HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	空間電荷を考慮したCEF型集束系のBeam Stiffness
Author(s)	小柳, 幸次郎; 桜庭, 一郎
Citation	北海道大學工學部研究報告, 44, 67-72
Issue Date	1967-09-05
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40831
Type	departmental bulletin paper
File Information	44_67-72.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

空間電荷を考慮したCEF型集束系の Beam Stiffness

小柳幸次郎*
桜庭一郎*
(昭和42年4月28日受理)

Beam Stiffness in CEF-Type Devices with Space-Charge Effects Included

Kojiro KOYANAGI
Ichiro SAKURABA
Department of Electronic Engineering, Faculty of Engineering,
Hokkaido University, Sapporo, Japan.
(Received April 28, 1967)

Abstract

This paper deals with the beam stiffness in CEF-type devices with space-charge effects included.

The stiffness factor S is given by

$$S^2 = 2\left(\Omega_0^2 - \frac{1}{2}\omega_p^2\right)$$
$$= \Omega_0^2(2+Q),$$

where Ω_0 is the unperturbed spatial angular velocity of the electron, ω_p is the plasma angular frequency of the electron beam, and Q is the Nunn-Rowe space charge parameter. The second term in the right member arises from the presence of space charge in the beam and this shows that the effect of space charge reduces—ever so slightly—the beam stiffness.

目　　次

Abstract 67
1. 緒　　言 68
2. CEF型集束系の電子軌道に対する空間電荷の影響 68
3. 空間電荷を考慮した Beam Stiffness 71
4. 結　　言 72
参考文献 72

* 電子工学科電子管工学講座

1. 緒　　言

CEF 型電子ビームを用いた発振，増幅および検波などの諸装置は，O 型電子ビームと M 型電子ビームの特長をあわせもっているため多くの研究が続けられている[1)~5)]。これらの諸装置の設計にあたって，最初に解決しなければならない問題は，beam launching と beam transmission である。

したがって本論文では，まず薄いリボン状 CEF 型電子ビームについて考察し，とくに空間電荷効果を考慮した beam stiffness を得たので報告する。

2. CEF 型集束系の電子軌道に対する空間電荷の影響

遠心力を用いた静電界集束系 (Fig. 1 参照) において，1 個の電子に関する運動方程式は次式で示される。

$$mr\dot{\theta}^2 - eE_r = m\ddot{r}\,, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = -er\,E_\theta\,, \tag{2}$$

ここで E_r は電界の半径方向成分，E_θ は電界の角方向成分であり，$e/m=\eta$ は電子の比電荷である $(e>0)$。しかるにこの集束系は放射状電界のみであるから，角運動量保存が成立し式 (1) と (2) は，

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\eta E_r\,, \tag{3}$$

$$mr^2\dot{\theta} = M\,. \tag{4}$$

となる。ここに M は角運動量である。

つぎに半径方向厚さがきわめて薄い二次元のリボン状電子ビームに関するポアソン方程式は

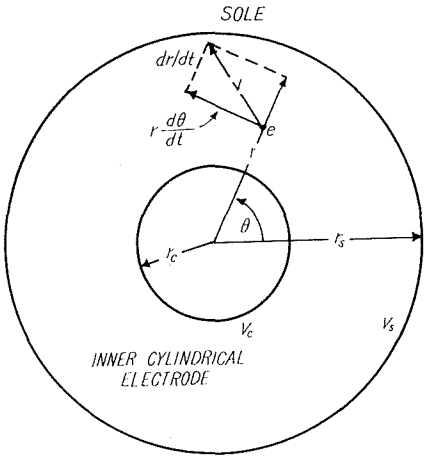
$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\,, \tag{5}$$

となる。ここに ρ_0 は電子ビームの電荷体積密度である。

いま半径 r_0 の円周上に電子ビームの全電荷が集中していると仮定した等価電子ビームを考えると，この電荷の線密度 τ_0 は，体積密度 ρ_0 と

$$\rho_0 = \frac{\tau_0}{h\sigma} \tag{6}$$

で示される。ここに h は電子ビームの z 方向の長さであり，σ は半径方向の厚さである。



r Radius of the electron
r_c Radius of inner cylindrical electrode
r_s Radius of sole
V_c Voltage of inner cylindrical electrode
V_s Voltage of the sole
e The electron
θ Spatial angle

Fig. 1. The centrifugal electrostatic fousing system employing purely radial electric fields.

また1個の電子の平衡条件は

$$\frac{m v_{\theta e}^2}{r} - eE_r = 0\,, \tag{7}$$

で示される。またエネルギー保存の原理を用いると

$$v_{\theta e}^2 = 2\eta V\,, \tag{8}$$

が成立つ。

式 (5) を積分すると

$$V = -\frac{\tau_0}{4h\sigma\varepsilon_0} r^2 + C_1 \ln r + C_2\,,$$

となる。ここで C_1 と C_2 は積分定数である。

また式 (7) と (8) より

$$r\left(\frac{dV}{dr}\right) = -2V\,,$$

が得られる。いま電子が半径 r_0 で電圧 V_0 で加速されて集束系に入るとすれば境界条件は

$$r = r_0 \quad \text{で} \quad V = V_0\,,$$

$$r_0\left(\frac{dV}{dr}\right) = -2V_0\,. \tag{9}$$

となり，電位 V は

$$V = V_0 + \left(2V_0 - \frac{\tau_0 r_0^2}{2h\sigma\varepsilon_0}\right)\ln\left(\frac{r_0}{r}\right) + \frac{\tau_0}{4h\sigma\varepsilon_0}(r_0^2 - r^2)\,. \tag{10}$$

となり，E_r は

$$E_r = \left(2V_0 - \frac{\tau_0 r_0^2}{2h\sigma\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r} + \frac{\tau_0 r}{2h\sigma\varepsilon_0}\,. \tag{11}$$

で表わされる。

もし電子が半径 r_0 で，平衡速度 $v_{\theta e}$ と，ごくわずかの半径方向速度をもち集束系に入るとすれば，角運動量は

$$m r^2\dot{\theta} = m r_0 v_{\theta e}\,, \tag{12}$$

で与えられる。ここで右辺は初期角運動量を示す。したがって式 (3), (11) および (12) より

$$\ddot{r} = \left[\frac{v_{\theta e}^2}{r} + \frac{\eta\tau_0}{2h\sigma\varepsilon_0} r\right]\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - 1\right]. \tag{13}$$

が得られる。この式の吟味によって空間電荷効果を含めた安定な軌道に関する多くの性質を知り得る。すなわち $r=r_0$ であれば，半径方向加速度が零となり，$r<r_0$ なら外むきとなり $r>r_0$ なら求心的な力が働く。したがって電子が $r=r_0$ の安定な軌道よりいずれの側に出ても，平衡条件をみたすように加速度が働くことを知る。また $\rho_0=0$ とすれば，既に求めた結果と一致

する[6]。

いま半径方向に摂動があり，その大いさが定常状態に比べて非常に小さい場合を調べよう。半径 r と角速度 $\dot{\theta}$ を次のように定義する。

$$r = r_0 + r_1 , \tag{14}$$

$$\dot{\theta} = \Omega_0 + \Omega_1 , \tag{15}$$

r_0 は電子の無摂動の半径，r_1 は半径の摂動である。また Ω_0 は半径 r_0 における無摂動の角速度で，Ω_1 は角速度の摂動である。ここで Ω_0 と $v_{\theta e}$ はつぎの関係で示される。

$$\Omega_0 = \frac{v_{\theta e}}{r_0} \tag{16}$$

式 (13) と (14) より次の式を得る。

$$\ddot{r}_1 + 2\left(\Omega_0^2 + \frac{\eta\tau_0}{2h\sigma\varepsilon_0}\right) r_1 = 0 . \tag{17}$$

いま電子ビームのプラズマ角周波数 ω_p

$$\omega_p^2 \equiv \frac{\eta|\rho_0|}{\varepsilon_0} = \frac{\eta|\tau_0|}{h\sigma\varepsilon_0} . \tag{18}$$

を用いると式 (17) は

$$\ddot{r}_1 + 2\left(\Omega_0^2 - \frac{1}{2}\omega_p^2\right) r_1 = 0 . \tag{19}$$

となる。一般にマイクロ波帯における装置では，実用上 $\Omega_0 \gg \omega_p$ であるから，式 (19) の一般解は，

$$r_1 = A_1 e^{j\sqrt{2(\Omega_0^2 - \frac{1}{2}\omega_p^2)}\,t} + A_2 e^{-j\sqrt{2(\Omega_0^2 - \frac{1}{2}\omega_p^2)}\,t} . \tag{20}$$

ここで A_1 と A_2 は積分定数であり初期条件によってきまる。いまこの初期条件を

$$t = 0 \quad \text{で} \quad r_1 = r_{10} , \quad \dot{r}_1 = \dot{r}_{10} . \tag{21}$$

とすれば

$$r_1 = r_{10}\cos\left[2\left(\Omega_0^2 - \frac{1}{2}\omega_p^2\right)\right]^{1/2} t + \frac{\dot{r}_{10}}{\left[2\left(\Omega_0^2 - \frac{1}{2}\omega_p^2\right)\right]^{1/2}} \sin\left[2\left(\Omega_0^2 - \frac{1}{2}\omega_p^2\right)\right]^{1/2} t . \tag{22}$$

したがって集束系に半径方向偏向量と半径方向速度成分がないように打ちあげられた電子ビームは，半径 r_0 の円形軌道を描き平衡条件を満す。もし初期偏向量 r_{10} が存在すれば，半径方向に r_0 を中心に振幅 r_{10} の振動を行なう。また半径方向速度成分 $\dot{r}_{10}$ が存在すれば，振幅 $\dot{r}_{10}/[2(\Omega_0^2 - \omega_p^2/2)]^{1/2}$ の同様の振動を生ずる。すなわち薄いリボン状電子ビームが平衡軌道にそって打ち上げられた時，わずかの半径方向偏向量か半径方向速度成分，またはそれらの両方が

存在すれば，その電子ビームは円運動と単純な振動とをくみあわせた軌道を示す。この半径方向振動の周期 T は式 (22) より

$$T=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{\sqrt{\Omega_0^2-\frac{1}{2}\omega_p^2}} \tag{23}$$

で与えられ，空間電荷効果によって増加することを知る。

かくして微小な外向きの半径方向速度成分をもって集束系に入ってくれば，外向きの半径方向に移動し，やがて遠心力が減少し電界による力のため求心的な半径方向の運動を示す。したがって出発後半周期たつと平衡半径 r_0 の円形軌道にもどってくる。この時電子は負方向の半径方向速度成分 ($\dot{r}<0$) を有する。

この半周期は

$$\frac{T}{2}=\frac{(\pi/\sqrt{2})}{\Omega_0\left(1-\frac{1}{2}\beta_p^2\right)^{1/2}}, \tag{24}$$

$$\beta_p=\frac{\omega_p}{\Omega_0}. \tag{25}$$

で与えられる。半周期に対応する空間の角変位は $(\pi/\sqrt{2-\beta_p^2})$ radians であり，空間電荷の影響により 127 度より，ごくわずかであるが増大することを知る。

3. 空間電荷を考慮した Beam Stiffness

Palmer と Süsskind の定義した beam stiffness S は

$$S^2=-\left(\frac{\partial\ddot{r}}{\partial r}\right)_{r=r_e}, \tag{26}$$

で示される[7]。ここで r_e は平衡半径である。半径 r_e における電圧を V_e とすれば

$$\Omega_e^2 r_e^2=2\eta V_e, \tag{27}$$

が成立つから，式 (3), (11), (18), (25) および (27) より

$$S^2=2\Omega_e^2\left[1-\frac{\omega_p^2}{2\Omega_e^2}\right]. \tag{28}$$

を得る。ここで Ω_e はある平衡半径 r_e における電子の角速度である。いま等価電子ビームの半径 r_0 と平衡半径 r_e と対応させて考えれば，式 (22) より同様の結果を得る。すなわち

$$S^2=\left(\frac{\dot{r}_{10}}{r_{1\max}}\right)^2=2\Omega_0^2\left(1-\frac{1}{2}\beta_p^2\right). \tag{29}$$

ここで $r_{1\max}$ は半径方向偏向量の最大値である。

これらの結果は，前に得られた表示式とよく似ている[6]。すなわち右辺第二項は空間電荷の影響を示しており，ごくわずかであるが beam stiffness を減少することを知る。これらの結

果は従来定量的に指摘されていなかった問題であり，また Nunn-Rowe の空間電荷係数 Q を用いれば[8]，

$$S^2 = \Omega_0^2(2+Q), \tag{30}$$

となり，減少の割合が Q で示され大変興味深い結果となる。

4. 結　　言

薄いリボン状 CEF 型電子ビームの beam stiffness に関する空間電荷効果を考察した。

空間電荷によって，わずかであるが減少すること，およびその減少の割合が，電子ビームのプラズマ角周波数や Nunn-Rowe の空間電荷係数と密接な関係を有することが示された。これらの結果は従来全く指摘されていなかったものである。

また実用上回転角速度がプラズマ角周波数に比べて非常に大きいと仮定された。しかし低電圧大半径化を考えると，必ずしもこの条件が満足されない。さらに等価電子ビームによって考察したが，半径方向厚さが電子軌道にかなりの影響を及ぼし，電子ビームの slipping が問題となる。これらの今後の解析が必要であろう。

おわりに研究の機会を与えて下さった電子工学科の方々，討論された千田正彦助手に感謝する。

参 考 文 献

1) Sakuraba, I. and Rowe, J. E.: "Photodemodulation of Coherent Light Signals in Centrifugal Electrostatic Focusing Systems", Technical Report No. 75, Electron Physics Laboratory, Department of Electrical Engineering, The University of Michigan (1964-9).
2) Sakuraba, I, and Rowe, J. E.: "Small-Signal Power Theorems and Dispersion in E-Type Electron Beams", Technical Report No. 76, Electron Physics Laboratory, Department of Electrical Engineering, The University of Michigan (1964-11).
3) Nunn, W. M., Jr. and Tan, T. Y.: "Electrostatically-Focused Ribbon Beams employing Periodic-Cylindrical Electron Lenses", IEEE Trans. on Electron Devices, vol. ED-11, pp. 524-525 (1964-11).
4) Tan, T. Y. and Nunn, W. M., Jr.: "Azimuthally Periodic Electrostatically-Focused Electron Ribbon Beams", IEEE Trans. on Electron Devices, vol. ED-13, pp. 706-713 (1966-10).
5) Rowe, J. E. and Sakuraba, I.: "Equivalent Resistance of CEF Photodemodulators", Proceedings of the 6th International Conference on Microwave and Optical Generation and Amplification, Cambrige, England, pp. 458-463 (1966-9).
6) 桜庭一郎："遠心力を用いた静電界集束系における電子軌道"，北海道大学工学部研究報告，第 40 号，pp. 77-86 (1966-3).
7) Palmer, J. L. and Süsskind, C.: "Stiffness of Electron Beams", J. Electronics and Control, vol. 10, pp. 365-374 (1961-5).
8) 桜庭一郎・小柳幸次郎："薄い CEF 型電子ビームの集群による空間電荷界"，北海道大学工学部研究報告，第 43 号，pp. 49-54 (1967-4).