



Title	CEF型電子ビームの近軸軌道方程式とCritical Perveance
Author(s)	小柳, 幸次郎; Koyanagi, Kojiro; 桜庭, 一郎 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 45, 45-52
Issue Date	1967-12-20
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40844
Type	departmental bulletin paper
File Information	45_45-52.pdf



CEF 型 電子ビームの近軸軌道 方程式と Critical Perveance

小柳 幸次郎*

桜庭 一郎*

(昭和42年8月18日受理)

Paraxial-Ray Equations and Critical Perveance in CEF-Type Electron Beams

Kojiro KOYANAGI

Ichiro SAKURABA

Department of Electronic Engineering, Faculty of Engineering,
Hokkaido University, Sapporo, Japan.

(Received August 18, 1967)

Abstract

This paper deals with the paraxial-ray equation and conditions of no rippling in CEF-type electron beams.

If the perveance of the beam is adjusted to attain $r_0=3X_0$, there is no rippling of the beam. Here r_0 is the radius of the optical-axis electron and X_0 is the cathode-anode spacing of a hypothetical planar diode. The condition of zero rippling does not occur for zero space-charge, but rather for a particular value of the perveance, which is called Waters' critical perveance.

This relation for the critical perveance corresponds to $Q=-2$, where Q is the Nunn-Rowe space-charge parameter in CEF-type traveling-wave devices. This means that the radial resonant frequency of the edge-of-the-beam electron, $\sqrt{2}\Omega_0$, is always equal to the electron plasma frequency ω_p for a beam possessing critical perveance. The electrons within the beam have the radial resonant frequency $\sqrt{2+Q}\Omega_0$, where Ω_0 is the unperturbed spatial angular velocity.

目 次

Abstract	45
1. 緒 言	46
2. 近軸軌道方程式	46
3. No Rippling の条件	49
4. 各種係数による考察	49
5. 電子軌道	50
6. 結 言	52
参 考 文 献	52

* 電子工学科電子管工学講座

1. 緒 言

CEF 型電子ビーム集束系における電子軌道や beam stiffness について多くの検討がなされてきたが^{1),2),3)}, 空間電荷を考慮した rippling については未だ解明されていなかった。

したがって本論文では空間電荷効果を考慮した CEF 型電子ビームの近軸軌道方程式を求め, no rippling の条件を求めたところ, 幸いにも critical perveance, Nunn-Rowe の空間電荷係数, さらに電子ビームのプラズマ周波数や半径方向の振動の周波数などの諸関係に, 大変興味ある結果がはじめて得られたので報告する。

2. 近軸軌道方程式

電子銃の一部分である陽極 (その電圧を V_a とする) を通過した後, 適当に配置された集束電極系により集束され, ある曲線にそって進む薄いリボン状電子ビームについて考察する (Fig. 1 参照)。電子ビームの optical-axis 上の各点における運動は, 曲率の瞬間的な中心を原

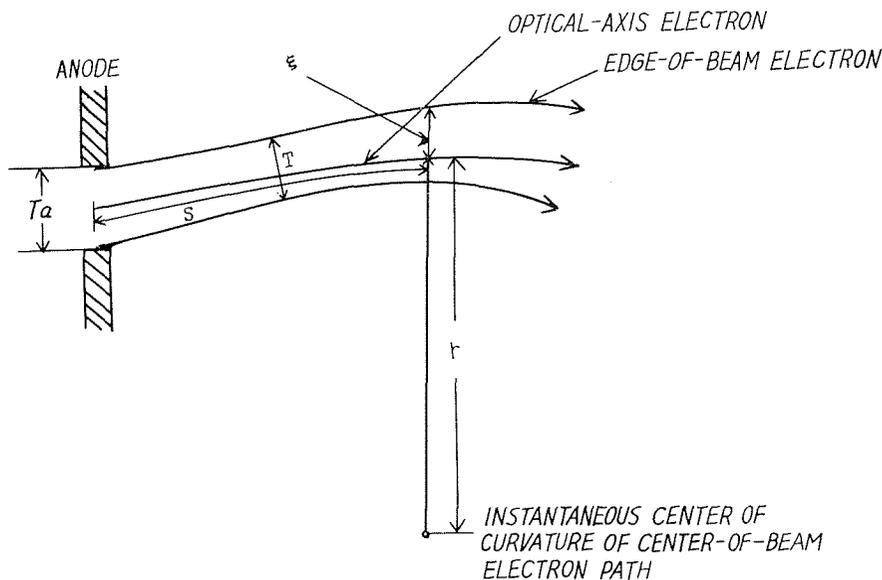


Fig. 1. Schematic cross section of a thin electron ribbon.

点とする円筒座標系で示される。したがって optical-axis electron の半径方向の運動方程式は

$$m\ddot{r} = m \frac{v^2}{r} - eE_r \quad (1)$$

で与えられる。ここで m は電子の質量, e は電子の電荷量 ($e > 0$ とする), r は曲率半径, v は接線方向速度, そして E_r は集束電極系によって生じた電界の半径方向成分である。つぎに edge-of-the-beam electron の半径方向運動方程式は式 (2) となる。

$$m \left[\ddot{r} + \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} \right) \right] = m \frac{v^2}{r} + \partial \left(m \frac{v^2}{r} \right) - eE_r + \partial(-eE_r) + F_{sc} \quad (2)$$

ここで ξ は optical-axis electron と edge-of-the-beam electron の半径方向の偏差, ∂ は一次偏差量, および F_{sc} は空間電荷による力である。これらの両式より薄いリボン状の電子ビームに関する基本的な方程式

$$m \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} \right) = \partial \left(\frac{mv^2}{r} \right) + \partial(-eE_r) + F_{sc} \quad (3)$$

が得られる。

いま s を optical-axis にそって測った位置とすれば, $rd\theta = ds$ であるから,

$$v^2 = 2eV/m,$$

$$\partial(r) = \xi,$$

$$E_r = 2V/r$$

および

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = v^2 \frac{d^2 \xi}{ds^2} + v \frac{dv}{ds} \frac{d\xi}{ds}$$

を用い, さらに円筒座標系で示された Laplace 方程式

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0$$

が

$$\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} - \frac{2V}{r^2}$$

と書き換えられるから, 式 (3) はつぎのようになる。

$$2V\xi'' + V'\xi' + [4\kappa^2 V + V'']\xi = \frac{F_{sc}}{e}, \quad (4)$$

ここで $\xi' = d\xi/ds$, $V' = dV/ds$, および $\kappa = 1/r$ である。

つぎに空間電荷による力 F_{sc} を計算する。Fig. 2 に示されたような厚さ 2ξ 幅 W の薄いリボン状電子ビームの端における, 外向き電界 E_ξ に対する一次近似は, Gauss の定理を適用して

$$\begin{aligned} \int \mathbf{E}_\xi \cdot d\mathbf{A} &= \frac{q}{\epsilon_0} = 2WE_\xi ds \\ &= 2\rho\xi W ds / \epsilon_0, \end{aligned}$$

ここで ρ は電荷の体積密度, ϵ_0 は自

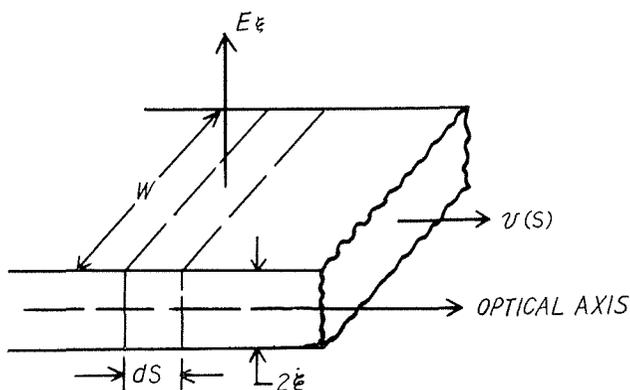


Fig. 2. Short length of an electron ribbon.

由空間の誘電率。いま電流の面密度を J_0 、全電流を I_0 とすれば

$$\rho v = -J_0 = -I_0/2\xi W \quad (5)$$

であるから、 $F_{sc} = \mp eE_\xi$ に留意すれば

$$F_{sc} = \pm \frac{eI_0}{2\varepsilon_0 W v} \quad (6)$$

となる。右辺符号は $\xi > 0$ の時+を、 $\xi < 0$ の時-をとる。つまり空間電荷による力は、optical-axis に対して外向きである事を示す。式(4)と(6)より次式が得られる。

$$2V\xi'' + V'\xi' + [4\kappa^2 V + V'']\xi = \frac{\pm I_0}{2\varepsilon_0 \left(\frac{2e}{m}\right)^{1/2} W v^{1/2}} \quad (7)$$

いま空間電荷制限状態にある間隙 X_0 、陽極電圧 V_a の等価平行二極管の陽極にあげられた長さ W 、幅 T_a のスリットを通してリボン状電子ビームが集束系に入るとすれば (Fig. 1 および Fig. 3 参照)、 $\phi \equiv V/V_a$ および $\mu \equiv 2\xi/T_a$ とおいて式(7)は、

$$2\phi\mu'' + \phi'\mu' + [4\kappa^2\phi + \phi'']\mu = \frac{\pm 4}{9X_0^2\phi^{1/2}} \quad (8)$$

この式(8)は、ある曲線にそって進む薄いリボン状電子ビームに関する、空間電荷効果を考慮した近軸軌道方程式であり、Waters によって与えられたものである⁴⁾。

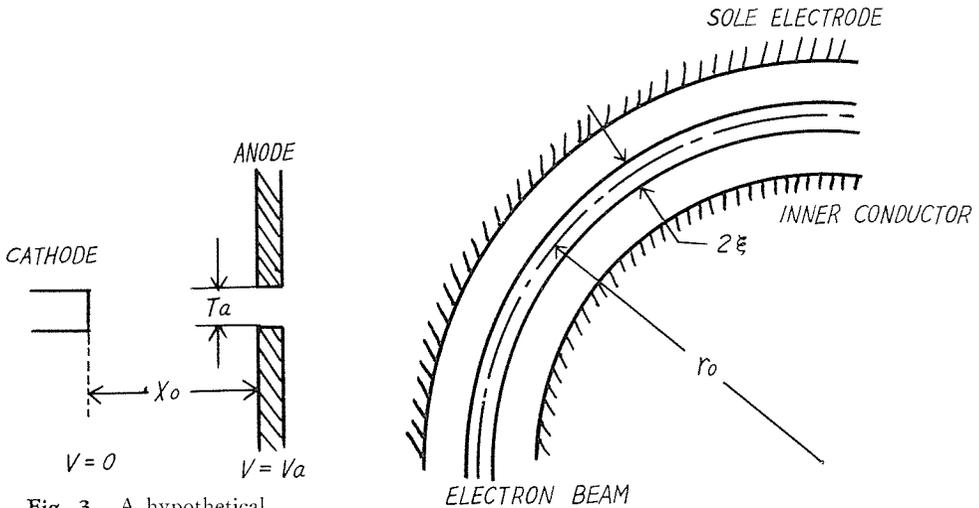


Fig. 3. A hypothetical planar diode.

Fig. 4. The basic geometry of CEF-type electron beams.

したがって Fig. 4 に示したような同心金属円筒によって集束された、いわゆる薄い CEF 型電子ビームにおいては、 $\kappa = 1/r_0$ となるから、式(8)は

$$2\phi\mu'' + \phi'\mu' + \left[\frac{4}{r_0^2}\phi + \phi'' \right]\mu = \frac{\pm 4}{9X_0^2\phi^{1/2}} \quad (9)$$

となり、薄い CEF 型電子ビームに関する近軸軌道方程式が得られる。もちろん $r_0 \rightarrow \infty$ とすれば、O 型電子ビームの近軸軌道方程式となり、Pierce の与えた結果に一致する⁵⁾。

3. No Rippling の条件

CEF 型電子ビームが半径方向にきわめて薄く、 $\phi = V/V_a = 1$ と仮定すれば、式(9)は

$$\mu'' + \frac{2}{r_0^2} \mu = \pm \frac{2}{9X_0^2} \quad (10)$$

となる。それ故 $s=0$ における条件 $\mu(0) = 1$ 、および $\mu'(0) = 0$ を用いれば、 $\xi > 0$ の側のみを考えて

$$\mu = \frac{r_0^2}{9X_0^2} + \left(1 - \frac{r_0^2}{9X_0^2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{r_0} s\right) \quad (11)$$

を得る。故に perveance を変化して

$$r_0 = 3X_0 \quad (12)$$

とすれば、 $\mu = 1$ となり s に無関係となる。すなわち式(12)は no rippling の条件を与えるものである。

4. 各種係数による考察

空間電荷制限状態にある平行平面二極管に関する Child-Langmuir の関係式

$$I_0 = \frac{4}{9} \sqrt{2 \frac{e}{m} \frac{\varepsilon_0 W T_a}{X_0^2}} V_a^{3/2} \quad (13)$$

を用いて no rippling の条件式(12)を書きかえ、電子ビームの perveance で表示して P_c とおけば、

$$P_c \equiv \frac{I_0}{(V_a)^{3/2}} = 4\varepsilon_0 \sqrt{2 \frac{e}{m} \frac{W T_a}{r_0^2}} \approx 21 \times 10^{-6} \frac{W T_a}{r_0^2} \quad (14)$$

これはいわゆる critical perveance であり no rippling に対応する perveance である。この値が同一寸法の電子ビームを用いた slalom focusing に比較して、約半分の値となることは留意されるべきであろう。つぎに no rippling の条件式(12)を電荷密度で表示しよう。電流の面積密度 J_0 を与えた式(5)を電圧で表示すれば、 $\phi = 1$ を考慮して

$$J_0 = -\rho \sqrt{2eV_a/m} \quad (15)$$

また J_0 は条件式(12)と 3/2 乗則の式(13)を用いて

$$J_0 = \frac{I_0}{W T_a} = 4\varepsilon_0 \sqrt{2 \frac{e}{m} \frac{V_a^{3/2}}{r_0^2}} \quad (16)$$

で表示し得る。ここで no rippling の場合を考察しているため、 $\mu = 1$ とした。故に式(15)と(16)より critical perveance を与える電荷密度は、

$$(\rho)_{n=1} = \frac{-4\varepsilon_0 V_a}{r_0^2} \approx \frac{-21 \times 10^{-6}}{\sqrt{2e/m}} \frac{V_a}{r_0^2} \quad (17)$$

となる。

つぎに CEF 型電子ビームを用いたマイクロ波装置において、動作特性の決定上 Nunn-Rowe の空間電荷係数 Q を用いる事が多い⁶⁾。

この係数は、

$$Q \equiv \frac{e\rho}{\Omega_0^2 \varepsilon_0 m} \quad (18)$$

で定義される。ここに Ω_0 は半径 r_0 における無摂動の角速度である。したがって $2eV_a/m = r_0^2 \Omega_0^2$ に留意すると

$$\rho = \frac{2\varepsilon_0 V_a}{r_0^2} Q \quad (19)$$

となる。したがって no rippling 条件を示した電荷密度 $(\rho)_{n=1}$ と比較して、critical perveance に対応する Q は式 (17) と (19) より

$$Q = -2 \quad (20)$$

となる。このことは CEF 型電子ビーム装置の特性算定上重要な意味を持ち、従来全く指摘されていなかったものである。さらに空間電荷係数 Q と電子ビームのプラズマ角周波数との関係は、既に著者によって指摘されたように²⁾

$$Q = -\beta_q^2 \quad (21)$$

で与えられる。すなわち Q は、電子ビームの軽減されたプラズマ角周波数の等価角方向位相定数 β_q の平方に負号を付したものに等しい。したがって no rippling を与えるプラズマ位相定数は

$$(\beta_q)_{n=1} = \sqrt{2} \quad (22)$$

となる。したがって軽減されたプラズマ角周波数 ω_q との関係は、

$$\omega_q = \sqrt{2} \Omega_0 \quad (23)$$

となる。このことは半径方向の振動の角周波数 $\sqrt{2} \Omega_0$ と電子ビームのプラズマ角周波数が一致すれば、no rippling の状態となる事を示している。このことはまた空間電荷を考慮した beam stiffness の結果とよく一致する³⁾。

5. 電子軌道

前節において no rippling を与える条件を、種々の係数で与えたが、これら係数間の一般的な関係を整理して示すと

$$P = \frac{r_0^2}{9X_0^2} P_c, \quad (24)$$

$$\rho = \frac{-4\epsilon_0 V_a}{9X_0^2}, \quad (25)$$

$$Q = \frac{-2r_0^2}{9X_0^2}, \quad (26)$$

$$\beta_a = \frac{\sqrt{2} r_0}{3X_0}, \quad (27)$$

$$\omega_q = \frac{r_0}{3X_0} \sqrt{2} \Omega_0. \quad (28)$$

となる。各係数の値を変化したときの、空間角 θ に対する電子軌道の一部を Fig. 5 に示した。この図からつぎのようなことが判明する。すなわち $0 \geq Q > -2$ のとき、つまり critical perveance より小さいとき、または電子ビームのプラズマ角周波数が半径方向振動の角周波数

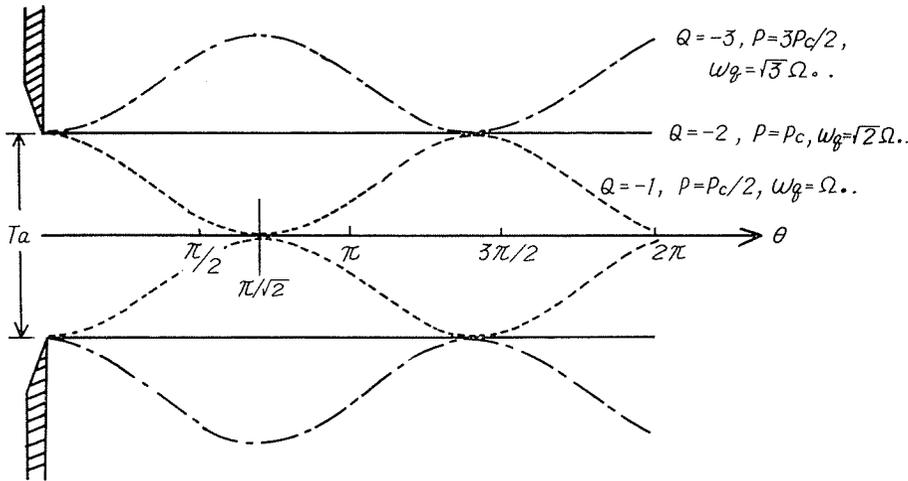


Fig. 5. Sketch showing paths of electrons that enter a centrifugal electrostatic focusing structure at beam edge for various values of the space-charge parameter.

$\sqrt{2} \Omega_0$ より小さいときは、rippling の幅は、陽極のスリットの幅 T_a をこえることはない。 $Q = -2$ のとき、つまり critical perveance であり、プラズマ角周波数と半径方向の角周波数 $\sqrt{2} \Omega_0$ が等しいとき、ripple がなくなる。つぎに $Q < -2$ のとき、すなわち perveance が P_c より大きくプラズマ角周波数が横方向角周波数より大きければ、rippling の幅はスリットの幅 T_a をこえるに至り、 Q の絶対値の増加とともに増して行く。すなわち $|Q| < 2$ のとき空間電荷は圧縮の傾向をもち、 $|Q| = 2$ のときは空間電荷界と、集束電極による電界とが、遠心力と平衡して ripple がなくなり、 $|Q| > 2$ になると空間電荷は発散する傾向をもつ。

さて文献 3) において空間電荷を考慮し beam stiffness の計算に用いた基本式は、

$$\ddot{r}_1 + (2+Q)\Omega_0^2 r_1 = 0 \quad (29)$$

あるいは

$$\ddot{r}_1 + 2 \left(\Omega_0^2 - \frac{1}{2} \omega_q^2 \right) r_1 = 0 \quad (29')$$

であった。これは近軸軌道方程式の計算に用いられた式(4)において、 F_{sc} を電子ビーム内の空間電荷 $-\rho\phi/\varepsilon_0$ とおきかえると得られる。 $Q=0$ および -2 の場合、式(29)および(10)より同一結果が得られる。 $0 > Q > -2$ のときは、同じ傾向を示すが、式(10)からは横方向振動の角周波数が $\sqrt{2} \Omega_0$ となり、式(29)または(29')からは角周波数が $\sqrt{2+Q} \Omega_0$ となる。この差は式(10)がedge-of-the-beam electron に関する方程式であり、式(29)と(29')は、空間電荷域内の一個の電子の運動に関するため生ずると考えられる。

すなわち電子ビーム内の電子の半径方向振動の角周波数は $\sqrt{2+Q} \Omega_0$ で与えられ、一般に空間電荷密度の関数である。空間電荷の効果を省略すれば(つまり $Q=0$) $\sqrt{2} \Omega_0$ となり、 $Q=-2$ となれば周波数零となり、no rippling となる。また edge-of-the-beam electron の半径方向角周波数は $\sqrt{2} \Omega_0$ であり、これが ω_q に等しければ critical perveance となる。つまり全く同じ物理的意味を示す。

6. 結 言

薄い CEF 型電子ビームの近軸軌道方程式をはじめて導き rippling を検討した。等価平行平面二極管(空間電荷制限状態)の間隙 X_0 の3倍が、電子ビームの中心半径 r_0 に等しいとき no rippling となる。このことは Nunn-Rowe の空間電荷係数の値が -2 で critical perveance と対応する。またこの条件は edge-of-the-beam electron の半径方向角周波数 $\sqrt{2} \Omega_0$ が、電子ビームのプラズマ角周波数 ω_q に等しいことを示す。得られたこれらの結果は従来全く知られていなかったものである。

おわりに研究の機会を与えて下さった電子工学科の方々に感謝する。

参 考 文 献

- 1) 桜庭一郎：“遠心力を用いた静電界集束系における電子軌道”。北海道大学工学部研究報告，第40号，pp. 77-86 (1966-3)。
- 2) 桜庭一郎・小柳幸次郎：“薄い CEF 型電子ビームの集群による空間電荷界”。北海道大学工学部研究報告，第43号，pp. 49-54 (1967-5)。
- 3) 小柳幸次郎・桜庭一郎：“空間電荷を考慮した CEF 型集束系の Beam Stiffness”。北海道大学工学部研究報告，第44号，pp. 67-72 (1967-8)。
- 4) W. E. Waters：“Rippling of Thin Electron Ribbons”。J. Appl. Phys., vol. 29, pp. 100-104 (1958-1)。
- 5) J. R. Pierce, Jr.: Theory and Design of Electron Beams. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, New Jersey (1954)。
- 6) Nunn, W. M., Jr. and Rowe, J. E.: “Single-Transit, Large-Radius E-Type Devices”。Trans. PGED-IRE, vol. ED-8, pp. 508-520 (1961-11)。