目する⁷⁾。以下(3-9)に W.K.B 法を応用してみよう。

(3-9)を

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + q^2 y = 0$$

とかきなおして、trial solution を

$$y = \exp(\phi)$$

とおく。以下この節において (') は一階微分を示し (") は二階微分を示すとしよう。

上式より

$$\phi'' + (\phi')^2 + q^2 = 0 \quad (3-10)$$

ここで

$$(\phi')^2 = f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \cdots$$

なる関数項の無限級数になるものとする。

$$G_n = \sum_{i=0}^n f_i$$

とすると G_n は $(\phi')^2$ の第 n 次近似となる。

W.K.B 法を逐次近似の形に整理すると

$$\left. \begin{aligned} G_0 = f_0 = -q^2 \\ G_n = f_0 - \frac{d}{dx} \sqrt{G_{n-1}} \quad (n \geq 1) \end{aligned} \right\} \quad (3-11)$$

となる。(附録 I 参照)

ここで

$$\begin{aligned} f_0 &= -q^2 \\ &= -\beta^2 - \frac{k}{2} \cos x - \frac{k^2}{8} \cos 2x \end{aligned}$$

(3-11)は、解析的に計算できるが、 G_2 以上になると項の数が多くなり実際のでない。

ここで G_n はどのような形になるか検討する。

以下の解析において

$[\cos x]$: $\cos x$ を基本とする三角級数 (定数項を含む)

$[\sin x]$: $\sin x$ を基本とする三角級数

とする。なお、これらは特定の関数を示すのではなく、周期 2π を持つ偶関数及び奇関数を一般に表わすものである。

$$G_0 = f_0 = [\cos x]$$

$$f_1 = j[\sin x]$$

$$G_1 = [\cos x] + j[\sin x]$$

は容易にわかる。さらに計算してみると

$$\sqrt{G_{n-1}} = [\sin x] + j[\cos x] \quad (\text{附録 II 参照})$$

$$\therefore G_n = [\cos x] + j[\sin x]$$

なお G_0 についても、この一般形の特別の場合と考え得る。また G_n の実数部の定数項は常に $-\beta^2$ である。附録 II に示す様に $\sqrt{G_{n-1}}$ は G_{n-1} を Riemann 面のどちらにおくかによって二とおりできるが、これらは互いに conjugate complex である。近似度を上げて行く際に Riemann 面のえらび方はかえない事とする。

$\sqrt{G_n}$ は ϕ' の第 n 次近似である。 G_n を Riemann 面の第 2 面 (附録 II 参照) においた時 ϕ' , 他方を ϕ' とする。

$$\begin{aligned} \phi' &= a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots \\ &\quad - j(b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \cdots) \end{aligned}$$

前記より $b_0 > 0$ である。

$$\begin{aligned} \therefore \phi &= \alpha_1 \cos x + \alpha_2 \cos 2x + \alpha_3 \cos 3x + \cdots \\ &\quad - j(\beta_0 x + \beta_1 \sin x + \beta_2 \sin 2x + \beta_3 \sin 3x + \cdots) \end{aligned}$$

ここで

$$\beta_0 = b_0 > 0$$

$$\beta_n = \frac{b_n}{n}$$

$$\alpha_n = -\frac{a_n}{n}$$

積分の際生ずる任意定数は、 V の式で考慮すればよいので省いてある。

(3-8) 式より任意定数を K として

$$\begin{aligned} V &= y \exp\left(-\frac{k}{2} \cos x\right) \\ &= K \exp\left(-\frac{k}{2} \cos x + \phi(x)\right) \end{aligned}$$

$\exp(\phi)$ も (3-9) の解である事は明らかである。 ϕ 中には $-j\beta_0 x$, $\bar{\phi}$ 中には $j\beta_0 x$ の項が含まれるから、 ϕ は進行波に関係し、 $\bar{\phi}$ は後進波に関係すると考えられる。 ($\beta_0 > 0$)

$$\begin{aligned} \therefore V &= V_p + V_m \\ &= K_p \exp\left(-\frac{k}{2} \cos x + \phi(x)\right) \\ &\quad + K_m \exp\left(-\frac{k}{2} \cos x + \bar{\phi}(x)\right) \end{aligned} \quad (3-12)$$

ただし suffix p : 進行波
 m : 後進波

を示すとする。 K_p, K_m は任意定数であり、境界条件により定められる量である。振幅ではないが、それに相当するものである。

I については (3-6), (3-7) より

$$\frac{d^2 I}{dx^2} + k \sin x \frac{dI}{dx} + \omega^2 L_0 C_0 I = 0$$

となる。ここで $k_I = -k$ とおくと、 V の場合と全く同じ様に解析できる。

$$\begin{aligned} I &= y_I \exp\left(-\frac{k_I}{2} \cos x\right) \\ y_I &= \exp(\psi) \end{aligned}$$

とすると (附録 III 参照)

$$\begin{aligned} \psi &= -\alpha_1 \cos x + \alpha_2 \cos 2x - \alpha_3 \cos 3x + \dots \\ &\quad - j(\beta_0 x - \beta_1 \sin x + \beta_2 \sin 2x - \beta_3 \sin 3x + \dots) \end{aligned}$$

ただし $\beta_0, \beta_n, \alpha_n$ は ψ に現われるものと同じ値である。

$$\begin{aligned} \therefore I &= I_p + I_m \\ &= K_{I_p} \exp\left(\frac{k}{2} \cos x + \psi(x)\right) \\ &\quad + K_{I_m} \exp\left(\frac{k}{2} \cos x + \bar{\psi}(x)\right) \end{aligned} \quad (3-13)$$

3-3 特性インピーダンス

ここで $\phi(x), \psi(x)$ を再びかくと

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \alpha_1 \cos x + \alpha_2 \cos 2x + \alpha_3 \cos 3x + \dots \\ &\quad - j(\beta_0 x + \beta_1 \sin x + \beta_2 \sin 2x + \beta_3 \sin 3x + \dots) \\ \psi(x) &= -\alpha_1 \cos x + \alpha_2 \cos 2x - \alpha_3 \cos 3x + \dots \\ &\quad - j(\beta_0 x - \beta_1 \sin x + \beta_2 \sin 2x - \beta_3 \sin 3x + \dots) \quad (\beta_0 > 0) \end{aligned} \quad (3-14)$$

各係数は、 ω , k 等が与えられると数値計算により定められる。

ここで

$$\phi(x-\pi) = \phi(x) + j\beta_0\pi$$

$$\psi(x-\pi) = \psi(x) + j\beta_0\pi$$

に留意しよう。

$$V_p = K_p \exp\left(-\frac{k}{2} \cos x + \phi(x)\right)$$

$$I_p = K_{I_p} \exp\left(\frac{k}{2} \cos x + \psi(x)\right)$$

であるから

$$\frac{K_p}{K_{I_p}} = z$$

とすると

$$V_p(x-\pi) = z \exp(j\beta_0\pi) I_p(x)$$

$$I_p(x-\pi) = \frac{1}{z} \exp(j\beta_0\pi) V_p(x)$$

(3-7) の一方に代入して

$$\frac{dI_p(x-\pi)}{d(x-\pi)} = -j\omega C(x-\pi) V_p(x-\pi)$$

$$\therefore \frac{dV_p(x)}{dx} = -j\omega C_0 \exp(-k \cos x) z^2 I(x)$$

(3-7) のもう一方の式より

$$z = \pm \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

となるが

$$\frac{dV_p}{dx} = -j\omega LI_p$$

が $x=0$ で成立するためには Z の附号は正でなければならない

$$\therefore z = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

$$\therefore V_p(x) = K_p \exp\left(-\frac{k}{2} \cos x + \phi(x)\right)$$

$$\therefore I_p(x) = \frac{K_p}{z} \exp\left(\frac{k}{2} \cos x + \psi(x)\right)$$

$$\begin{aligned} \therefore Z_{0p}(x) &= \frac{V_p}{I_p} \\ &= z \exp(-k \cos x + \zeta(x)) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\zeta(x) &= \phi(x) - \psi(x) \\ &= 2(\alpha_1 \cos x + \alpha_3 \cos 3x + \alpha_5 \cos 5x + \dots) \\ &\quad - 2j(\beta_1 \sin x + \beta_3 \sin 3x + \beta_5 \sin 5x + \dots)\end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned}Z_{0m}(x) &= -\frac{V_m(x)}{I_m(x)} \\ &= z \exp(-k \cos x + \bar{\zeta}(x)) = \overline{Z_{0p}(x)}\end{aligned}$$

$$\therefore V = V_p + V_m$$

$$I = \frac{V_p}{Z_{0p}} - \frac{V_m}{Z_{0m}}$$

3.5 Matching section の等価回路

Fig. 3-2のごとく、この nonuniform line の $x=0$ から $x=\pi$ までを matching section とする。波の進行方向に関して特性インピーダンスが異なると、反射係数の式は若干複雑となるが、この場合は

$$Z_{0p}(0) = Z_{0m}(0) = Z_{01} G$$

$$Z_{0p}(\pi) = Z_{0m}(\pi) = \frac{Z_{01}}{G}$$

$$\text{where } G = \exp(\zeta(0)) = \exp(-\zeta(\pi))$$

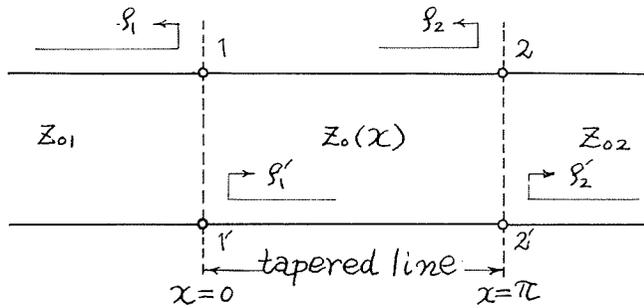


Fig. 3-2. Reflecton coefficients

であるから一様線路の場合と同じ式となる。Fig. 3-2において(1-1')における、進行波に対する反射係数は

$$\rho_1 = \frac{Z_{01} G - Z_{01}}{Z_{01} G + Z_{01}} = \frac{G - 1}{G + 1}$$

(2-2')において

$$\rho_2 = \rho_1$$

後進波に対しては

$$\rho'_1 = -\rho_1$$

$$\rho'_2 = -\rho_2$$

$$\therefore \rho_1 = -\rho'_1 = \rho_2 = -\rho'_2$$

これらより等価回路は Fig. 3-3 のごとくになる。impedance 変換は taper に沿って分布してなされるが、これを中央に集中して、1 個の transformer におきかえ得る。その巻数比 N は

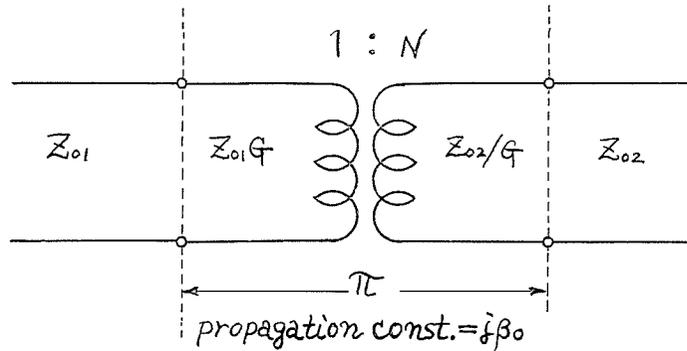


Fig. 3-3. Equivalent circuit

$$N = \exp(k - \zeta(0)) = \exp(k)/G$$

その両側に特性インピーダンス $Z_{01}G$ 及び Z_{02}/G なる一様線路がつながっている。二つの一様線路の長さの和は π である。 β_0 , N , G は ω の関数である事に注意を要する。

ここで多重反射を考えて section の外で

$$V_1 = V_{1i} + V_{1r}$$

$$V_2 = V_{2i} + V_{2r}$$

とする。ただし suffix i は各 port に向う波を表わし、suffix r は各 port より出る波を表す。

$$\begin{pmatrix} V_{1r} \\ V_{2r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{1i} \\ V_{2i} \end{pmatrix}$$

とすると

(1-1') を入力端子 (2-2') を出力端子とした時には

s_{11} : matching section の反射係数

s_{21} : matching section の透過係数

となる。

$\rho_1 = -\rho'_1 = \rho_2 = -\rho'_2$ であり section を通過すると $\beta_0\pi$ 位相がおくれる。 $x = -\infty$ から振幅 $1V$ の波がやってくると、はじめの反射は

$$r_0 = \rho_1$$

(1-1') を通過し (2-2') で反射して (1-1') を通過する成分は

$$r_1 = (1 + \rho_1) \cdot S \cdot \rho_1 \cdot S \cdot (1 - \rho_1) = \rho_1 (1 - \rho_1^2) S^2$$

where $S = \exp(-j\beta_0 \pi)$

同様に section を二往復する成分は

$$\begin{aligned} r_2 &= (1 + \rho_1) \cdot S \cdot \rho_1 \cdot S \cdot (-\rho_1) \cdot S \cdot \rho_1 \cdot S \cdot (1 - \rho_1) \\ &= \rho_1 (1 - \rho_1^2) S^2 \cdot (-\rho_1^2 S^2) \\ &= r_1 (-\rho_1^2 S^2) \end{aligned}$$

以下同様

$$\begin{aligned} s_{11} &= \sum_{n=0}^{\infty} r_n = \rho_1 + \rho_1 (1 - \rho_1^2) S^2 (1 - \rho_1^2 S^2 + \rho_1^4 S^4 - + \dots) \\ &= \frac{\rho_1 (1 + S^2)}{1 + \rho_1^2 S^2} \end{aligned}$$

同様にして

$$s_{21} = \frac{(1 + \rho_1)^2 SN}{1 + \rho_1^2 S^2}$$

となる。

なお

$$\begin{aligned} N &= \frac{\exp(k)}{G} \\ \text{where } G &= \exp(\zeta(0)) \\ &= \exp(\phi(\pi) - \phi(0)) \end{aligned}$$

である。

4. 結 語

この解析によれば、すくなくとも、ここでとり上げた形の taper に関するかぎり、反射は一樣線路とのつなぎ目の所のみであり、途中にはないと解釈できる。

実際には、 β_0 , β_n , α_n は、デジタル電子計算機で計算され、有限個のみとられる。したがって、やはり伝送方程式の近似解となるわけであるが、解析的に簡単な形をしているため、もとの微分方程式に代入する事ができ誤差の検討が容易である。これらの結果は、第2報として次回に報告する予定である。

数値計算の際には

$$G_n = f_0 - \frac{d\sqrt{G_{n-1}}}{dx}$$

を計算しなければならない。この式は解析的に計算できるのであるが、本文中で述べた様に n が大になると非常に複雑になる。実際に行なった方法は $\sqrt{G_{n-1}}$ を数値的に Fourier 解析する

方法である。

なお、(3-2)式は、taperの各部において、微小な一様線路とみなして L, C をきめている事にあたる。これは、しばしば仮定される近似であり、本報告でもこれを採用した。しかし特性インピーダンス $=\sqrt{L/C}$ とはせずに解析をすすめているのが、本報告の特徴である。

実際に、 L, C に taper をつけるには、strip line (三導体) がもっとも適当と思われる。その内部導体片の幅を変えるとよいであろう。

最後に、電子工学科松本正教授及び鈴木道雄教授より、度々重要な示唆を与えられた事にここに厚く感謝します。

附 録 I

附録 I 中では'は x に関する微分を示すものとする。

$$\phi' = \sum_{i=0}^{\infty} f_i$$

$$G_n = \sum_{i=0}^n f_i$$

とする。(3-10)を再びかくと

$$\phi'' + (\phi')^2 + q^2 = 0 \quad (\text{A-1-1})$$

第零次近似

q^2 の x に関する変化はゆるやかであるとする。すなわち ϕ はほとんど定数に近いとすると

$$\phi'' \doteq 0$$

$$\therefore (\phi')^2 = -q^2 = f_0 = G_0 \quad (\text{A-1-2})$$

第1次近似

(A-1-2)より

$$2\phi' \phi'' \doteq G_0'$$

$$\therefore \phi'' \doteq \frac{G_0'}{2\phi'} = \frac{G_0'}{2\sqrt{G_0}} = \frac{d}{dx} \sqrt{G_0}$$

ここであらためて f_1 なる補正項を加え

$$(\phi')^2 \doteq f_0 + f_1 = G_1 \quad (\text{A-1-3})$$

とすると、(A-1-1)より

$$f_1 \doteq -\frac{d}{dx} \sqrt{G_0}$$

$$\begin{aligned} \therefore G_1 &= f_0 + f_1 \\ &= f_0 - \frac{d}{dx} \sqrt{G_0} \end{aligned}$$

第 2 次近似

同様にして f_2 なる補正項を加えると

$$f_2 = -f_1 - \frac{d}{dx} \sqrt{G_1}$$

$$\therefore G_2 = f_0 - \frac{d}{dx} \sqrt{G_1}$$

以下同様にして

第 n 次近似

$$G_n = f_0 - \frac{d}{dx} \sqrt{G_{n-1}} \quad (n \geq 1)$$

となる。

附 録 II

本文中と同様に

$[\cos x]$: 定数項を含む, $\cos x$ を基本とする三角級数を一般に表わす

$[\sin x]$: $\sin x$ を基本とする三角級数を一般に表わす

とする。

$$G = [\cos x] + j[\sin x] = A + jB$$

の時

$$\sqrt{G} = [\sin x] + j[\cos x] = u + jv$$

となる事を示すとよい。

ここでは $A < 0$ で, B は $x=0 \sim \pi$ の間で, 同一の符号をとる場合についてのみ扱う。これ

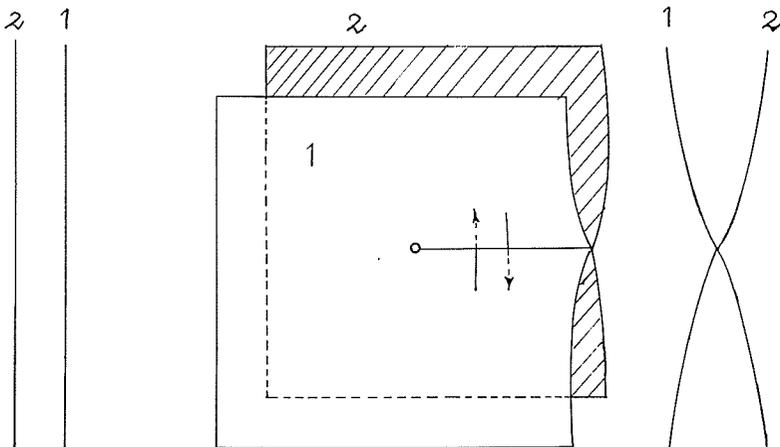


Fig. A-2-1. Riemann plane

は A については、定数項が、符号を決定する際 dominant でかつ負であり、 B については基本波が dominant である事を要する。(この事は、数値計算の際重要である。)

G は、一般には複素数であるから、開平するにあたっては Riemann 面を考えなければならぬ (Fig. (A-2-1))。この図の第 1 面に、 G がありとすれば、前記より G は第 II 及び第 III 象限のいずれかにあるから

$$u = \text{sign}(B) \times \sqrt{\frac{A}{2} + \frac{1}{2}(A^2+B^2)}$$

$$v = \sqrt{-\frac{A}{2} + \frac{1}{2}(A^2+B^2)}$$

なお、 u, v は real であり、 sign は附号を表わす。

ここで、 u, v は最小周期 2π を持つ事はあきらかである。また

$$u(-x) = -u(x)$$

$$v(-x) = v(x)$$

$$\therefore A(-x) = A(x)$$

$$B(-x) = -B(x)$$

$$\text{sign}(B(-x)) = -\text{sign}(B(x))$$

したがって

$$u = [\sin x]$$

$$v = [\cos x]$$

と表わす事ができる (Fig. A-2-2)。

なお、 G が前記の Riemann 面の第 2 面にありとすれば、 \sqrt{G} は、 G が第 1 面にある場合の conjugate complex になる事は容易にわかる。

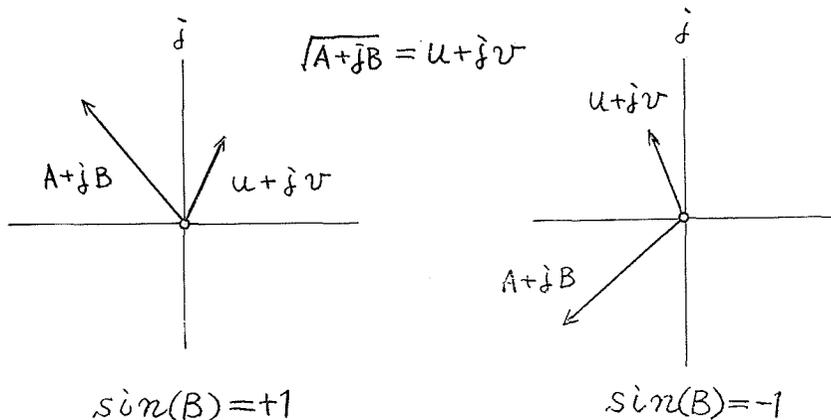


Fig. A-2-2.

附 録 III

電圧については

$$f_0 = -\beta^2 - \frac{k}{2} \cos x - \frac{k^2}{8} \cos 2x$$

が、電流については

$$f_{I0} = -\beta^2 - \frac{k_I}{2} - \frac{k_I^2}{8} \cos 2x$$

$$\text{where } k_I = -k$$

となる。二式を比較すると $\cos x$ の項だけ附号が反転する事がわかる。

f_0, f_{I0} には3項しかないが、下記のごとく一般の場合について証明すれば充分である。

$$\left. \begin{aligned} G &= A + jB \\ A &= c_0 + c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + c_3 \cos 3x + \dots \\ B &= s_1 \sin x + s_2 \sin 2x + s_3 \sin 3x + \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-3-1})$$

の時、下記のごとくとする。

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{G} &= u + jv \\ u &= a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \dots \\ v &= b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-3-2})$$

以下において suffix od のついた関数は、argument に関して奇関数、suffix ev がつくと偶関数であるとする。

すなわち

$$\begin{aligned} f_{\text{od}}(X) &= -f_{\text{od}}(-X) \\ f_{\text{ev}}(X) &= f_{\text{ev}}(-X) \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

$\cos nx$ 及び $\sin nx$ につき考察すると

n: odd

$$\left. \begin{aligned} \cos nx &= f_{\text{od}}(\cos x) \\ \sin nx &= \sin x h_{\text{ev}}(\cos x) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-3-3})$$

n: even

$$\left. \begin{aligned} \cos nx &= f_{\text{ev}}(\cos x) \\ \sin nx &= \sin x h_{\text{od}}(\cos x) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-3-4})$$

なる形に整理できる事がわかる。

(A-3-1) より

$$\begin{aligned} A &= F_{\text{od}}(\cos x) + F_{\text{ev}}(\cos x) \\ B &= \sin x H_{\text{ev}}(\cos x) + \sin x H_{\text{od}}(\cos x) \end{aligned}$$

それぞれ第1項は奇数調波の総和、第2項は偶数調波の総和である。

$X = \cos x$ とすると

$$\left. \begin{aligned} A &= F_{\text{od}}(X) + F_{\text{ev}}(X) \\ B &= \sqrt{1-X^2} (H_{\text{ev}}(X) + H_{\text{od}}(X)) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-3-5})$$

附録 II より

$$\left. \begin{aligned} u &= \text{sign}(B) \times \sqrt{\frac{A}{2} + \frac{1}{2}(A^2+B^2)} = u(X) \\ v &= \sqrt{-\frac{A}{2} + \frac{1}{2}(A^2+B^2)} = v(X) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-3-6})$$

と書ける。

n : odd の場合

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi v(\cos x) \cos nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_1^{-1} v(X) f_{\text{od}}(X) \frac{(-dX)}{\sqrt{1-X^2}} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 v(X) f_{\text{od}}(X) \frac{dX}{\sqrt{1-X^2}} \end{aligned}$$

同様にして

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 u(X) h_{\text{ev}}(X) \, dX$$

n : even の場合

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 v(X) \frac{dX}{\sqrt{1-X^2}} \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 v(X) f_{\text{ev}}(X) \frac{dX}{\sqrt{1-X^2}} \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 u(X) h_{\text{od}}(X) \, dX \end{aligned}$$

ここで、A-3-1 において各奇数調波の附号が反転したとする。この場合、 G' , A' , B' なるごとく(′)をつける事とする (ここでは微分の記号ではない)。

$$\left. \begin{aligned} G' &= A' + jB' \\ A' &= c_0 - c_1 \cos x + c_2 \cos 2x - c_3 \cos 3x + \dots \\ B' &= -s_1 \sin x + s_2 \sin 2x - s_3 \sin 3x + \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-3-1}')$$

この時

$$\begin{aligned} \sqrt{G'} &= u' + jv' \\ u' &= a'_1 \sin x + a'_2 \sin 2x + a'_3 \sin 3x + \dots \\ v' &= b'_0 + b'_1 \cos x + b'_2 \cos 2x + b'_3 \cos 3x + \dots \end{aligned}$$

とする。

(A-3-1) と (A-3-1)' をくらべ、かつ (A-3-3), (A-3-4) を考慮すると、 A の奇数調波の項に対して $\cos x$ の代りに $-\cos x$ を代入すると A' になり、 B の奇数調波の項に対しては $\sin x$ の代りに $-\sin x$ を代入すると B' になる事がわかる。

$$\begin{aligned}\therefore A' &= F_{\text{od}}(-\cos x) + F_{\text{ev}}(\cos x) \\ B' &= -\sin x(H_{\text{ev}}(\cos x) + H_{\text{od}}(\cos x))\end{aligned}$$

ここで $Y = -\cos x$ とすると

$$\begin{aligned}A' &= F_{\text{od}}(Y) + F_{\text{ev}}(-Y) \\ &= F_{\text{od}}(Y) + F_{\text{ev}}(Y) = A(Y)\end{aligned}$$

同様にして

$$B' = -B(Y)$$

B' は B'^2 の形で u' , v' に影響するのみである。また

$$\text{sign}(B') = -\text{sign}(B)$$

である。(A-3-1) 及び (A-3-1)' と 附録 II 参照, (A-3-6) より

$$\begin{aligned}\therefore u' &= -u(Y) \\ v' &= v(Y)\end{aligned}$$

n : odd の場合

$$\begin{aligned}b'_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi v' \cos nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 v(Y) f_{\text{od}}(-Y) \frac{dY}{\sqrt{1-Y^2}} \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 v(Y) f_{\text{od}}(Y) \frac{dY}{\sqrt{1-Y^2}} \\ &= -b_n\end{aligned}$$

同様にして

$$a'_n = -a_n$$

n : even の場合は

$$\begin{aligned}b'_0 &= b_0 \\ b'_n &= b_n \\ a'_n &= a_n\end{aligned}$$

となる事は容易に証明できる。

参 考 文 献

- 1) Klopfenstein, R. W.: PIRE 144, 31 (1956-1).
- 2) Latmral, G., Franceschetti, G. and Vinciguera, R.: J. R. of NBS, 67 D-3, 331 (1963-5, 6).
- 3) Ghose, R. N.: Microwave Circuit Theory and Analysis, 340 (1963), McGraw Hill.
- 4) Tang, C. C. H.: PIEE, MTT-12-3, 300 (1964-5).
- 5) シェルクノフ (森脇義雄訳): 「電磁波論」, 233 (昭29), 岩波書店.
- 6) McLachlan, N. W.: Theory and Application of Mathieu Functions, 127 (1966), Oxford.
- 7) 森田 清: 「電磁波概論」, 157 (昭36), 金原出版.