



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	レーザービーム導波系用集束素子”ガスレンズ”の曲りに関する理論的考察
Author(s)	今井, 正明; Imai, Masaaki; 松本, 正 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 47, 57-74
Issue Date	1968-03-26
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40858
Type	departmental bulletin paper
File Information	47_57-74.pdf



レーザービーム導波系用集束素子“ガスレンズ”の 曲りに関する理論的考察

今井 正明*

松本 正*

(昭和42年12月4日受理)

Some Theoretical Considerations on the Bending of a Focusing Element “Gas Lens” as a Laser Beam Waveguide

Masaaki IMAI

Tadashi MATSUMOTO

(Received December 4, 1967)

Abstract

The electromagnetic field in the bending of a gas lens which is considered as a focusing element for laser beam waveguides was studied. The field was calculated by expanding input beams in terms of normal modes and summing them up at any points along the curved axis.

Thus it was shown that in the case of gentle bending of $R \gg 1/\sqrt{2} g^2 \omega_0$, the input Gaussian beam undulates following the locus of $x = -(1 - \cos g z)/2g^2 R$, while in sharp bending of $R \simeq 1/\sqrt{2} g^2 \omega_0$, the input beam not only deviates from the center axis, but the spot size of the Gaussian beam is converted into an ellipse, giving the impression that the spot is pressed toward the outside of the curved axis. In other words it was shown that a mode conversion occurred in sharp bending of the gas lens.

Further it was shown that the dielectric distribution in a gas lens can be determined in such a way as to suppress the mode conversion by using the above mentioned method. The physical significance of the dielectric constant distribution obtained above was discussed, and lastly the limits of the region where this method is valid were investigated in detail.

目 次

1. ま え が き	58
2. 曲りガスレンズ内の電磁界	59
3. ガウスビーム入射に対する応答	63
4. 姿態変換を打消す誘電率分布	67
5. 展開方法の適用範囲について	71
6. む す び	72
文 献	73
付 録	74

* 電子工学科電波伝送講座

1. ま え が き

近年のレーザー技術の著しい発達に伴い、周波数が現在実用化されつつありミリ波帯 (30に300Gc) 比べてさらに 10^3 オーダ高いコヒーレントなレーザー光を通信に用いることが考えられている。そのためには発振器から取り出したレーザー光をいかに能率良く変調、複調するかということと並行して、良質で安定な伝送路を見出すことが重要な問題となる。すなわちレーザー光をマイクロ波伝送のように大気中を伝搬させると、大気による散乱、吸収の他に、雨、霧などによって大きな減衰を受けると考えられるので、外界から遮蔽して伝搬させる必要がでてくる。またレーザー光は鋭い指向性を持つビーム状のものとして放射されるが、伝搬していくにつれて発散する性質を有するために、凸レンズのような集束素子を周期的に配置してビームの拡がりを抑えなければならない。この目的のために現在のところ、光学レンズを周期的に配置した導波系^{1),2)}、あるいはガスに適当な温度勾配を与えることによって集束作用させる“ガスレンズ”が考えられている。前者は技術的に精度高く作ることが可能であり、しかも表面に反射防止膜を施すことにより反射損失を小さくできるが、それを多数個配置した場合に累積していく損失は無視できない。一方後者においては反射、吸収損失は殆んど無視されるが、ガスの温度勾配を利用するために不安定となる欠点がある。この他にサブミリ波帯 (300 Gc 以上) で用いられる反射鏡を伝送路として使うことが考えられるが³⁾、これも反射損失のために長距離用として用いるよりも、むしろ鋭角的に曲げた屈曲部に適していると思われる。

そこで本論文ではそれらのうちのガスレンズについてその基本的性質を明らかにすることを目的としているが、直線状のものについては理論的、実験的にも種々検討されているので^{4),5)} 曲り部について厳密に解明した。従来この曲り部は非常に緩いという近似のもとで、波動光学的、あるいは幾何光学的に解析されていて、それぞれ曲り部における固有電磁界、およびビーム行路が求められている^{6),7)}。これに対して筆者らはミリ波多重モード導波管に対して用いられた coupled mode theory を使うことにより、曲り部の電磁界を直線状ガスレンズの固有姿態で展開してその和を計算することにより求めた。その結果曲りが緩やかな場合 ($R \gg 1/\sqrt{2} g^2 \tau_0$; R : 曲りの半径, g : 誘電率分布の自乗比例係数, $\tau_0 = \sqrt{\lambda/2\pi g}$) には、ガスレンズの軸上に入射したビームは軸から曲りの外側へ脈動しながら伝搬していくが、曲りが比較的急である場合 ($R \simeq 1/\sqrt{2} g^2 \tau_0$) には、入射ビームのスポットが歪んできて姿態変換が生ずることが明らかになった⁸⁾。

通信においてこの姿態変換は遅延歪みの原因となり、通信品質を低下させるのみならずガスレンズの有限な口径による回折損失が増大することにもなるので、これを除去することが必要である。そのためにつぎにはカスレンズ内の誘電率分布を自乗法則から変形することによりこの姿態変換を打消した。そこで用いた方法は先に述べた coupled mode theory である。その結果曲りが緩やかな場合には、ガスレンズの中心軸から外側へ $1/g^2 R$ だけずれた点にビーム

を入射すると、前述の脈動運動が打消されることが知られたが、急な曲りに対しては中心軸に関して非対称な誘電率分布が要求された⁹⁾。最後にこの理論の適用限界を明確にして、ガスレンズ導波系を設計する際の参考に供した。

2. 曲りガスレンズ内の電磁界

ガスに屈折率勾配を持たせて光学レンズと同様の集束作用させるガスレンズはその誘電率分布が

$$\varepsilon(r) = \varepsilon(0)(1 - (gr)^2) \quad (1)$$

でなければならない*。ただし $\varepsilon(0)$ は中心軸上における誘電率であり、真空中の誘電率 ε_0 、および屈折率 n_0 とつぎの関係にある。

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_0 n^2 \quad (2)$$

式(1)の誘電率分布を Maxwell の方程式に考慮してこの媒質に固有な電磁界を求めると、誘電率変化が波長に比して十分小さいとする近似 ($g^2 w_0^2 \ll 1$) のもとで⁷⁾,

$$\left. \begin{aligned} \phi_{(lm)} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_m (l-m)!}{\pi (l!)^3}} \frac{r^m}{w_0^{m+1}} L_l^m \left(\frac{r^2}{w_0^2} \right) e^{\frac{r^2}{2w_0^2} \cos m\varphi} \\ L_l^m(x) &= \frac{d^m}{dx^m} \left(e^x \frac{d^l}{dx^l} (e^{-x} x^l) \right) \\ w_0 &= \frac{1}{\sqrt{k(0)g}}, \quad k^2(0) = \omega^2 \varepsilon(0) \mu, \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 1: & m=0 \\ 2: & m \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ただし $\phi_{(lm)}$ は横方向 (x または y 方向) の電磁界成分を表わしていて、 L_l^m は Laguerre の陪多項式であり、 w_0 は電磁界強度が $1/e$ に低下する半径を表わしていて、媒質によって決まる固有スポットサイズである。

さてこのガスレンズが Fig. 1 に示すごとく、 $\varphi=0$ と $\varphi=\pi$ の線をその曲りの面内に含むよ

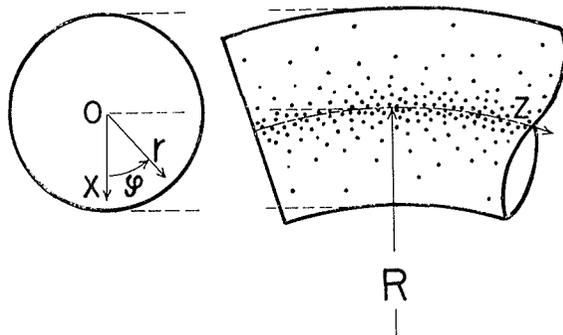


Fig. 1. Uniformly curved gas lens.

* 実際の誘電率分布は半径の自乗で変化する項の他に、4乗、6乗、…などの高次変化項を含んでいて、姿態変換の原因となっている¹⁰⁾。そこで半径の自乗で変化する誘電率分布を理想的媒質と称して区別する場合もあるが、ここでは特に指定しない限り、この理想的媒質を持つガスレンズを考える。

う曲っているものとする。その場合曲りの軸に沿って z 座標を取り, r, φ をそれに垂直な断面における極座標とすると, r, φ, z 方向の測度係数はそれぞれ

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1 - \frac{r \cos \varphi}{R} \quad (4)$$

よって曲り部の電磁界を決定する Maxwell の方程式はこれらの測度係数を用いて,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}_t}{\partial z} &= \frac{1}{j\omega} \nabla_t \left(\frac{h_3}{\varepsilon} \nabla_t \cdot (\mathbf{H}_t \times \mathbf{i}_z) \right) - j\omega \mu h_3 (\mathbf{H}_t \times \mathbf{i}_z) \\ \frac{\partial \mathbf{H}_t}{\partial z} &= - \frac{1}{j\omega \mu} \nabla_t (h_3 \nabla_t \cdot (\mathbf{E}_t \times \mathbf{i}_z)) + j\omega \varepsilon h_3 (\mathbf{E}_t \times \mathbf{i}_z) \\ E_z &= \frac{1}{j\omega \varepsilon} \nabla_t \cdot (\mathbf{H}_t \times \mathbf{i}_z) \\ H_z &= - \frac{1}{j\omega \mu} \nabla_t \cdot (\mathbf{E}_t \times \mathbf{i}_z) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで $\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t$ は横方向の電界, 磁界成分を表わして、 ∇_t は横方向成分に作用する微分演算子である。また E_z, H_z は縦電磁界成分を, \mathbf{i}_z は縦方向の単位ベクトルを表わしている。

式(5)を $\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t$ について解くと曲りガスレンズ内の電磁界が求まるのであるが, そのためには曲りが非常に緩いという近似を用いざるを得ない⁷⁾。そこで曲り部の電磁界を直線状ガスレンズの固有姿態の和の形で表わす方法をとる。すなわち $\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t$ を式(3)で展開して,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_t &= \sum_l \sum_m E_{(lm)}(z) \mathbf{e}_{(lm)}(r, \varphi) \\ \mathbf{H}_t &= \sum_l \sum_m H_{(lm)}(z) \mathbf{h}_{(lm)}(r, \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここで $E_{(lm)}, H_{(lm)}$ は展開係数であり, $\mathbf{e}_{(lm)}, \mathbf{h}_{(lm)}$ はその絶対値が $\phi_{(lm)}$ であるようなベクトルである。

式(6)を式(5)に代入して固有姿態に関する規格直交条件

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \mathbf{e}_{(lm)} \times \mathbf{h}_{(l'm')} \cdot \mathbf{i}_z r dr d\varphi = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \phi_{(lm)} \phi_{(l'm')} r dr d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (7)$$

δ_{lm} はクロネッカーのデルタ記号

を用いると, $E_{(lm)}, H_{(lm)}$ に関してつぎの多重結合伝送方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} E_{(lm)} &= - \sum_{l'} \sum_{m'} Z_{(lm)(l'm')} H_{(l'm')} \\ \frac{d}{dz} H_{(lm)} &= - \sum_{l'} \sum_{m'} Y_{(lm)(l'm')} E_{(l'm')} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} Z_{(lm)(l'm')} &= j\omega \mu \iint h_3 \mathbf{e}_{(lm)} \cdot \mathbf{e}_{(l'm')} dS - \frac{1}{j\omega} \iint \nabla_t \left(\frac{h_3}{\varepsilon} \nabla_t \cdot \mathbf{e}_{(lm)} \right) \cdot \mathbf{e}_{(l'm')} dS \\ Y_{(lm)(l'm')} &= j\omega \varepsilon \iint h_3 \mathbf{h}_{(lm)} \cdot \mathbf{h}_{(l'm')} dS - \frac{1}{j\omega \mu} \iint \nabla_t (h_3 \nabla_t \cdot \mathbf{h}_{(lm)}) \cdot \mathbf{h}_{(l'm')} dS \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$dS = r dr d\varphi$$

$Z_{(lm)(l'm')}$, $Y_{(lm)(l'm')}$ は (lm) 姿態と $(l'm')$ 姿態の間の結合の大きさを結合定数であって、以下にこれを求めるのであるが、光ビームの偏波面が x 方向にある場合、すなわち $\mathbf{e}_{(lm)} = \mathbf{i}_x \phi_{(lm)}$, $\mathbf{h}_{(lm)} = \mathbf{i}_y \phi_{(lm)}$ の場合を検討する。このとき式 (9) はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} Z_{(lm)(l'm')} &= j\omega\mu \iint h_3 \phi_{(lm)} \phi_{(l'm')} dS - \frac{1}{j\omega} \iint \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_3}{\varepsilon} \frac{\partial \phi_{(lm)}}{\partial x} \right) \phi_{(l'm')} dS \\ Y_{(lm)(l'm')} &= j\omega \iint \varepsilon h_3 \phi_{(lm)} \phi_{(l'm')} dS - \frac{1}{j\omega\mu} \iint h_3 \frac{\partial^2 \phi_{(lm)}}{\partial y^2} \phi_{(l'm')} dS \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

固有姿態 (lm) には偶姿態 ($\cos m\varphi$) と奇姿態 ($\sin m\varphi$) とがあるが、上式の計算においては偶姿態は偶姿態に、奇姿態は奇姿態に結合するもののみが残る。またこの結合定数は r 方向、 φ 方向の指数差が増す程、 $g^2 \omega_0^2 (10^6 \sim 10^7)$ のオーダーで零に収斂していくので、 φ 方向の指数 (m) の差が ± 1 , r 方向の指数 (l) の差が ± 2 までのものを以下に記す。

$$\left. \begin{aligned} Z_{(lm)(lm)} &= j\omega\mu \left(1 - \frac{g^2 \omega_0^2}{2} (2l - m + 1) \right) + O(g^4 \omega_0^4) \\ Z_{(lm)(l+1, m)} &= -\frac{j\omega\mu g^2 \omega_0^2}{2} \sqrt{(l+1)(l-m+1)} + O(g^4 \omega_0^4) \\ Z_{(lm)(l-1, m)} &= -\frac{j\omega\mu g^2 \omega_0^2}{2} \sqrt{l(l-m)} + O(g^4 \omega_0^4) \\ Z_{(lm)(l, m+1)} &= -\frac{j\omega\mu \omega_0}{2R} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m+1}}} \sqrt{l-m} \left(1 - \frac{g^2 \omega_0^2}{4} (3l - m + 1) \right) + O(g^4 \omega_0^4) \\ Z_{(lm)(l, m-1)} &= -\frac{j\omega\mu \omega_0}{2R} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m-1}}} \sqrt{l-m+1} \left(1 - \frac{g^2 \omega_0^2}{4} (3l - m + 2) \right) + O(g^4 \omega_0^4) \\ Z_{(lm)(l+1, m+1)} &= \frac{j\omega\mu \omega_0}{2R} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m-1}}} \sqrt{l+1} \left(1 - \frac{g^2 \omega_0^2}{4} (3l - 2m + 2) \right) + O(g^4 \omega_0^4) \\ Z_{(lm)(l-1, m-1)} &= \frac{j\omega\mu \omega_0}{2R} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m-1}}} \sqrt{l} \left(1 - \frac{g^2 \omega_0^2}{4} (3l - 2m + 1) \right) + O(g^4 \omega_0^4) \\ Z_{(lm)(l+1, m-1)} &= \frac{3j\omega\mu g^2 \omega_0^3}{8R} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m-1}}} \sqrt{(l+1)(l-m+2)(l-m+1)} + O(g^4 \omega_0^4) \\ Z_{(lm)(l-1, m+1)} &= \frac{3j\omega\mu g^2 \omega_0^3}{8R} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m+1}}} \sqrt{l(l-m)(l-m-1)} + O(g^4 \omega_0^4) \\ Z_{(lm)(l+2, m+1)} &= -\frac{3j\omega\mu g^2 \omega_0^3}{8R} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m+1}}} \sqrt{(l+2)(l+1)(l-m+1)} + O(g^4 \omega_0^4) \\ Z_{(lm)(l-2, m-1)} &= -\frac{3j\omega\mu g^2 \omega_0^3}{8R} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m-1}}} \sqrt{l(l-1)(l-m)} + O(g^4 \omega_0^4) \\ \dots &= \dots \\ Y_{(lm)(lm)} &= j\omega\varepsilon(0) \left(1 - \frac{3g^2 \omega_0^2}{2} (2l - m + 1) \right) \\ Y_{(lm)(l-1, m)} &= \frac{j\omega\varepsilon(0) g^2 \omega_0^2}{2} \sqrt{(l+1)(l-m+1)} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
Y_{(lm)(l-1,m)} &= \frac{j\omega \varepsilon(0) g^2 \omega_0^2}{2} \sqrt{l(l-m)} \\
Y_{(lm)(l,m+1)} &= -\frac{j\omega \varepsilon(0) \omega_0}{2R} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m+1}}} \sqrt{l-m} \left(1 - g^2 \omega_0^2 \left(3l-m+1 + \frac{l-3m-1}{4}\right)\right) \\
Y_{(lm)(l,m-1)} &= -\frac{j\omega \varepsilon(0) \omega_0}{2R} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m-1}}} \sqrt{l-m+1} \left(1 - g^2 \omega_0^2 \left(3l-m+2 + \frac{l-3m+2}{4}\right)\right) \\
Y_{(lm)(l+1,m+1)} &= \frac{j\omega \varepsilon(0) \omega_0}{2R} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m+1}}} \sqrt{l+1} \left(1 - g^2 \omega_0^2 \left(3l-2m+2 + \frac{l+2m+2}{4}\right)\right) \\
Y_{(lm)(l-1,m-1)} &= \frac{j\omega \varepsilon(0) \omega_0}{2R} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m-1}}} \sqrt{l} \left(1 - g^2 \omega_0^2 \left(3l-2m+1 + \frac{l+2m-1}{4}\right)\right) \\
Y_{(lm)(l+1,m-1)} &= -\frac{3j\omega \varepsilon(0) g^2 \omega_0^3}{8R} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m-1}}} \sqrt{(l+1)(l-m+2)(l-m+1)} \\
Y_{(lm)(l-1,m-1)} &= -\frac{3j\omega \varepsilon(0) g^2 \omega_0^3}{8R} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m+1}}} \sqrt{l(l-m)(l-m-1)} \\
Y_{(lm)(l+2,m+1)} &= \frac{3j\omega \varepsilon(0) g^2 \omega_0^3}{8R} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m+1}}} \sqrt{(l+2)(l+1)(l-m+1)} \\
Y_{(lm)(l-2,m-1)} &= \frac{3j\omega \varepsilon(0) g^2 \omega_0^3}{8R} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m-1}}} \sqrt{l(l-1)(l-m)} \\
\cdots &= \cdots
\end{aligned} \tag{12}$$

ここで $O(x)$ は x と同程度かそれ以上の微小量を示す。またこの際用いた Laguerre の陪多項式に関する漸化式、積分公式は付録 (1), (2) において示す。

式 (11), (12) において、 $g^2 \omega_0^2 \ll 1$ の大小関係を考慮すると、自己結合係数 $Z_{(lm)(lm)}$, $Y_{(lm)(lm)}$ * を除いては ω_0/R のオーダーを有する $Z_{(lm)(l,m\pm 1)}$, $Z_{(lm)(l\pm 1,m\pm 1)}$ (または Y) の結合定数のみが問題となる。したがって (lm) 姿態と結合するものは $(l, m\pm 1)$, $(l\pm 1, m\pm 1)$ 姿態

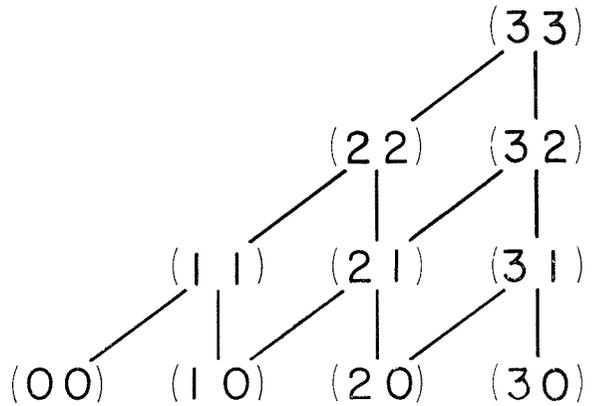


Fig. 2. Coupling between normal modes due to bends of gas lens.

(複号同順) のみになって、Fig. 2 に示すような姿態間の結合関係が成立つ。つぎに光ビームの偏波面が y 方向にある場合 ($\mathbf{e}_{(lm)} = \mathbf{i}_y \phi_{(lm)}$, $\mathbf{h}_{(lm)} = -\mathbf{i}_x \phi_{(lm)}$) について調べると、 ω_0/R のオー

* 自己結合定数 $Z_{(lm)(lm)}$, $Y_{(lm)(lm)}$ の積の平方根をとると、

$$\begin{aligned}
j\beta_{(lm)} &= jk(0) \sqrt{\left(1 - \frac{g^2 \omega_0^2}{2} (2l-m+1)\right) \left(1 - \frac{3g^2 \omega_0^2}{2} (2l-m+1)\right)} \\
&\simeq j(k(0) - (2l-m+1)g)
\end{aligned}$$

これは直線状ガスレンズの (lm) 姿態の位相定数に一致する⁷⁾。

ダまでは式 (11), (12) と同じ結合定数が得られる⁸⁾。すなわち結合定数は偏波面に関係なくなり、媒質定数、曲率半径、波長の関数となる。

さてこのように結合定数が求まったから、問題は多重結合方程式 (8) を適当な端条件のもとで解くことに帰着される。次章で姿態整合された固有ガウスビーム ((00) 姿態)、および任意のスポットを有するガウスビームが曲り部に入射した場合の応答を調べる。

3. ガウスビーム入射に対する応答

3-1 固有ガウスビームが入射する場合

最低次のガウス姿態 ((00) 姿態) が曲り部に入射する場合には、(00) 姿態と結合するものとして (11) 姿態のみであることが Fig. 2 から知られるから、式 (8) つぎのように簡単になる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE_{(00)}}{dz} &= -Z_{(00)(11)}H_{(00)} - Z_{(00)(00)}H_{(11)} \\ \frac{dE_{(11)}}{dz} &= -Z_{(11)(11)}H_{(11)} - Z_{(11)(00)}H_{(00)} \\ \frac{dH_{(00)}}{dz} &= -Y_{(00)(00)}E_{(00)} - Y_{(00)(11)}E_{(11)} \\ \frac{dH_{(11)}}{dz} &= -Y_{(11)(11)}E_{(11)} - Y_{(11)(00)}E_{(00)} \end{aligned} \right\} (13)$$

ここで結合定数は

$$\left. \begin{aligned} Z_{(00)(00)} &= j\omega\mu\left(1 - \frac{g^2\omega_0^2}{2}\right) \\ Z_{(00)(11)} &= Z_{(11)(00)} = \frac{j\omega\mu\omega_0}{2\sqrt{2}R}\left(1 - \frac{g^2\omega_0^2}{2}\right) \\ Z_{(11)(11)} &= j\omega\mu(1 - g^2\omega_0^2) \\ Y_{(00)(00)} &= j\omega\varepsilon(0)\left(1 - \frac{3g^2\omega_0^2}{2}\right) \\ Y_{(00)(11)} &= Y_{(11)(00)} = \frac{j\omega\varepsilon(0)\omega_0}{2\sqrt{2}R}\left(1 - \frac{5g^2\omega_0^2}{2}\right) \\ Y_{(11)(11)} &= j\omega\varepsilon(0)(1 - 3g^2\omega_0^2) \end{aligned} \right\} (14)$$

式 (14) を直接解くと、 E , H については 4 階の微分方程式となって計算は複雑になる。そこで波動インピーダンス $K_{(lm)} = \sqrt{Z_{(lm)(lm)}/Y_{(lm)(lm)}}$ なる量を導入して、微分方程式の階数を減らす。この波動インピーダンスは前進波、および反射波の振幅をそれぞれ $a_{(lm)}$, $b_{(lm)}$ とすると、 $E_{(lm)}$, $H_{(lm)}$ とつぎのように関係づけられる。

$$\left. \begin{aligned} E_{(lm)} &= \sqrt{K_{(lm)}}(a_{(lm)} + b_{(lm)}) \\ H_{(lm)} &= \frac{1}{\sqrt{K_{(lm)}}}(a_{(lm)} - b_{(lm)}) \end{aligned} \right\} (15)$$

式(15)を式(13)に代入して整理すると,

$$\left. \begin{aligned} \frac{da_{(00)}}{dz} &= -C_{(00)(00)}^+ a_{(00)} - C_{(00)(00)}^- b_{(00)} - C_{(00)(11)}^- a_{(11)} - C_{(00)(11)}^+ b_{(11)} \\ \frac{da_{(11)}}{dz} &= -C_{(11)(11)}^+ a_{(11)} - C_{(11)(11)}^- b_{(11)} - C_{(11)(00)}^+ a_{(00)} - C_{(11)(00)}^- b_{(00)} \\ \frac{db_{(00)}}{dz} &= C_{(00)(00)}^+ b_{(00)} + C_{(00)(00)}^- a_{(00)} + C_{(00)(11)}^+ b_{(11)} + C_{(00)(11)}^- a_{(11)} \\ \frac{db_{(11)}}{dz} &= C_{(11)(11)}^+ b_{(11)} + C_{(11)(11)}^- a_{(11)} + C_{(11)(00)}^+ b_{(00)} + C_{(11)(00)}^- a_{(00)} \end{aligned} \right\} (17)$$

ここで

$$C_{(lm)(l'm')}^\pm = \frac{1}{2} \left(Y_{(lm)(l'm')} \sqrt[4]{\frac{Z_{(lm)(lm)} Z_{(l'm')(l'm')}}{Y_{(lm)(lm)} Y_{(l'm')(l'm')}}} \pm Z_{(lm)(l'm')} \sqrt[4]{\frac{Y_{(lm)(lm)} Y_{(l'm')(l'm')}}{Z_{(lm)(lm)} Z_{(l'm')(l'm')}}} \right) \quad (17)$$

上式に式(14)の値を代入して計算すると, $C_{(lm)(l'm')}^\pm$ は $C_{(lm)(l'm')}^\pm$ よりも $g^2 w_0^2$ オーダ小さくなるから, 式(16)において反射波 $b_{(00)}$, $b_{(11)}$ の影響は無視される。よって式(16)はつぎのように簡単化される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{da_{(00)}}{dz} &= -j\beta_{(00)} a_{(00)} - jC a_{(11)} \\ \frac{da_{(11)}}{dz} &= -j\beta_{(11)} a_{(11)} - jC a_{(00)} \end{aligned} \right\} (18)$$

ただし結合係数 C は

$$C = \frac{w_0}{2\sqrt{2}R} \left(k(0) - \frac{3}{2}g \right) \quad (19)$$

そこで式(18)を端条件

$$a_{(00)}(z=0) = 1, \quad a_{(11)}(z=0) = 0 \quad (20)$$

のもとで解くとつぎの結果が得られる。

$$\left. \begin{aligned} a_{(00)} &= e^{-j(k(0) - \frac{3}{2}g)z} \left\{ \cos \left(\sqrt{\left(\frac{w_0 k(0)}{2\sqrt{2}R} \right)^2 + \left(\frac{g}{2} \right)^2} z \right) \right. \\ &\quad \left. - j \frac{g}{\sqrt{\left(\frac{w_0 k(0)}{\sqrt{2}R} \right)^2 + g^2}} \sin \left(\sqrt{\left(\frac{w_0 k(0)}{2\sqrt{2}R} \right)^2 + \left(\frac{g}{2} \right)^2} z \right) \right\} \\ a_{(11)} &= -j \frac{\frac{w_0 k(0)}{\sqrt{2}R}}{\sqrt{\left(\frac{w_0 k(0)}{\sqrt{2}R} \right)^2 + g^2}} e^{-j(k(0) - \frac{3}{2}g)z} \sin \left(\sqrt{\left(\frac{w_0 k(0)}{2\sqrt{2}R} \right)^2 + \left(\frac{g}{2} \right)^2} z \right) \end{aligned} \right\} (21)$$

よって曲り部の電磁界はつぎのように表わすことができる。

$$\begin{aligned}
 E &= a_{(00)} \phi_{(00)} + a_{(11)} \phi_{(11)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi} \omega_0} e^{-j(k(0) - \frac{3}{2}g)z - \frac{r^2}{2\omega_0^2}} \left\{ \cos \left(\sqrt{\left(\frac{\omega_0 k(0)}{2\sqrt{2}R} \right)^2 + \left(\frac{g}{2} \right)^2} z \right) \right. \\
 &\quad \left. - j \frac{\left(1 - \frac{r \cos \varphi}{g^2 \omega_0^2 R} \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2} g^2 \omega_0^2 R} \right)^2}} \sin \left(\sqrt{\left(\frac{\omega_0 k(0)}{2\sqrt{2}R} \right)^2 + \left(\frac{g}{2} \right)^2} z \right) \right\} \quad (22)
 \end{aligned}$$

ここでガスレンズの曲りが緩やかな場合を考えると、式(22)において $R \gg 1/\sqrt{2} g^2 \omega_0$ とするから

$$E = \frac{1}{\sqrt{\pi} \omega_0} e^{-j\beta_{(00)}z + j \frac{r \cos \varphi}{2g^2 \omega_0^2 R} \sin gz - \frac{1}{2\omega_0^2} \left(r^2 + \frac{r \cos \varphi}{g^2 R} (1 - \cos gz) \right)} \quad (23)$$

すなわち入射ガウスビームはそのスポットを保ちつつ中心部が ($x = -(1 - \cos gz)/2g^2R$, $y = 0$) の軌跡に従って軸から曲りの外側へ脈動しながら伝搬して、その周期は $2\pi/g$ 、最大の軸ずれは $1/g^2R$ であることがわかる (Fig. 3)。

一方曲りが急になって $R \approx 1/\sqrt{2} g^2 \omega_0$ が成立つ程になると、式(22)の括弧内の第二項は単に(00) 状態と(11) 状態の和を表わすことになって、その結果入射ガウス波は軸ずれすると同時にスポットも曲りの方向に押しつぶされた形に歪んでくる⁸⁾ (Fig. 4)。そのような状態変換の周期は曲率半径が関係して、

$$Z = \frac{2\pi}{g \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2} g^2 \omega_0 R} \right)^2}} \quad (24)$$

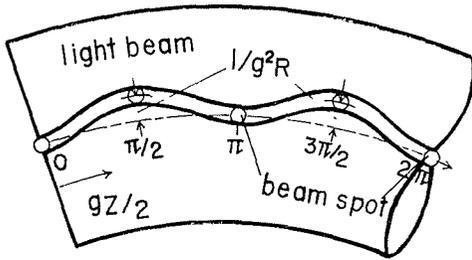


Fig. 3. Path and spot of an input gaussian beam in gentle bends of $R \gg 1/\sqrt{2} g^2 \omega_0$.

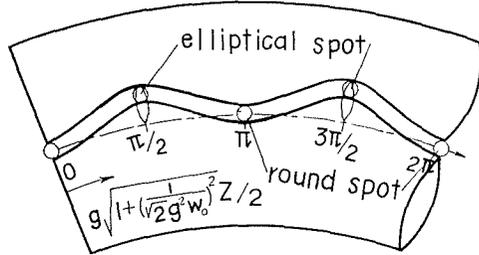


Fig. 4. Mode conversion of an input gaussian beam in sharp bends of $R \approx 1/\sqrt{2} g^2 \omega_0$.

3-2 任意ガウスビームが入射する場合

状態整合されていない任意のガウスビームは一般に次式のように表わすことができる。

$$E_{in} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \omega_{in}} e^{-\frac{r^2}{2\omega_{in}^2}} \quad (\omega_{in}^2: \text{複素数}) \quad (25)$$

これを固有状態で展開すると、

$$E_{in} = \sum_{l=0}^{\infty} C_{(l0)} \phi_{(l0)} \quad (26)$$

展開係数 $C_{(l0)}$ は固有姿態の規格直交性から求められて、

$$C_{(l0)} = 2 \frac{\frac{\omega_0}{\omega_{in}}}{\left(\frac{\omega_0}{\omega_{in}}\right)^2 + 1} \left(\frac{\left(\frac{\omega_0}{\omega_{in}}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\omega_0}{\omega_{in}}\right)^2 + 1} \right)^l \quad (27)$$

したがって任意のガウスビームに対する応答は展開された個々の $(l0)$ 姿態 ($l=0, 1, 2, \dots$) に対する応答を求めて、任意の点でこれらを合成することにより与えられる。 $l=0$ の場合にはすでに 3-1 において、 (00) 姿態の応答が求められている。 $l \geq 1$ に対しては $(l0)$ 姿態と結合するものとして、 $(l, 1)$ 姿態、および $(l+1, 1)$ 姿態であることが Fig. 2 からわかるから、それらの結合関係は各姿態の前進波振幅をそれぞれ $a_{(l0)}$ 、 $a_{(l,1)}$ 、 $a_{(l+1,1)}$ として、

$$a_{(l0)}(z=0) = 1, \quad a_{(l,1)}(z=0) = 0, \quad a_{(l+1,1)}(z=0) = 0 \quad (28)$$

の境界条件のもとで式 (8) を解いて求められる。その結果は各振幅が三階の微分方程式の解として与えられて、

$$\left. \begin{aligned} a_{(l0)} &= e^{-j\beta_{(l0)}z} \left\{ \frac{-\tilde{r}_2\tilde{r}_3 + \left(\frac{\omega_0 k(0)}{2\sqrt{2}R}\right)^2 (2l+1)}{(\tilde{r}_3 - \tilde{r}_1)(\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2)} e^{-\tilde{r}_1 z} \right. \\ &\quad \left. + \frac{-\tilde{r}_3\tilde{r}_1 + \left(\frac{\omega_0 k(0)}{2\sqrt{2}R}\right)^2 (2l+1)}{(\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2)(\tilde{r}_2 - \tilde{r}_3)} e^{-\tilde{r}_2 z} + \frac{-\tilde{r}_1\tilde{r}_2 + \left(\frac{\omega_0 k(0)}{2\sqrt{2}R}\right)^2 (2l+1)}{(\tilde{r}_2 - \tilde{r}_3)(\tilde{r}_3 - \tilde{r}_1)} e^{-\tilde{r}_3 z} \right\} \\ a_{(l,1)} &= j \frac{\omega_0 k(0) \sqrt{l}}{2\sqrt{2}R} e^{-j\beta_{(l0)}z} \left\{ \frac{\tilde{r}_1 + jg}{(\tilde{r}_3 - \tilde{r}_1)(\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2)} e^{-\tilde{r}_1 z} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tilde{r}_2 + jg}{(\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2)(\tilde{r}_2 - \tilde{r}_3)} e^{-\tilde{r}_2 z} + \frac{\tilde{r}_3 + jg}{(\tilde{r}_2 - \tilde{r}_3)(\tilde{r}_3 - \tilde{r}_1)} e^{-\tilde{r}_3 z} \right\} \\ a_{(l+1,1)} &= -j \frac{\omega_0 k(0) \sqrt{l+1}}{2\sqrt{2}R} e^{-j\beta_{(l0)}z} \left\{ \frac{\tilde{r}_1 - jg}{(\tilde{r}_3 - \tilde{r}_1)(\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2)} e^{-\tilde{r}_1 z} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tilde{r}_2 - jg}{(\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2)(\tilde{r}_2 - \tilde{r}_3)} e^{-\tilde{r}_2 z} + \frac{\tilde{r}_3 - jg}{(\tilde{r}_2 - \tilde{r}_3)(\tilde{r}_3 - \tilde{r}_1)} e^{-\tilde{r}_3 z} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \tilde{r}_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{r}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{r}} \\ \tilde{r}_2 &= -\frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{r}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{r}} \right) + j \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{r}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{r}} \right) \\ \tilde{r}_3 &= -\frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{r}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{r}} \right) - j \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{r}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{r}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

さらに

$$\begin{aligned} r &= \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \\ q &= -jg \left(\frac{\omega_0 k(0)}{2\sqrt{2}R} \right)^2 \\ p &= g^2 + \left(\frac{\omega_0 k(0)}{2\sqrt{2}R} \right)^2 (2l+1) \end{aligned}$$

よって応答電磁界は式(21), (29)の結果を用いて次式で与えられる。

$$E = C_{(00)}(a_{(00)}\phi_{(00)} + a_{(11)}\phi_{(11)}) + \sum_{l=1}^{\infty} C_{(l0)}(a_{(l0)}\phi_{(l0)} + a_{(l,1)}\phi_{(l,1)} + a_{(l+1,1)}\phi_{(l+1,1)}) \quad (31)$$

ここで特に曲りが緩やかな場合を調べると、式(30)において $R \gg \sqrt{2l+1}/2\sqrt{2}g^2w_0$ を考慮するから、 $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \tilde{r}_3$ はそれぞれ $0, jg, -jg$ となる。よって式(21), (29)は

$$\left. \begin{aligned} a_{(00)} &= e^{-j\beta_{(00)}z} \\ a_{(11)} &= -j \frac{w_0 k(0)}{\sqrt{2}gR} e^{-j(k(0) - \frac{3}{2}g)z} \sin \frac{g}{2}z \\ a_{(l0)} &= e^{-j\beta_{(l0)}z} \\ a_{(l,1)} &= j \frac{w_0 k(0)\sqrt{l}}{\sqrt{2}gR} e^{-j(k(0) - g(2l + \frac{1}{2}))z} \sin \frac{g}{2}z \\ a_{(l+1,1)} &= -j \frac{w_0 k(0)\sqrt{l+1}}{\sqrt{2}gR} e^{-j(k(0) - g(2l + \frac{3}{2}))z} \sin \frac{g}{2}z \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

これらを式(31)に代入すると、応答電磁界は

$$E = \frac{e^{jk(0)z - j \frac{r \cos \varphi}{2g^2 w_0^2 R} \sin gz}}{\sqrt{\pi} w_{in} \left(\cos gz - j \frac{w_0^2}{w_{in}^2} \sin gz \right)} e^{\frac{1}{2w_{in}^2} \frac{\cos gz - j \frac{w_0^2}{w_{in}^2} \sin gz}{\cos gz - j \frac{w_0^2}{w_{in}^2} \sin gz}} \left(r^2 + \frac{r \cos \varphi}{g^2 R} (1 - \cos gz) \right) \quad (33)$$

ただしこの計算においては Laguerre の陪多項式の和に関する公式¹¹⁾を用いた。

これから任意ガウスビームが入射する場合でも、中心部の脈動は $(x = -(1 - \cos gz)/2g^2R, y = 0)$ に従うことがわかる。また応答電磁界式(23), (33)の指数部の第2項、 $r \cos \varphi \sin gz / 2g^2w_0^2R$ は曲りに特有な位相変化を示している。

一方曲りが急な場合には、式(30)の $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \tilde{r}_3$ は l の関数となるから、式(31)の和を計算してもガウスビームに合成することはできない。その結果ビームスポットの形は歪んで高次姿態へ変換する。この姿態変換は固有ガウスビームが入射する場合とは異なって周期性が失われ、伝搬距離が増す程姿態変換率が大きくなると考えられる。

4. 姿態変換を打消す誘電率分布

ガスレンズが曲ったことによって生ずる姿態変換は中の誘電率分布を適当に変形することにより取り除くことができる。なぜなら直線ガスレンズにおいても、半径の自乗以上の高次変化項を含む誘電率分布の場合には、姿態変換が生ずることが知られている¹⁰⁾。よってこの姿態変換という現象に関しては、曲りの影響と誘電率の高次変化項とは等価である。したがって誘電率の高次変化項を曲率半径を用いて表わすことができれば、結合伝送方程式における結合係数を零と置くことができるから、姿態変換が除去される。

そこで高次変化項を含む誘電率分布を

$$\varepsilon(r) = \varepsilon(0) \left(1 - (gr)^2 - \sum_{a=1}^{\infty} a_a (gr)^a \cos \alpha^a \right) \quad (34)$$

と置いて、この媒質を含む曲り部の電磁界を固有姿態で展開して多重結合伝送方程式 (8) に直す。このとき結合定数 $Z_{(lm)(l'm')}$, $Y_{(lm)(l'm')}$ は光ビームの偏波面が x 方向にあるとしてつぎのようになる⁹⁾。ただしこの場合も径方向の指数差が ± 1 , 周方向のそれが ± 2 までのものを記す。

$$\left. \begin{aligned} Z_{(lm)(lm)} &= j\omega\mu \left(1 - \frac{g^2 \omega_0^2}{2} (2l-m+1) \right) + O \left(g^4 \omega_0^4 \left(1, a_2, a_1^2, \frac{a_1}{gR} \right) \right) \\ Z_{(lm)(l-1,m)} &= - \frac{j\omega\mu g^2 \omega_0^2}{2} \sqrt{(l+1)(l-m+1)} + O \left(g^4 \omega_0^4 \left(1, a_2, a_1^2, \frac{a_1}{gR} \right) \right) \\ Z_{(lm)(l-1,m)} &= - \frac{j\omega\mu g^2 \omega_0^2}{2} \sqrt{l(l-m)} + O \left(g^4 \omega_0^4 \left(1, a_2, a_1^2, \frac{a_1}{gR} \right) \right) \\ Z_{(lm)(l,m+1)} &= - \frac{j\omega\mu \omega_0}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m-1}}} \sqrt{l-m} \left(\frac{1}{R} + \frac{g^2 \omega_0^2}{4} \left(a_1 g - \frac{1}{R} \right) (3l-m+1) \right) \\ &\quad + O \left(\frac{g^4 \omega_0^5}{R} (1, a_2, a_1^2) \right) \\ Z_{(lm)(l,m-1)} &= - \frac{j\omega\mu \omega_0}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m-1}}} \sqrt{l-m+1} \left(\frac{1}{R} \right. \\ &\quad \left. + \frac{g^2 \omega_0^2}{4} \left(a_1 g - \frac{1}{R} \right) (3l-m+2) \right) + O \left(\frac{g^2 \omega_0^2}{R} (1, a_2, a_1^2) \right) \\ Z_{(lm)(l+1,m+1)} &= \frac{j\omega\mu \omega_0}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m+1}}} \sqrt{l+1} \left(\frac{1}{R} + \frac{g^2 \omega_0^2}{4} \left(a_1 g - \frac{1}{R} \right) (3l-2m+2) \right) \\ &\quad + O \left(\frac{g^2 \omega_0^2}{R} (1, a_2, a_1^2) \right) \\ Z_{(lm)(l-1,m-1)} &= \frac{j\omega\mu \omega_0}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m-1}}} \sqrt{l} \left(\frac{1}{R} + \frac{g^2 \omega_0^2}{4} \left(a_1 g - \frac{1}{R} \right) (3l-2m+1) \right) \\ &\quad + O \left(\frac{g^2 \omega_0^2}{R} (1, a_2, a_1^2) \right) \\ Z_{(lm)(l-1,m+1)} &= - \frac{3j\omega\mu g^2 \omega_0^3}{8} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m+1}}} \left(a_1 g - \frac{1}{R} \right) \sqrt{l(l-m)(l-m-1)} \\ &\quad + O \left(\frac{g^2 \omega_0^2}{R} (1, a_2, a_1^2) \right) \\ Z_{(lm)(l+1,m-1)} &= - \frac{3j\omega\mu g^2 \omega_0^2}{8} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m-1}}} \left(a_1 g - \frac{1}{R} \right) \sqrt{(l+1)(l-m+2)(l-m+1)} \\ &\quad + O \left(\frac{g^2 \omega_0^2}{R} (1, a_2, a_1^2) \right) \\ Z_{(lm)(l-2,m+1)} &= \frac{3j\omega\mu g^2 \omega_0^3}{8} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m+1}}} \left(a_1 g - \frac{1}{R} \right) \sqrt{(l+2)(l+1)(l-m+1)} \\ &\quad + O \left(\frac{g^2 \omega_0^2}{R} (1, a_2, a_1^2) \right) \\ Z_{(lm)(l-2,m-1)} &= \frac{3j\omega\mu g^2 \omega_0^3}{8} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m-1}}} \left(a_1 g - \frac{1}{R} \right) \sqrt{l(l-1)(l-m)} \\ &\quad + O \left(\frac{g^2 \omega_0^2}{R} (1, a_2, a_1^2) \right) \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
Y_{(lm)(lm)} &= j\omega \varepsilon(0) \left(1 - \frac{3g^2 \omega_0^2}{2} \left(1 - \frac{a_1}{3gR}\right) (2l-m+1)\right) \\
Y_{(lm)(l-1,m)} &= \frac{j\omega \varepsilon(0) g^2 \omega_0^2}{2} \left(1 - \frac{a_1}{gR}\right) \sqrt{l(l-m)} \\
Y_{(lm)(l+1,m)} &= \frac{j\omega \varepsilon(0) g^2 \omega_0^2}{2} \left(1 - \frac{a_1}{gR}\right) \sqrt{(l+1)(l-m+1)} \\
Y_{(lm)(l,m+1)} &= -\frac{j\omega \varepsilon(0) \omega_0}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m+1}}} \sqrt{l-m} \left(\frac{1}{R} + a_1 g \right. \\
&\quad \left. - \frac{g^2 \omega_0^2}{R} \left(\left(1 + \frac{a_2}{2}\right) (3l-m+1) + \frac{1}{4} (l-3m-1)\right)\right) \\
Y_{(lm)(l,m-1)} &= -\frac{j\omega \varepsilon(0) \omega_0}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m-1}}} \sqrt{l-m+1} \left(\frac{1}{R} + a_1 g \right. \\
&\quad \left. - \frac{g^2 \omega_0^2}{R} \left(\left(1 + \frac{a_2}{2}\right) (3l-m+2) + \frac{1}{4} (l-3m+2)\right)\right) \\
Y_{(lm)(l+1,m+1)} &= \frac{j\omega \varepsilon(0) \omega_0}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m+1}}} \sqrt{l+1} \left(\frac{1}{R} + a_1 g \right. \\
&\quad \left. - \frac{g^2 \omega_0^2}{R} \left(\left(1 + \frac{a_2}{2}\right) (3l-2m+2) + \frac{1}{4} (l+2m+2)\right)\right) \\
Y_{(lm)(l-1,m-1)} &= \frac{j\omega \varepsilon(0) \omega_0}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m-1}}} \sqrt{l} \left(\frac{1}{R} + a_1 g \right. \\
&\quad \left. - \frac{g^2 \omega_0^2}{R} \left(\left(1 + \frac{a_2}{2}\right) (3l-2m+1) + \frac{1}{4} (l+2m-1)\right)\right) \\
Y_{(lm)(l-1,m+1)} &= -\frac{3j\omega \varepsilon(0) g^2 \omega_0^3}{8R} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m+1}}} \left(1 + \frac{2}{3} a_2\right) \sqrt{l(l-m)(l-m-1)} \\
Y_{(lm)(l+1,m-1)} &= -\frac{3j\omega \varepsilon(0) g^2 \omega_0^3}{8R} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m-1}}} \left(1 + \frac{2}{3} a_2\right) \sqrt{(l+1)(l-m+2)(l-m+1)} \\
Y_{(lm)(l+2,m+1)} &= \frac{3j\omega \varepsilon(0) g^2 \omega_0^3}{8R} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m+1}}} \left(1 + \frac{2}{3} a_2\right) \sqrt{(l+2)(l+1)(l-m+1)} \\
Y_{(lm)(l-2,m-1)} &= \frac{3j\omega \varepsilon(0) g^2 \omega_0^3}{8R} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m-1}}} \left(1 + \frac{2}{3} a_2\right) \sqrt{l(l-1)(l-m)} \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{36}$$

ただし $O(x(a, b, c, \dots))$ は x のオーダーで、その形が $\alpha a + \beta b + \gamma c + \dots$ であるような微小な項を示す。これらの結合定数のうち、曲りによって問題となるものは (lm) 姿態と $(l, m \pm 1)$, $l \pm 1$, $m \pm 1$ 姿態 (複号同順) 間の結合のみであることが 2. の結果から知られるから、結合伝送方程式 (8) は

$$\begin{aligned}
\frac{dE_{(lm)}}{dz} &= -Z_{(lm)(lm)} H_{(lm)} - Z_{(lm)(l,m+1)} H_{(l,m+1)} - Z_{(lm)(l,m-1)} H_{(l,m-1)} \\
&\quad - Z_{(lm)(l+1,m+1)} H_{(l+1,m+1)} - Z_{(lm)(l-1,m-1)} H_{(l-1,m-1)} \\
\frac{dH_{(lm)}}{dz} &= -Y_{(lm)(lm)} E_{(lm)} - Y_{(lm)(l,m+1)} E_{(l,m+1)} - Y_{(lm)(l,m-1)} E_{(l,m-1)} \\
&\quad - Y_{(lm)(l+1,m+1)} E_{(l+1,m+1)} - Y_{(lm)(l-1,m-1)} E_{(l-1,m-1)}
\end{aligned} \tag{37}$$

ここで式(15)の前進波、反射波の関係を代入して、前進波のみに注目すると、式(37)はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{da_{(lm)}}{dz} = & -j\beta_{(lm)}a_{(lm)} - jC_{(lm)(l,m+1)}a_{(l,m+1)} - jC_{(lm)(l,m-1)}a_{(l,m-1)} \\ & - jC_{(lm)(l+1,m+1)}a_{(l+1,m+1)} - jC_{(lm)(l-1,m-1)}a_{(l-1,m-1)} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \beta_{(lm)} = & k(0) - g \left(1 - \frac{1}{4gR} \right) (2l - m + 1) \\ C_{(lm)(l,m+1)} = & -\frac{k(0)\omega_0}{4} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m+1}}} \sqrt{l-m} \left(\frac{2}{R} + a_1g + O(a_1g^3\omega_0^2) \right. \\ & \left. + O\left(\frac{g^2\omega_0^2}{R}(1, a_2, a_1^2)\right) \right) \\ C_{(lm)(l,m-1)} = & -\frac{k(0)\omega_0}{4} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m-1}}} \sqrt{l-m+1} \left(\frac{2}{R} + a_1g + O(a_1g^2\omega_0^2) \right. \\ & \left. + O\left(\frac{g^2\omega_0^2}{R}(1, a_2, a_1^2)\right) \right) \\ C_{(lm)(l+1,m-1)} = & \frac{k(0)\omega_0}{4} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m+1}}} \sqrt{l+1} \left(\frac{2}{R} + a_1g + O(a_1g^3\omega_0^2) \right. \\ & \left. + O\left(\frac{g^2\omega_0^2}{R}(1, a_2, a_1^2)\right) \right) \\ C_{(lm)(l-1,m-1)} = & \frac{k(0)\omega_0}{4} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m-1}}} \sqrt{l} \left(\frac{2}{R} + a_1g + O(a_1g^3\omega_0^2) \right. \\ & \left. + O\left(\frac{g^2\omega_0^2}{R}(1, a_2, a_1^2)\right) \right) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

したがって $g^2\omega_0^2 \ll 1$ の近似のもとでは、式(34)の展開級数のうち第一項の a_1 のみを

$$a_1 = -\frac{2}{gR} \quad (40)$$

のように選ばなければならない。式(39)の結合係数を零とすることができて、姿態変換がなくなる。ただし a_2 以上の高次係数は上述の近似のオーダーからは決定されない。よって所要の誘電率分布は

$$\varepsilon(r) = \varepsilon(0) \left(1 + \frac{2r}{R} \cos \varphi - (gr)^2 \right) \quad (41)$$

さてこのような分布の物理的意味を調べてみよう。そのためにガスレンズの断面における中心点 O から曲りの外側へ $1/g^2R$ だけずれた点 O' において、理想的誘電率分布式(1)を展開する (Fig. 5)。まず三角形 $OO'P$ に三角関数の余弦法則を適用すると、

$$r'^2 = r^2 + \left(\frac{1}{g^2R} \right)^2 + \frac{2r \cos \varphi}{g^2R} \quad (42)$$

ここで $1/g^2R \ll 1$ を考慮すると、上式は

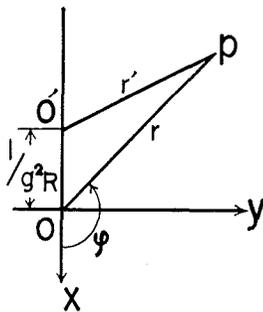


Fig. 5. Coordinates in a cross section of curved gas lens.

$$r' = r + \frac{1}{g^2 R} \cos \varphi \quad (43)$$

よって式(1)はつぎのようになる。

$$\varepsilon(r') = \varepsilon(0) \left(1 - (gr')^2 + \frac{2r'}{R} \cos \varphi - \frac{1}{(gR)^2} \cos 2\varphi \right) \quad (44)$$

ここで光ビームの強度が固有スポットサイズ以上では実質的に零になるとみなすことができるから、式(41), (44)のそれぞれに $r = w_0$, $r' = w_0$ を代入して比較すると、

$$\varepsilon(r = w_0) = \varepsilon(0) \left(1 - (gw_0)^2 + \frac{2w_0}{R} \cos \varphi \right) \quad (45)$$

$$\varepsilon(r' = w_0) = \varepsilon(0) \left(1 - (gw_0)^2 + \frac{2w_0}{R} \cos \varphi - \frac{1}{(gR)^2} \cos 2\varphi \right) \quad (46)$$

したがって曲率半径が大きくて、 $R \gg 1/\sqrt{2} g^2 w_0$ が成立つ場合には、

$$(gw_0)^2 \gg \frac{2w_0}{R} \gg \frac{1}{(gR)^2} \quad (47)$$

となるから、式(46)の括弧内の第4項は第2, 3項に比べて無視されて、式(46)は式(45)に等しくなる。このことは $R \gg 1/\sqrt{2} g^2 w_0$ が満たされる程の緩やかな曲りの場合には、ガスレンズの中心軸から曲りの外側へ $1/g^2 R$ だけずれて入射する光ビームは脈動なしに伝搬することを意味している。これは幾何光学的に解析した結果に一致する⁶⁾。この軸ずれ入射、および軸上に入射する光ビームの行路を Fig. 6 に示す。

一方曲りが急になって、 $R \approx 1/\sqrt{2} g^2 w_0$ が成立つ場合には、

$$(gw_0)^2 \sim \frac{2w_0}{R} \sim \frac{1}{(gR)^2} \quad (48)$$

になるから、式(46)の括弧内の第4項は無視できなくなって、式(46)は式(45)には一致しない。このことは姿態変換が生ずることに関係して理想誘電率分布を持つガスレンズにいかなる位置から光ビームを入射しても姿態変換を打消すことはできないことを意味している。

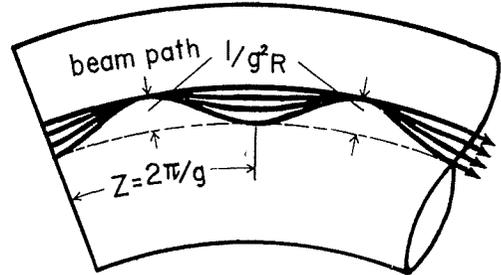


Fig. 6. Pathes of a gaussian beam incident on and off center axis of gas lens ($R \gg 1/\sqrt{2} g^2 w_0$).

5. 展開方法の適用範囲について

本論文では曲り部の電磁界を直線状ガスレンズの固有姿態の和として求めているが、この方法の適用限界について調べる必要がある。すなわち固有姿態は Maxwell の方程式を厳密には満足しない近似解であるから、この近似解を用いて曲り部の電磁界をどの程度まで正確に表わすることができるかが問題となる。これは固有姿態を求める際の近似のオーダーが $(gw_0)^2$ を 1 に

比して無視する程度であることを考えれば、その和として求める曲り部の電磁界も $(g\omega_0)^2$ のオーダーまでは正しいことになる。ゆえに 2. おいて求めた結合定数において、 $Z_{(lm)(l\pm 1, m)}$ は $Z_{(lm)(lm)}$ よりも $(g\omega_0)^2$ のオーダー小さく、また $Z_{(lm)(l\pm 1, m\mp 1)}$, $Z_{(lm)(l\pm 2, m\pm 1)}$ は $Z_{(lm)(l, m\pm 1)}$, $Z_{(lm)(l\pm 1, m\pm 1)}$ に比してやはり $(g\omega_0)^2$ のオーダー小さいから、これらは共に無視できる。その結果 $Z_{(lm)(l, m\pm 1)}$, $Z_{(lm)(l\pm 1, m\pm 1)}$ の結合定数のみを考えればよいことがわかる。 $Y_{(lm)(l'm')}$ についても同様のことが言える。

つぎにこれらの結合定数は ω_0/R のオーダーであるが、これについても検討する必要がある。ここで再び $(g\omega_0)^2 \ll 1$ の近似のオーダーを考慮すると、 ω_0/R は $(g\omega_0)^2$ 同程度か、あるいはそれよりも小さくなくてはならない。すなわち ω_0/R が $(g\omega_0)^2$ のオーダーよりも大きい場合には、この近似の範囲外となってこの方法は適用されない。したがって曲率半径に

$$R \geq O\left(\frac{1}{\sqrt{2}g^2\omega_0}\right) \quad (45)$$

の制約が課せられて、この理論が成立つ場合の曲率半径の下限値が与えられる。例えばガスレンズの媒質定数が $g^2 = 0.2 \text{ m}^{-2}$ で、波長が 0.63μ のレーザー光を用いる場合には、曲率半径が km のオーダー以上でなければならない。

また 4. で求めた結合定数においても式 (49) の関係を考慮すると、 $Z_{(lm)(l, m\pm 1)}$, $Z_{(lm)(l\pm 1, m\pm 1)}$ 以外の結合定数を無視してもよいことがわかる ($Y_{(lm)(l'm')}$ についても同様)。使えば式 (36) の $Y_{(lm)(l\pm 1, m)}$ は式 (40) の a_1 の値を代入すると、

$$\begin{aligned} Y_{(lm)(l\pm 1, m)} &= O\left(g^2\omega_0^2\left(1 - \frac{a_1}{gR}\right)\right) \\ &\leq O(g^2\omega_0^2(1 + 4g^2\omega_0^2)) \\ &\sim O(g^2\omega_0^2) \end{aligned} \quad (50)$$

よって $Y_{(lm)(l\pm 1, m)}$ は $Y_{(lm)(lm)}$ に無視できる。他の結合定数に関しても同様である。

6. む す び

光ビーム導波系の集束素子として考えられているガスレンズの曲りについて理論的に考察した。その結果つぎのような結論を得た。

(i) 曲りが緩やかな場合 ($R \gg 1/\sqrt{2}g^2\omega_0$) には、入射ガウスビームは $(x = -(1 - \cos gz)/2g^2R, y = 0)$ の軌跡に従って中心軸から曲りの外側へ脈動しながら伝搬する。

(ii) 曲りが急になった場合 ($R \approx 1/\sqrt{2}g^2\omega_0$) には、入射ガウスビームは軸ずれすると同時にスポットが曲りの方向に押しつぶされた形に歪んで姿態変換が生ずる。その変換は姿態整合された固有ガウスビームが入射する場合には周期性があるが、任意のガウスビームの場合には周期性は失なわれる。

(iii) (i) のようなビーム行路の脈動を無くするには、光ビームをガスレンズの中心軸から

曲りの外側へ $1/g^2R$ だけずらした位置に入射すればよい。

(iv) (ii) の姿態変換を打ち消すには、曲りガスレンズ内の誘電率分布を $\varepsilon(r) = \varepsilon(0)(1-(gr)^2 + 2r \cos \varphi/R)$ のように非対称にする必要がある。

これらの結論は曲りの半径が $1/\sqrt{2} g^2 w$ のオーダーまでのガスレンズに対して成立つ。この制限は実際のガスレンズの有限な口径による回折損失が脈動の振幅が大きい程、あるいは姿態変換率が増す程大きくなることを考えると、実用上有効な曲りの下限値を与えていると思われる。これ以下の急激な曲りに対してはガスレンズを用いるよりも、反射鏡あるいはプリズムを用いる方が適当と考えられる。

最後にこの論文に対して有益な御討論、御助言をいただいた本学科伊藤助教授、青木助教授、木下講師に深い感謝の意を表します。

文 献

- 1) 1-1) Goubou, G. and Christian, J. R.: “Some aspects of beam waveguide for long distance transmission at optical frequencies”, IEEE Trans. MTT-12, p. 212 (March 1964).
- 1-2) Hirano, J. and Fukatsu, Y.: “Stability of light beam in a beam waveguide”, Proc. IEEE, 52, p. 1284 (Nov. 1964).
- 2) Christian, J. R. et al.: “Further investigations with an optical beam waveguide for long distance transmission”, IEEE Trans. MTT-15, p. 216 (April 1967).
- 3) 末松安晴・伊賀健一: “レンズ対および反射鏡対を用いる光ビーム導波系”, 信学会マイクロ波研資 (Dec. 1966).
- 4) 4-1) Marcatili, E. A. J.: “Modes in a sequence of thick astigmatic lens-like focusers”, Bell Syst. tech. J., 43, p. 2887 (Nov. 1964).
- 4-2) Tien, P. K. et al.: “Focusing of a light beam of Gaussian field distribution in continuous and periodic lens-like media”, Proc. IEEE, 53, p. 129 (Feb. 1965).
- 4-3) 今井正明・他: “理想的ガスレンズの波動光学的解析”, 信学誌掲載予定。
- 5) 例えば Berreman, D. W.: “A lens or light guide using convectively distorted thermal gradients in gases”, Bell Syst. tech. J., 43, p. 1469 (July 1964).
- 6) Unger, H. G.: “Light beam propagation in curved schlieren guides”, Arch. elekt. Übertragung, 19, p. 189 (April 1964).
- 7) 末松安晴・吹抜洋司: “理想化されたガス光導波系の解析”, 信学誌, p. 1684 (Oct. 1965).
- 8) 今井正明・他: “理想的媒質を持つ曲りガスレンズについて”, 信学誌投稿中。
- 9) 今井正明・松本 正: “ガスレンズの曲りによる姿態変換を打消す誘電率分布”, 昭和42年信学全大予稿集, No. 534 (Oct. 1967).
- 10) 10-1) Marcatili, E. A. J.: “Off-axis wave-optics transmission in a lens-like medium with aberration”, Bell Syst. tech. J., 46, p. 149 (Jan. 1967). これについては筆者らは更に一般的に詳細に検討している。
- 10-2) 今井正明・松本 正: “収差を有するガスレンズの一般的応答”, 昭和43年電気四学会連大発表予定 (March 1968).
- 11) Erdélyi, A. et al.: “Higher transcendental functions, Vol. II”, McGraw-Hill, New York, p. 189 (1953).
- 12) 例えば Margenau, H. and Murphy, G. M., 佐藤・国宗訳: “物理と化学のための数学 I”, 共立全書, 東京, p. 136-141 (1965).

付 録

(1) Laguerre の陪多項式に関する漸化式

Laguerre の陪多項式 $L_l^m(x)$ に関する微分方程式は¹²⁾,

$$xL_l^{m+2} + (m+1-x)L_l^{m+1} + (l-m)L_l^m = 0 \quad (\text{A-1})$$

また Laguerre の多項式 $L_l(x)$ に関する漸化式¹²⁾

$$(1+2l-x)L_l - l^2L_{l-1} - L_{l+1} = 0 \quad (\text{A-2})$$

を x について m 回微分することにより,

$$(1+2l-x)L_l^m - l^2L_{l-1}^m - L_{l+1}^m - mL_l^{m-1} = 0 \quad (\text{A-3})$$

式 (A-1), (A-3) を組み合わせることにより, 任意の次数の漸化式が導かれる。まず式 (A-3) から

$$mL_l^{m-1} = (1+2l-x)L_l^m - l^2L_{l-1}^m - L_{l+1}^m \quad (\text{A-4})$$

また式 (A-1) において m の代りに $m-1$ と置くと,

$$xL_l^{m+1} + (m-x)L_l^m + (l-m+1)L_l^{m-1} = 0 \quad (\text{A-5})$$

ここで L_l^{m-1} として式 (A-4) の結果を代入すると,

$$mxL_l^{m+1} = -\left\{m^2 - m(2l+1) + (2l-x+1) + (l+1)\right\}L_l^m - l^2(m-l-1)L_{l-1}^m - (m-l-1)L_{l+1}^m \quad (\text{A-6})$$

式 (A-4), (A-6) をもとにしてより高次の漸化式も導かれる。

(2) Laguerre の陪多項式に関する積分式

Laguerre の陪多項式 $L_l^m(x)$ に関する積分式

$$I_{l,\nu} = \int_0^\infty e^{-x} x^{m+1} L_l^m(x) L_l^m(x) x^\nu dx \quad (\text{A-7})$$

ただし p は正の整数

は Laguerre 陪多項式の母関数展開¹²⁾ を用いて得られたつぎの方程式

$$\sum \frac{z_1^l z_2^{l'}}{l! l'} I_{l,\nu} = (1-z_1)^{\nu-1} (1-z_2)^{\nu-1} \sum_{l=m}^\infty \frac{(m+p+l-1)! (z_1 z_2)^{m+l}}{l!} \quad (\text{A-8})$$

から求められる。すなわち上式において, $p=1, 2, 3, \dots$ と置いたとき, 両辺の z_1, z_2 の等しいべきについて等置すると,

$$\begin{aligned} I_{l,\nu}^1 &= \frac{(l!)^3}{(l-m)!} \delta_{l,\nu} \\ I_{l,\nu}^2 &= \frac{(l!)^3}{(l-m)!} \left((2l-m+1) \delta_{l,\nu} - \frac{l-m}{l} \delta_{l,\nu-1} - (l+1)^2 \delta_{l,\nu+1} \right) \\ I_{l,\nu}^3 &= \frac{(l!)^3}{(l-m)!} \left((6l^2 - 6lm + m^2 + 6l - 3m + 2) \delta_{l,\nu} - 2(l+1)^2 (2l-m+2) \delta_{l,\nu-1} \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{l-m}{l} (2l-m) \delta_{l,\nu-1} + \frac{(l-m-1)(l-m)}{l(l-1)} \delta_{l,\nu-2} + (l+2)^2 (l+1)^2 \delta_{l,\nu+2} \right) \end{aligned}$$

ただし $\delta_{l,\nu}$ はクロネッカーのデルタ