摩擦層内における煙突からの排ガスの乱流拡散について (第1報)

渡 辺 有 治*
中 村 晃*
(昭和42年9月16日受理)

Turbulent Diffusion of Stack Effluent within a Friction Layer

Yuji WATANABE
Akira NAKAMURA
(Received September 16, 1967)

Abstract

A solution was obtained for the diffusion of matters into a boundary layer from an elevated point source of constant strength. T. S. Walters (1957) obtained a solution for an elevated infinite line source which lies at right angles to the mean wind velocity, taking the mean wind velocity $U(z)$ and the coefficient of diffusion Kz in the vertical direction at height z to be

$$U(z) = U_1 z^m / z^m \quad \text{and} \quad Kz = Az^a.$$

Further, the authors took the coefficient of diffusion Ky in the horizontal cross-wind direction to be

$$Ky = B^2 U_1 x.$$

In the present paper, a generalized case is considered at an elevated point source; Bosanquet and Pearson's solution is derived from it as a special case.

Expressions are obtained for the maximum ground-level concentration Cmax and for the distance $x_{\max}$ down-wind from the source at which the ground-level concentration C attains its maximum value $C_{\max}$. An expression is also obtained for $C/C_{\max}$ with $x/x_{\max}$.

1. 概　　要

都市における排ガスの大気拡散現象のように比較的低層の大気内の拡散を考えるとき，今日まで提出されている拡散方程式はいくつかの不適当な点も持っていると思う。過去に直接微分方程式を解いた濃度分布の式としては，Bosanquet-Pearson[1] の式 (1936) およびび坂上の式[2] (1960) がある。しかしこれらの式は，地表面から数 100 m にわたって存在している平均風速

* 衛生工学科都市環境工学講座

の垂直分布に関する考慮がなされていない。そこで主にこの欠点を補う為に以下において，摩擦層内における非等方性の大気拡散現象を考慮して地表面の汚染濃度を計算する方程式について若干の考察をおこなう。そして主に述べられているのは，１本の煙突から排出された煙によるその風下の地表面濃度分布である。摩擦層内において平均風速の垂直分布および垂直方向の渦拡散係数は，地表面からの高度のベキによって表現されるものと仮定する。即ち，平均風速 $U(z)=U_1(z/z_1)^m$，垂直方向の拡散係数 $K_z=AU_1z^\alpha$ とし，さらに水平方向の拡散係数 $K_y=B^2U_1x$（平均風向と直角方向）とする。

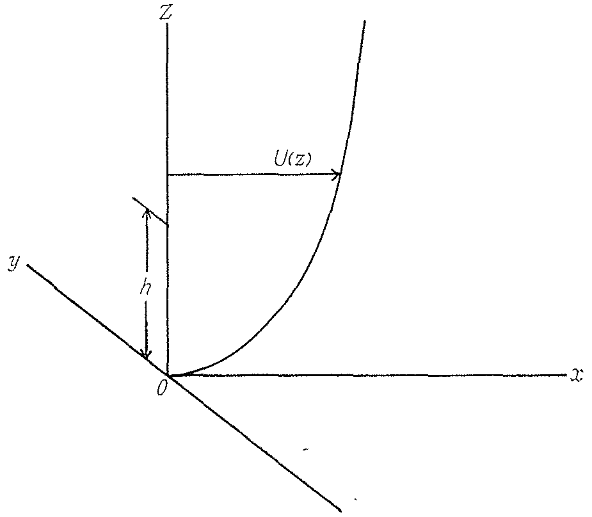
平均風向と直角方向の濃度分布の型は，K_y の仮定から正規型であることがわかる。又得られた式について指数 $m=0, \alpha=1$, とすると，Bosanquet-Pearson によって得られた拡散式となる。

本論文で得られた結果から次の無次元式が導かれる。

$$\frac{C}{C_{\max}}=\left(\frac{x}{x_{\max}}\right)^{-\frac{2m-\alpha+2}{m-\alpha+2}}\exp\left[\frac{2m-\alpha+3}{m-\alpha+2}\left\{1-\left(\frac{x}{x_{\max}}\right)^{-1}\right\}\right]$$

2. 基礎方程式

地表面から一定の高さにおいてたえず一定の割合で拡散物質が大気中へ放出されているとき，すなわち，十分長い間放出が続きその放出源の風下のある時間平均濃度分布が定常になっているような状態を考える。平均風速の方向は，ある固定した方向（平均風向）に対して常に平行に保たれ，そしてまた地面からの（正確にはある粗度定数 z_0 から）の高さ z のみの関数であるとする。排出される物質は，ガス体かまたは大気の運動と何らのずれも生じない程微細な粒子であるとする。



図—1

地表面において，x 軸は平均風向の方向に平行であり，y 軸は水平で x 軸と直角方向にとり，z 軸はこれらの軸と直角で地面から垂直方向にとるものとする。また原点は，煙突の基部に考える（図–1 参照）。

定常状態における三次元の点 (x, y, z) での平均濃度の式 $C(x, y, z)$ は，次の拡散に関する微分方程式の解として得られる。著者等は，先に T. S. Walters[4] (1956) が二次元の拡散について求めた結果を三次元に拡張してその結果に若干の考察を加えた。

定常状態における拡散の基礎方程式は，

$$U(z)\frac{\partial C}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y\frac{\partial C}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial C}{\partial z}\right) \tag{1}$$

$$U(z)=U_1\left(\frac{z}{z_1}\right)^m \tag{2}$$

$U(z)$ = 高さ z における平均風速
U_1 = ある基準の高さ z_1 における平均風速
m = 大気の安定度などによって変化せるもので0～1の値を取る

となる。 Frost[3] (1947) は 1.1 m～305 m の高さについて (2) 式を求めたのであるが，その時の m の範囲は，0.145～0.77 であり，気温減率が減るほど，すなわち，安定度が増すほど大きくなるものである。また大気が中立状態になるときの値は，$m=0.149\fallingdotseq 1/7$ となり 1/7 剰法則が成り立っている。

さらに地表面からある高さ h に存在する汚染濃からの拡散に関して，その垂直方向および水平方向の拡散係数は，次式の如く表わされるものと仮定する。

$$K_z=A'z^{\alpha} \tag{3}$$

$$K_y=B^2U_1x \tag{4}$$

A', B = 比例定数

汚染源の高さ h の値は，(2), (3) 式のベキ法則の表現が有効な領域内に拡散がおこなわれるようなものでなければならない。

3. 地表面濃度算定式

(1) 式の地表面濃度を求めるに際して，著者等は，Bosanquet-Pearson の解法を応用した。(1) 式に (2), (3), (4) 式を代入し，さらに次の境界条件に従い Hankel 変換を用いて地表面濃度を表わす式 $C(x,y,0)$ が求められる。

境 界 条 件

i) $z\to 0$,　$x>0$ のとき

$$K_z\frac{\partial C}{\partial z}\longrightarrow 0 \tag{5}$$

この条件は，地面から内部への物質移動がないということを表わしている。

ii) 連続の条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}U(z)\,C(x,y,z)\,dydz=Q \tag{6}$$

Q = 汚染源排出強度（一定）

以上の条件によって地表面濃度を表わす式 $C(x,y,0)$ を求めると次式の如くなる。

$$C(x,y,0)=\frac{Q}{\sqrt{2\pi}\,A'^{(m+1)/(m-\alpha+2)}\,B(m-\alpha+2)^{(m+\alpha)/(m-\alpha+2)}}$$
$$\times\frac{1}{z_1{}^{m(\alpha-1)/(m-\alpha+2)}\,\Gamma\left(\dfrac{m+1}{m-\alpha+2}\right)U_1{}^{(1-\alpha)/(m-\alpha+2)}}$$
$$\times\frac{1}{x^{(2m-\alpha+2)/(m-\alpha+2)}}\exp\left[-\frac{U_1h^{(m-\alpha+2)}}{A'(m-\alpha-2)^2z_1{}^m x}-\frac{y^2}{2B^2x^2}\right] \tag{7}$$

(7) 式において比例定数 A' を Bosanquet-Pearson の式における垂直方向の拡散係数と類似の形式に置きかえる。

$$A' = AU_1 \tag{8}$$

そこで (8) 式を (7) 式に代入すると，

$$C(x,y,0)=\frac{Q}{\sqrt{2\pi}\,A^{(m+1)/(m-\alpha+2)}\,B(m-\alpha+2)^{(m+\alpha)/(m-\alpha+2)}}$$
$$\times\frac{1}{z_1{}^{m(\alpha-1)/(m-\alpha+2)}\,\Gamma\left(\dfrac{m+1}{m-\alpha+2}\right)U_1x^{(2m-\alpha+2)/(m-\alpha+2)}}$$
$$\times\exp\left[-\frac{h^{(m-\alpha+2)}}{A(m-\alpha+2)^2z_1{}^m x}-\frac{y^2}{2B^2x^2}\right] \tag{9}$$

となる。さらに (8) 式を (3) 式に代入すると，K_z は次の如くなる。

$$K_z = AU_1z^{\alpha} \tag{10}$$

次に地表面最大濃度を示す風下距離 $x_{\max}$ は，(9) 式において $y=0$ とおき，$\partial C/\partial x=0$ とすると，次式の如くなる。

$$x_{\max}=\frac{h^{(m-\alpha+2)}}{A(m-\alpha+2)(2m-\alpha+3)z_1{}^m} \tag{11}$$

そこで (9) 式の $y=0$ としたときの x 軸上の濃度を表わす式に (11) 式を代入すると，地表面最大濃 $C_{\max}$ は次式の如くなる。

$$C_{\max}=\frac{(m-\alpha+2)^{(m-2\alpha+3)/(m-\alpha+2)}}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{m+1}{m-\alpha+2}\right)}$$
$$\times\frac{(2m-\alpha+3)^{(2m-\alpha+3)/(m-\alpha+2)}z_1{}^m A}{B}\exp\left[-\frac{2m-\alpha+3}{m-\alpha+2}\right]\frac{Q}{U_1h^{(2m-\alpha+3)}} \tag{12}$$

ここで (11) 式および (12), (9) 式に $m=0$, $\alpha=1$ を代入すると Bosanquet-Pearson の式が得られる。すなわち，

$$C(x,y,0)=\frac{Q}{\sqrt{2\pi}\,ABU_1x^2}\exp\left[-\frac{h}{Ax}-\frac{y^2}{2B^2x^2}\right] \tag{13}$$

$$x_{\max}=\frac{h}{2A} \tag{15}$$

$$C_{\max}=\frac{4QA}{\sqrt{2\pi}\,e^2U_1h^2B} \tag{15}$$

今求められた式を Bosanquet-Pearson の式と比較するために，(9) 式の無次元化をすることにする (但し，$y=0$)。(9) 式に $y=0$ を代入すると，

$$C(x,y,0)=\frac{Q}{\sqrt{2\pi}\,A^{(m+1)/(m-\alpha+2)}B(m-\alpha+2)^{(m+\alpha)/(m-\alpha+2)}}$$
$$\times\frac{1}{z_1^{m(\alpha-1)/(m-\alpha+2)}\Gamma\left(\dfrac{m+1}{m-\alpha+2}\right)U_1x^{(2m-\alpha+3)/(m-\alpha+2)}}$$
$$\times\exp\left[\frac{h^{(m-\alpha+2)}}{A(m-\alpha+2)^2z_1^mx}\right] \tag{16}$$

となる。そこで，

$$R=\frac{x}{x_{\max}} \tag{17}$$

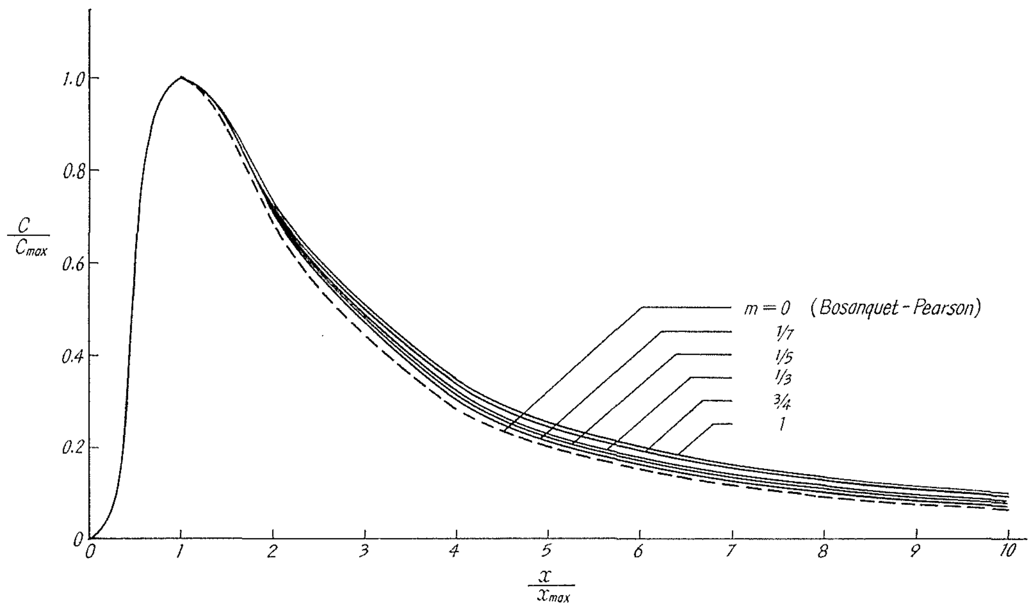
$$S=\frac{C}{C_{\max}} \tag{18}$$

のように R, S という距離と濃度に関する無次元量を導入すると，(16) 式は次のように無次元化される。

$$S=R^{-(2m-\alpha+3)/(m-\alpha+2)}\exp\left[\frac{2m-\alpha+3}{m-\alpha+2}(1-R^{-1})\right] \tag{19}$$

そこで Sutton によれば，水平方向の渦レイノズル接線応力が地面からの高さに無関係であるとすると，垂直拡散係数 K_z に含まれている指数 α は m と次の関係にあるといわれている。

$$\alpha=1-m \tag{20}$$



図—2

(20) 式を (19) 式に代入すると，

$$S = R^{-(3m+2)/(2m+1)} \exp\left[\frac{3m+2}{2m+1}(1-R^{-1})\right] \tag{21}$$

となる。ここで $m=0$ とすると，Bosanquet-Pearson の式の無次元式となる。

$$S_{m=0} = R^{-2} \exp[2(1-R^{-1})] \tag{22}$$

前にも述べた通り指数 m はだいたい大気の安定度と関係があり，Frost (1947)，山本 (1964) 等による低層大気における平均風速の垂直分布に関するデータから m の値は，0～1 の間にあるものと思われる。また $m=1/7$ は，大気が中立状態にあることを示している。

そこで，Bosanquet-Pearson の式と (21) 式を，いくつかのの m 値について比較した (図-2 参照)。ここで用いられた m の値は，0, 1/7, 1/5, 1/3, 3/4, 1, である。

4. 考　　察

前節において $C/C_{\max}$ と $x/_{\max}$ の関係を導き，Bosanquet-Pearson 式をより一般化し，摩擦層内という非等方性の乱流場における煙の拡散現象を表現することができた。図-2 からもわかるように，最大濃度地点 $x_{\max}$ より風下における地表面濃度の変化が m の値によって変化し m が 1 に近ずくに従って濃度の減少が小さくなる傾向を示している。この結果，濃度の変化が，m に代表される大気安定度によって影響されることがわかる。しかしまだ垂直方向の風速分布と m の関係，すなわち，大気安定度との関係が明確に調べられていず，今後多くの資料が必要である。さらに K_z についての関数形を見い出すことが大切である。

本論文で仮定された垂直方向の拡散係数 K_z は (10) 式で表現されるように $\alpha=1$ のとき，Bosanquet-Pearson の用いた形と一致するが，比例定数 A は，安定度によって変化すると同時に長さの $1-\alpha$ 乗の次元をもつ。そこでこの長さを z (あるいは有効煙突高度 h) と見るか，あるいは他のものと見るかについては，今後の観測結果に待たねばならない。山本[5] (1959) は，修正された混合距離を用いて K_z を次のように表現している。

$$K_z = k^2 z^2 u_* (1-\sigma R_i)^{\frac{1}{2}}$$

ここで k はカルマンの定数，u_* は摩擦速度，R_i はリチャードソン数，σ は定数である。この表現は，R_i を用いているが，R_i そのものも又高度 z によって変るのであるから，著者等の仮定した K_z の比例常数 A は，z および安定度によって変ることが予想される。さらに F. B. Smith[6] (1956) は，$K_z = K_0(z+h)^{-\alpha}$ を採用して三次元点源からの拡散現象を解いているが，彼の求めた結果は，境界条件の不備のために地面濃度が求められない。

著者らは，現在，K_z の表現に関して $\alpha(=1-m)$ と安定度の関係を検証しつつある。

終りに，本論文の提案と指導を頂いた井上教授に心からの謝意を表します。

参考文献

1) Bosanquet, C. H. and Pearson, T. L.: The spread of smoke and gases from chimney, Trans, Farady Soc. **32**, 1264-1294 (1936).

2) Sakagami, J.: On the relations between the diffusion parameter and meteorological conditions, Nat Sci. Rep. of the Ochanomizu Univ. **11**, 2 (1960).

3) Frost: Met. Mag. **76**, 14 (1947).

4) Walters, T. S.: Quart. Jour. Mech. and Applied Math., **10-2**, 214 (1957).

5) Yamamoto, G.: Theory of Turbulent Transfer in Non-Neutral Conditions. Jour. Met. Soc. Japan, **37-2**, 60 (1959).

6) Smith, F. B.: The diffusion of smoke from a continuous elevated point-source into a turbulent atmosphere, J. Fluid Mech., 49 (1956).